

三正则图的正常6-边染色下边的规范性

亢莹利

金华职业技术大学公共基础学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年6月17日; 录用日期: 2026年7月11日; 发布日期: 2026年7月21日

摘 要

本文围绕规范6-边着色猜想进行研究, 该猜想断言任意无桥三正则图存在规范6-边染色。三正则图 G 的奇度 $\omega(G)$ 是指 $G-M$ 中奇圈个数的最小值, 其中 M 遍历 G 的任意完美匹配。奇度的大小能够衡量图离3-边可染的远近。本文证明了任意无桥三正则图 G 存在正常6-边染色, 使得非规范边数至多为 $4\omega(G)$ 。

关键词

三正则图, 规范6-边染色, 规范边, 奇度

Normal Edges of 6-Edge Coloring of Cubic Graphs

Yingli Kang

General Education College, Jinhua University of Vocational Technology, Jinhua Zhejiang

Received: June 17, 2026; accepted: July 11, 2026; published: July 21, 2026

Abstract

The paper studies the normal 6-edge coloring conjecture, which asserts that every bridgeless cubic graph has a normal 6-edge coloring. The oddness of a cubic graph G , denoted by $\omega(G)$, is defined as the minimum number of odd cycles $G-M$ contains, where M goes over any perfect matching of G . The oddness $\omega(G)$ serves as a measure of how close the graph G is to being 3-edge colorable. The paper proves that every bridgeless cubic graph has a proper 6-edge coloring such that the number of non-normal edges is at most $4\omega(G)$.

Keywords

Cubic Graphs, Normal 6-Edge Colorings, Normal Edges, Oddness

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

所有顶点度数均为 3 的图称为三正则图。三正则图是有关完美匹配理论研究的重要图类，有许多著名猜想与之相关，比如 Petersen 着色猜想、Berge-Fulkerson 猜想、5-圈双覆盖猜想等等。而 Petersen 着色猜想强于后两者。Petersen 着色猜想由 Jaeger [1] 于 1988 年提出，该猜想断言：任意无桥三正则图 G 存在 Petersen 着色，即存在映射 $\phi: E(G) \rightarrow E(P)$ 使得 G 中任意互为相邻的三条边映射为 P 中互为相邻的三条边，其中 P 是指 Petersen 图。

设 G 是一个三正则图， $\phi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 是 G 的一个正常 k -边着色。对于 G 中的一条边 e ，记 $c(e)$ 为 e 及其相邻的 4 条边所染的颜色种类总数。显然， $3 \leq c(e) \leq 5$ 。若 $c(e) \in \{3, 5\}$ ，则称 e 为规范边；否则，称 e 为非规范边。更详细的，若 $c(e) = 3$ ，则称 e 为穷的规范边；若 $c(e) = 5$ ，则称 e 为富的规范边。若染色 ϕ 下 G 的所有边均是规范边，则称 ϕ 为规范 k -边着色。

Jaeger [2] 证明了 Petersen 着色猜想可用图的规范 5-边着色加以等价表述。

猜想 1 (Petersen 着色猜想的等价表述)：任意无桥三正则图存在规范 5-边着色。

关于无桥三正则图的规范 k -边着色，Mazzuoccolo 和 Mkrtchyan [3] 于 2020 年证明了任意三正则简单图存在规范 7-边染色。但若更进一步，关于规范 6-边染色的猜想目前仍未解决。

