

7₃纽结及其镜像的着色Jones多项式的尾部

田金鹭, 李 佳, 冷旭东*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年6月21日; 录用日期: 2026年7月15日; 发布日期: 2026年7月27日

摘 要

交错纽结着色Jones多项式具有系数渐进稳定性的特性, 其零阶稳定性对应着色Jones多项式的尾部。现有研究表明, 纽结着色Jones多项式的尾部能够自然对应Rogers-Ramanujan恒等式、伪theta函数等经典组合恒等式。本文以7₃纽结及其镜像为例, 通过Temperley-Lieb代数中的气泡展开公式(bubble expansion formula)直接计算出着色Jones多项式的尾部, 进而利用数论技巧证明该结果与Garoufalidis等人的猜想表达式一致。

关键词

着色Jones多项式, 尾部, q -级数, Temperley-Lieb代数

The Tails of the Colored Jones Polynomials for 7₃ Knot and Its Mirror Image

Jinlu Tian, Jia Li, Xudong Leng*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: June 21, 2026; accepted: July 15, 2026; published: July 27, 2026

Abstract

The colored Jones polynomial of an alternating knot exhibits the property of coefficient asymptotic stability, where zero-order stability corresponds to the tail of the colored Jones polynomial. Existing research indicates that the tail of the colored Jones polynomial for knots naturally corresponds to classical number theoretic identities such as the Rogers-Ramanujan identities and false theta functions. This paper takes 7₃ knots and its mirror image as examples, directly computes the tail of the colored Jones polynomial using the bubble expansion formula from the Temperley-Lieb algebra, and then employs number-theoretic techniques to prove that this result is consistent with the conjectured

*通讯作者。

文章引用: 田金鹭, 李佳, 冷旭东. 7₃纽结及其镜像的着色 Jones 多项式的尾部[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 229-240.
DOI: 10.12677/aam.2026.157318

expression by Garoufalidis *et al.*

Keywords

Colored Jones Polynomial, Tail, q -Series, Temperley-Lieb Algebra

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

着色 Jones 多项式是一种链环不变量, 对于纽结来说, 其生成一系列单变量整系数洛朗多项式。Dasbach 和林晓松[1]最早观察到对交错链环 K , 当 n 足够大时, 着色 Jones 多项式的前三项系数和后三项系数在相差一个公共符号的意义下与 n 无关; 并提出猜想: 对任意交错链环 K 和任意 n , 着色 Jones 多项式 $J_{n,K}$ 的前 n 项系数会趋于稳定, 并由此引出了“头”和“尾”的概念。2011 年, Armond [2]完成了[1]猜想中关于所有恰当链环的证明, 并利用链环图, 提出计算各类纽结与链环头部和尾部的算法, 同时与 Dasbach [3]系统研究了交错链环着色 Jones 多项式的“头”和“尾”, 证明它们仅依赖于纽结图的约化棋盘图, 并可推导出丰富的组合恒等式。

同年, Garoufalidis 和 Lê [4]也用不同的方法独立证明[1]中关于交错链环的猜想, 且得到交错纽结存在更高阶稳定性的结果。除此之外, Garoufalidis 和 Lê 还提出猜想: 对于每个交叉数为 8 以下的交错纽结, 其着色 Jones 多项式的尾部 $\Phi_K(q)$ 都对应一项 q -级数恒等式, 为其数论意义提供新的视角。Garoufalidis 与 Vuong [5]系统研究交错链环着色 Jones 多项式对应的 q -级数, 提出了处理由交错链环的约化 Tait 图导出的级数的高效算法。Keihthy 与 Osburn [6]着重强调了 q -级数技术在证明纽结理论中出现的恒等式的作用, 证明了[4]中关于交错纽结的 Rogers-Ramanujan 恒等式猜想, 直接建立了拓扑与经典数论恒等式的桥梁。

Hajij [7]将着色 Jones 多项式尾的概念推广到量子自旋网络的尾, 利用局部 Skein 关系计算三价图的尾, 并由此导出两变量 Ramanujan theta 函数的 Andrews-Gordon 恒等式及伪 theta 函数的对应恒等式。并与 Elhamdadi [8]将理论推广到奇异纽结, 给出了计算奇异纽结着色 Jones 多项式的算法, 并利用其尾的稳定性性质证明了新的伪 theta 函数恒等式。除此之外, Hajij [9]关注 Temperley-Lieb 代数中一种形似气泡的元素, 建立气泡展开公式(bubble expansion formula), 借助该公式简化着色 Jones 多项式头尾的计算。

在上述研究背景下, 本文运用与[4]和[6]不同的算法, 选取典型交错纽结 7_3 及其镜像, 通过气泡展开公式(bubble expansion formula)直接计算其着色 Jones 多项式的尾部, 得到具体的多项式后, 从数论角度出发, 利用相关恒等式验证 Garoufalidis 和 Lê [4]猜想中的一项结果。

2. 预备知识

2.1. Temperley-Lieb 代数

定义 2.1 [10]: Temperley-Lieb 代数 T_n 是 $\tilde{\mathbb{Z}}[A, A^{-1}]$ 上的自由加法代数($\tilde{\mathbb{Z}}[A, A^{-1}]$ 表示 Laurent 多项式环的分式域, 即 $\tilde{\mathbb{Z}}[A, A^{-1}] = \left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}], Q \neq 0 \right\}$), 由基本缠结 $U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \in T_n$ 构成, 其中 T_n 代表 n 股缠结构成的 Temperley-Lieb 代数, 即每个 U_i 是含 n 根输入线、 n 根输出线的缠结。在 U_i 中: 当

$k \neq i, i+1$ 时, 第 k 根输入线连接第 k 根输出线; 第 i 根输入线连接第 $i+1$ 根输入线; 第 i 根输出线连接第 $i+1$ 根输出线。

以 T_4 为例, 见图 1。



Figure 1. The elementary tangles of T_4

图 1. T_4 中的基本缠结

性质 2.2 [9]: T_n 的生成元是 $1_n, U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \in T_n$ 的乘积, 并满足以下关系:

(1) $U_i^2 = dU_i$, 其中 d 指闭环的值。

(2) $U_i U_{i+1} U_i = U_i$ 。

(3) $U_i U_j = U_j U_i, |i-j| > 1$ 。

定义 2.3 [2]: Temperley-Lieb 代数中有一个对着色 Jones 多项式至关重要的特殊元素, 称为 Jones-Wenzl 幂等元, 记为 $f^{(n)}$, 其图示为一个空方框, 两侧各延伸出条线, 给定图中线旁标注, 表示将该链线

替换成条平行线, 即可表示为 $f^{(n)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array}$ 。

性质 2.4 [2]: Jones-Wenzl 幂等元具有以下性质:

$$(1) \begin{array}{c} n+1 \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \left| - \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \right) \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array}$$

$$\text{其中 } \Delta_n = (-1)^n \frac{A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)}}{A^2 - A^{-2}}。$$

$$(2) \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array},$$

$$(4) \begin{array}{c} n \quad m \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = 0,$$

$$(6) \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \quad (\text{幂等性}),$$

$$(3) \begin{array}{c} n \quad k \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} n+k \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array}。$$

$$(5) \begin{array}{c} m \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \frac{\Delta_{m+n}}{\Delta_n} \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array}。$$

$$(7) \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \Delta_n。$$

引理 2.5 [9] 气泡展开公式(bubble expansion formula): 让 $m, n, m', n' \geq 0$, 且 $k \geq l$; $k, l \geq 1$, 那么有

$$R_{m,n} R_{m',n'} = \sum_{i=0}^{\min(m,n,l)} \begin{bmatrix} m & n \\ k & l \end{bmatrix}_i R_{m,n,i} R_{m',n',i} ,$$

其中 $\begin{bmatrix} m & n \\ k & l \end{bmatrix}_i = (-A^2)^{i(i-1)} \frac{\prod_{j=0}^{l-i-1} \Delta_{k-j-1} \prod_{s=0}^{i-1} \Delta_{n-s-1} \Delta_{m-s-1}}{\prod_{t=0}^{l-1} \Delta_{n+k-t-1} \Delta_{m+k-t-1}} \begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}_{A^4} \times \prod_{j=0}^{l-i-1} \Delta_{m+n+k-i-j} .$