猜想 2 (规范 6-边着色猜想)：任意无桥三正则图存在规范 6-边着色。

三正则图的奇度和缺陷染色数是完美匹配理论中的两个重要参数。三正则图 G 的奇度 $\omega(G)$ 是指 $G-M$ 中奇圈个数的最小值，其中 M 遍历 G 的任意完美匹配。三正则图 G 的缺陷染色数 $\mu_3(G)$ 是指 $G-M_1 \cup M_2 \cup M_3$ 中边数的最小值，其中 M_1, M_2, M_3 遍历 G 的任意三个完美匹配。由定义可知， G 是 3-边可染当且仅当 $\omega(G) = 0$ ，且 $\omega(G)$ 必为偶数。此外， G 是 3-边可染当且仅当 $\mu_3(G) = 0$ ，且 $\mu_3(G) \notin \{1, 2\}$ 。Jin 和 Steffen [4] 证明了奇度和缺陷染色数存在如下关系： $\omega(G) \leq \frac{2}{3} \mu_3(G)$ ，该界是紧的且不等式两边的差值可以任意大。

关于猜想 2，Mazzuoccolo 和 Mkrtchyan [5] 证明了无爪的无桥三正则图等一些特殊图类满足猜想 2。此外，他们从规范边比例的角度推进猜想的研究，证明了任意无桥三正则图 G 存在正常 6-边着色使得规范边数至少为 $\frac{7}{9}|E(G)|$ 。2017 年，Jin 和 Kang [6] 证明了任意无桥三正则图 G 存在正常 5-边着色使得规范边数至少为 $|E(G)| - \mu_3(G)$ ，该结果以缺陷染色数给出正常 5-边着色下规范边数的统一下界。那么，能否以奇度给出正常 6-边着色下规范边数的一个较好的下界呢？

本文对于该问题给出一个正面回答，即证明了：任意无桥三正则图 G 存在正常 6-边染色，使得规范边数至少为 $|E(G)| - 4\omega(G)$ 。

本章最后给出证明所需的一些符号和术语。设 G 是一个无桥的三正则图， M 是 G 的一个完美匹配， C' 和 C'' 是 $G-M$ 中的两个圈。用 $E(C', C'')$ 表示 M 中一个端点在 C' 上而另一个端点在 C'' 上的边的全体组成的集合。若 $E(C', C'') \neq \emptyset$ ，则称 C' 和 C'' 是相邻的，称 $E(C', C'')$ 中的任意边与 C', C'' 均是关联的。

设 C 是 G 中的一个圈, 用 $\partial(C)$ 表示 G 中恰有一个端点在 C 上的边的全体组成的集合。

2. 主要结论及其证明

本文的主要结论为如下定理。

定理 1: 任意无桥三正则图 G 存在正常 6-边染色, 使得非规范边数至多为 $4\omega(G)$ 。

证明: 设 $\omega(G)=t$ 。由奇度的定义可知, 图 G 存在完美匹配 M , 使得 $G-M$ 由互不相交的圈组成, 其中恰好有 t 个奇圈, 而剩余的均为偶圈。

接下来对 G 进行正常的 6-边染色。首先, 对于 M 中的所有边, 均将其染颜色 1。

其次, 对于 $G-M$ 中的任意偶圈 D , 依圈的顺序用颜色 2 和 3 交替给 D 上的边进行染色。因 D 为偶圈, 故按此方式能将 D 上所有的边正常染好。

最后, 还需要对 $G-M$ 的奇圈进行染色。记 $G-M$ 中所有的奇圈为 $C_1, C_2, \dots, C_t$ 。设 H 是由 $C_1, C_2, \dots, C_t$ 和所有 $E(C_i, C_j)$ 中的边构成的图, 即 $H = \bigcup_{i=1}^t C_i \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq t} E(C_i, C_j)$ 。接下来对 H 进行染色的延拓和适当的改染。注意 H 不一定是连通图。若 H 不是连通的, 则对 H 的每个连通分支进行以下论证; 否则, 对 H 本身进行论证。

设 Q 是 H 的任意一个连通分支。记 $\bar{Q}$ 是将 Q 中的所有 C_i 各自收缩成一个顶点(记为 u_i)且将 C_i 的所有弦删除而得到的图。类似地, 记 $\bar{H}$ 和 $\bar{G}$ 分别是将 H 和 G 中的所有 C_i 各自收缩成一个顶点且将 C_i 的所有弦删除而得到的图。注意到, $\bar{Q}$ 可能含有重边但不含有环。接下来选取 $\bar{Q}$ 的一棵生成树 T , 选取 T 的根结点 u_r , 并在根结点所对应的奇圈 C_r 上进行染色。分以下两种情况进行讨论:

情况 1: 假设 $V(G)=V(Q)$ 。此时, $G-M$ 不含有偶圈且 $G=H=Q$ 。接下来将证明 $\bar{G}$ 含有偶圈或重边。采用反证法, 假设 $\bar{G}$ 既不含偶圈也不含重边。首先, 我们将推导出两个以下事实: (1) $\bar{G}$ 中的奇圈均无弦。否则的话, 设 C 为 $\bar{G}$ 中的一个奇圈且 C 含有弦 e 。则 e 将 C 划分成两个圈, 其中必是一个奇圈和一个偶圈, 与反证法假设 “ $\bar{G}$ 不含偶圈” 矛盾。事实 1 得证。(2) $\delta(\bar{G}) \geq 3$, 即 $\bar{G}$ 的最小度至少为 3。否则的话, 设 $\bar{G}$ 含有顶点 u_i 使得 $d_{\bar{G}}(u_i) \leq 2$ 。因此, $|\partial_{\bar{G}}(C_i)| \leq 2$ 。另一方面, 因为 G 是无桥三正则图而 C_i 为 G 中的奇圈, 则 $|\partial_G(C_i)| \geq 3$, 矛盾。事实 2 得证。

由反证法假设 $\bar{G}$ 不含重边, 则 $\bar{G}$ 为简单图。由事实 2 可知, $\bar{G}$ 不是一棵树, 即 $\bar{G}$ 含有圈。由反证法假设, $\bar{G}$ 中的圈均为奇圈。对于 $\bar{G}$ 中的任意奇圈 $C = [w_1 w_2 \dots w_{2k+1}]$, 由事实 1 和 2 可知: 对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, 2k+1\}$, 顶点 w_i 含有不在 C 上的一个邻点, 记作 w'_i 。接下来推导以下事实: (3) 对于任意 $1 \leq i < j \leq 2k+1$, w'_i 和 w'_j 位于 $\bar{G}-C$ 的不同连通分支上, 即 $\partial_{\bar{G}}(C)$ 里的每条边都是 $\bar{G}$ 的一座桥。否则的话, $\bar{G}-C$ 存在一条路 P 连接 w'_i 和 w'_j 。则 C 上位于 w_i 和 w_j 之间的那两条路中, 必有一条和 $P + w_i w'_i + w_j w'_j$ 组成一个偶圈, 与反证法假设 “ $\bar{G}$ 不含偶圈” 矛盾, 事实 3 得证。

由事实 3, $\bar{G}$ 含有桥。令 e 为 $\bar{G}$ 的一座桥使得 $\bar{G}-e$ 中较小连通分支(记作 G')的阶数取到极小。由事实 2, $\delta(G') \geq 2$ 。故 G' 不是一颗树, 即 G' 含有圈, 记作 C' 。因为反证法假设 “ $\bar{G}$ 不含偶圈”, 故 G' 为奇圈。由事实 3, $\partial_{G'}(C')$ 里的每条边都是 G' 的一座桥。因此, 存在唯一的一条边 $e' \in \partial_{G'}(C')$ 使得 C' 和 e 处于 $\bar{G}-e'$ 的不同连通分支里。任选一条边 $h \in \partial_{\bar{G}}(C') \setminus \{e'\}$ 。显然, $h \neq e$ 。而 h 的存在与 e 具有的极小性矛盾, 结论 “ $\bar{G}$ 含有偶圈或重边” 证明完毕。