2.2. 着色 Jones 多项式及其尾部

定义 2.6 [9]: 设 L 是 S^3 中框架链环, 对 L 的每个分支, 用 n 次 Jones-Wenzl 幂等元按框架标记, 标记后的框架链环视作 $S(S^3)$ 中的元素。不计依赖 L 标架的 $\pm A$ 幂次因子, 该元素的值即为未约化着色 Jones 多项式 $\tilde{J}_{n,L}(A)$ 。下文始终约定 $A^4 = q$ 。将未约化的着色 Jones 多项式 $\tilde{J}_{n,L}(A)$ 除以其在无结组结上的值 Δ_n , 即为约化的着色 Jones 多项式。因此

$$J_{n+1,L}(q) = \frac{\tilde{J}_{n,L}(A)}{\Delta_n} \Big|_{A=q^{\frac{1}{4}}} \circ$$

定义 2.7 [2]: 对于两个洛朗级数 $P_1(q)$ 和 $P_2(q)$, 若将 $P_1(q)$ 乘以 $\pm q^{s_1}$, $P_2(q)$ 乘以 $\pm q^{s_2}$, s_1 和 s_2 为某个幂次, 使得得到的幂级数 $P'_1(q)$ 和 $P'_2(q)$ 均具有正的常数项, 且二者模 q^n 相等, 则定义

$$P_1(q) \doteq_n P_2(q) \circ$$

上述定义也可表述为: $P_1(q) \doteq_n P_2(q)$ 当且仅当二者的前 n 项系数在不记符号时相等。

定义 2.8 [2]: 若链环 L 的着色 Jones 多项式尾项存在, 则其尾项 $T_L(q)$ 对所有 N 满足: $T_L(q) \doteq_N J_{L,N}(q)$ 。类似地, L 的着色 Jones 多项式的首项 $H_L(q)$ 为 $J_{N,L}(q^{-1})$ 的尾项, 也等于 L 的镜像链环的着色 Jones 多项式。且着色 Jones 多项式的尾部即为[4]中的零阶稳定极限 $\Phi_K(q)$ 。

对于链环图 D 的每个交叉点, 都有两种光滑方式: A 平滑和 B 平滑(见图 2)。



Figure 2. A and B smoothings
图 2. A 平滑和 B 平滑

定义 2.9 [2]: 图的状态是指对图中的每个交叉点选取一种平滑方式的结果。

在研究着色 Jones 多项式时, 有两种状态尤为重要: 全 A 状态 S_A 与全 B 状态 S_B 。 S_A (S_B) 是指对所有交叉点均选取 A (B) 平滑的状态。用虚线表示被平滑的每个交叉点的区域, 得到对应的状态图 $S_A(D)$ 或 $S_B(D)$ 。

基于上述准备, 对链环图 D 做如下操作: 在 $S_B(D)$ 中的每个圈上作用第 n 阶 Jones-Wenzl 幂等元,

同时用 $2n$ 次投影算子代替图中的虚线, 得到 $S_B^{(n)}(D)$ 。

引理 2.10 [2]: 对恰当链环 L , $\tilde{J}_{n,L}(A) \doteq_{4(n+1)} S_B^{(n)}(D)$ 。

因此, 在计算恰当链环 L 的着色 Jones 多项式时, 可将其转化为研究 $S_B^{(n)}(D)$ 的问题, 即

$$J_{n+1,L}(q) \doteq_n \frac{S_B^{(n)}(D)}{\Delta_n} \Big|_{A=q^{\frac{1}{4}}}。$$

由 $S_B^{(n)}(D)$ 定义容易看到, bubble 结构作为特殊元素总会出现, 本文利用气泡展开公式(bubble expansion formula)大大简化了计算过程。

2.3. 数论基础: q -级数, Theta 函数与相关恒等式

本节给出广义 Ramanujan theta 函数与伪 theta 函数的定义, 并列举部分关键性质。

定义 2.11 [7]:

(1) q -Pochhammer 符号:

$$(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j)。$$

(2) q -二项式系数:

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_i (q; q)_{n-i}}。$$

(3) 二元广义 Ramanujan theta 函数:

$$f(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i+1)}{2}} b^{\frac{i(i-1)}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a^{\frac{i(i-1)}{2}} b^{\frac{i(i+1)}{2}},$$

对其进行特殊赋值, 得到

$$f(-q^{2k}, -q) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q^{k(i^2+i)} q^{\frac{i(i-1)}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i q^{k(i^2-i)} b^{\frac{i(i+1)}{2}}。$$