因为 $\bar{G}$ 含有偶圈或重边(两条重边视为长为 2 的圈), 记作 C 。任取 C 上的一条边 h'_r , 不妨记 $h'_r \in E(C_r, C_s)$ 。我们可以选取 $\bar{G}$ 的一颗生成树 T , 使得 T 包含路 $C-h'_r$ 。选取 T 的根节点为 u_r 。记 h'_r 在 C_r 上的端点为 v 。显然, v 在 C_r 上关联两条边, 任取其中一条记作 h_r 。将 h_r 染颜色 6, 将 C_r-h_r 依路的顺序用颜色 4 和 5 交替进行染色。情况 1 讨论结束。

情况 2: 假设 $V(G) \neq V(Q)$ 。任意选取 $\bar{Q}$ 的一颗生成树 T 。此时, 注意到 Q 含有顶点(记作 v)使得 v

相邻于 $G-M$ 中某个偶圈上的顶点(记作 v')。不妨记 Q 中包含 v 的那个奇圈为 C_r , 记 $h'_r = vv'$ 。选取 T 的根节点为 u_r 。显然, v 在 C_r 上关联两条边, 任取其中一条记作 h_r 。将 h_r 染颜色 6, 将 $C_r - h_r$ 依路的顺序用颜色 4 和 5 交替进行染色。情况 2 讨论结束。

还需要对树 T 的所有非根结点的顶点 u_k 所对应的 Q 中的奇圈 C_k 进行染色。记 $d_T(u_r, u_k)$ 为 u_k 和根节点 u_r 在 T 上距离, 记 u_s 为 u_k 在 T 中的父节点, 记 h'_k 为 T 中连接 u_s 和 u_k 的那条边。任取 h'_k 在圈 C_k 上的一条邻边, 记作 h_k 。对 C_k 进行如下边染色: 若 $d_T(u_r, u_k)$ 为奇数, 则将 h_k 染颜色 6, 将 $C_k - h_k$ 依路的顺序用颜色 2 和 3 交替进行染色; 否则, 将 h_k 染颜色 6, 将 $C_k - h_k$ 依路的顺序用颜色 4 和 5 交替进行染色。

此时, 得到图 G 的一个正常 6-边染色, 记作 ϕ 。接下来将说明在染色 ϕ 下, G 有至多 $4\omega(G)$ 条非规范边, 从而完成定理的证明。

首先, $G-M$ 中所有偶圈 D 上的边均为规范边。因 D 上的边是颜色 2 和 3 交替染好, 而 $\partial(D)$ 上的边均染颜色 1, 故 D 上所有的边均为规范边, 并且均是穷的规范边。

其次, $G-M$ 中任意奇圈 C_k 含有至多 3 条非规范边。注意到边 h_k 染颜色 6。记 f_{k1} 和 f_{k2} 为 h_k 在 C_k 上的那两条邻边。因为 $\partial(C_k)$ 中的边均染颜色 1, 而 $C_k - h_k$ 上的所有边要么交替染颜色 2 和 3, 要么交替染颜色 4 和 5, 所以 $C_k - h_k - f_{k1} - f_{k2}$ 上的边均是穷的规范边。而 h_k, f_{k1}, f_{k2} 可能为非规范边。故每个 C_k 含有至多 3 条非规范边。

因此, $G-M$ 含有至多 $3\omega(G)$ 条非规范边。

最后, 讨论 M 中边的规范性。对于 $G-M$ 中任意奇圈 C_k , h'_k 为 h_k 在 M 中的一条邻边, 记 g_k 为 h_k 在 M 中剩余的那条邻边。我们称所有 h'_k 为好边, 称所有 g_k 为坏边。注意好边和坏边均为 M 中的边, 称 M 中好边和坏边以外的所有边为普通边。

普通边均为规范边。对于任意普通边 e , 无论 e 关联的是奇圈还是偶圈, e 在其任意端点处的邻边颜色要么为 2、3, 要么为 4、5。故 e 是一条规范边, 且穷的或者富的均有可能。

好边 h'_k 均是规范边。分以下两种情况进行讨论: (1) 假设 u_k (即 C_k 对应于 Q 中的顶点)是根结点。那么对于前述情况 1, h'_k 关联的是 $G-M$ 中的两个奇圈, 且这两个奇圈所对应的 Q 中顶点在 T 上距离为奇数。因此, h'_k 在其中一个端点处的两条邻边染的颜色是 2 和 3, 而在另一个端点处的邻边染的颜色是 4 和 5。因为 h'_k 本身染的颜色是 1, 故 h'_k 是富的规范边。对于前述情况 2, h'_k 关联 $G-M$ 中的一个偶圈和奇圈 C_k 。因此, h'_k 在其中一个端点处的两条邻边染颜色 2 和 3, 而在另一个端点处的邻边染颜色 4、6 或者 5、6。因为 h'_k 本身染颜色 1, 故 h'_k 是富的规范边。(2) 若 u_k 不是根结点, 则 h'_k 关联 $G-M$ 中的两个奇圈, 不妨仍设为奇圈 C_s 和 C_k , 即设 $h'_k = e_{sk}$ 。注意到 C_s 和 C_k 在 T 上的距离为 1, 故它们其中一个是用颜色 2 和 3 交替进行染色, 而另一个是用颜色 4 和 5 交替进行染色。因此, h'_k 的四条邻边的颜色均取自 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, 且互不相同。而 h'_k 本身染颜色 1, 故 h'_k 是富的规范边。

坏边可能为非规范边, 而 M 含有至多 $\omega(G)$ 条坏边。这是因为对于 $G-M$ 中的每个奇圈 C , $\partial(C)$ 含有恰好一条坏边(不同奇圈可能对应同一条坏边)。

因此, M 含有至多 $\omega(G)$ 条非规范边。

综上所述, 在染色 ϕ 下, G 含有至多 $4\omega(G)$ 条非规范边, 定理证明完毕。 ■

3. 总结与展望

本文考虑无桥三正则图的规范 6 边着色猜想, 研究正常 6-边着色下非规范边数的上界, 从而逐渐逼近猜想的解决。图的奇度 $\omega(G)$ 是研究三正则图完美匹配理论的重要参数。本文给出了仅由 $\omega(G)$ 表示的非规范边数的统一上界 $4\omega(G)$, 该上界与图的规模无关。规范 6 边着色猜想断言存在正常 6-边着色使得非规范边数为 0。因此, 后续研究可以考虑逐步改进本文所得到的上界值。另一方面, 著名的 Petersen 着

色猜想断言存在正常 5-边着色使得非规范边数为 0。因此，后续研究还可以考虑为正常 5-边着色下的非规范边数证明此上界。

基金项目

本文受浙江省自然科学基金项目资助，项目编号为 LY22A010016。

参考文献

- [1] Jaeger, F. (1988) Nowhere-Zero Flow Problem. In: Beineke, L.W. and Wilson, R.J., Eds., *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, London, 71-95.
- [2] Jaeger, F. (1985) On Five-Edge-Colorings of Cubic Graphs and Nowhere-Zero Flow Problems. *Ars Combinatoria*, **20**, 229-244.
- [3] Mazzuoccolo, G. and Mkrtchyan, V. (2019) Normal Edge-colorings of Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **94**, 75-91. <https://doi.org/10.1002/jgt.22507>
- [4] Jin, L. and Steffen, E. (2016) Petersen Cores and the Oddness of Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **84**, 109-120. <https://doi.org/10.1002/jgt.22014>
- [5] Mazzuoccolo, G. and Mkrtchyan, V. (2020) Normal 6-Edge-Colorings of Some Bridgeless Cubic Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **277**, 252-262. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.09.019>
- [6] Jin, L. and Kang, Y. (2021) Partially Normal 5-Edge-Colorings of Cubic Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **95**, Article 103327. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103327>