(4) 二元广义 Ramanujan false theta 函数:

$$\Psi(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i+1)}{2}} b^{\frac{i(i-1)}{2}} - \sum_{i=1}^{\infty} a^{\frac{i(i-1)}{2}} b^{\frac{i(i+1)}{2}}。$$

性质 2.12 著名相关恒等式:

(1) Ramanujan theta 函数的 Andrews-Gordon 恒等式[7]:

$$f(-q^{2k}, -q) = (q, q)_{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{l_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{\sum_{j=1}^{k-1} (i_j(i_j+1))}}{\prod_{j=1}^{k-1} (q; q)_{l_j}},$$

其中 $i_j = \sum_{s=j}^{k-1} l_s$, 该恒等式是第二类 Rogers-Ramanujan 恒等式的推广。

特例为

$$f(-q^4, -q) = (q; q)_{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^{i^2+i}}{(q; q)_i}。$$

(2) 二元广义 Ramanujan theta 函数对应的恒等式[3]:

$$\begin{aligned}\Psi(q^3, q) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k^2+k}{2}} \\ &= (q; q)_{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q; q)_k^2} \circ \\ &= (q; q)_{\infty}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{(q; q)_k^2}.\end{aligned}$$

(3) 经典 Rogers-Ramanujan 恒等式[6]:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+sn}}{(q)_n} = \frac{1}{(q^{1+s}; q^5)_{\infty} (q^{4-s}; q^5)_{\infty}},$$

其中 $s=0$ 或 1 。

(4) Jacobi 三重积[6]:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{n^2} = (-zq; q^2)_{\infty} \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_{\infty} (q^2; q^2)_{\infty}.$$

下列引理建立了气泡元素与 Ramanujan theta 函数与伪 theta 函数的对应关系。

引理 2.13 [7]:

$$\begin{aligned}(1) \quad & \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_i \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i}} \doteq_n \Psi(q^3; q). \\ (2) \quad & \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} n & i \\ n & n \end{bmatrix}_0 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i}} \doteq_n (q; q)_n \sum_{i=0}^n \frac{q^{i^2+i}}{(q; q)_i} \doteq_n f(-q^4, -q).\end{aligned}$$

Garoufalidis 与 Lê [4]推测了 21 个纽结的 $\Phi_K(q)$ 和 22 个纽结的 $\Phi_{-K}(q)$ 用模形式和伪 theta 函数表示的求值, 指出每一个这样的猜想都是一项 q -级数恒等式, 并由此规定了以下记号:

$$h_b = h_b(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_b(n) q^{\frac{bn(n+1)}{2} - n},$$

其中

$$\varepsilon_b(n) = \begin{cases} (-1)^n, & b \text{ 是奇数,} \\ 1, & b \text{ 是偶数且 } n \geq 0, \\ -1, & b \text{ 是偶数且 } n < 0. \end{cases}$$

$$h_1(q) = 0, \quad h_2(q) = 1, \quad h_3(q) = (q)_{\infty}.$$

特别地, 本文关注的 7_3 、 7_3^* 纽结对应的猜想为 $\Phi_{7_3}(q) = h_5$, $\Phi_{7_3^*}(q) = h_4$ 。

3. 7_3 纽结及其镜像的着色 Jones 多项式的尾部

3.1. 计算 7_3 纽结着色 Jones 多项式的尾部

7_3 纽结的投影图及对应的全 B 平滑状态图 $S_B(D)$ 、 $S_B^{(n)}(D)$ 如图 3。

由性质 2.4 (6), Jones-Wenzl 幂等元具有幂等性, $S_B^{(n)}(D)$ 可简化为图 4 的形式。

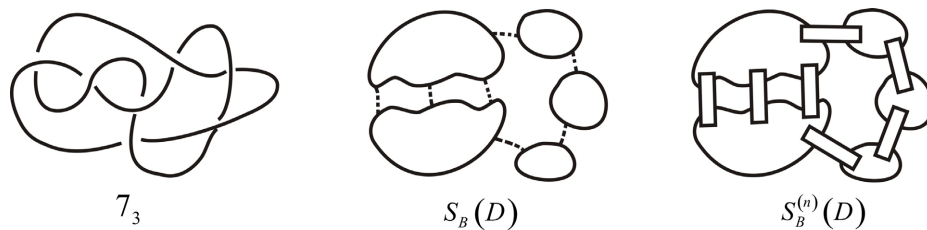


Figure 3. The diagram, $S_B(D)$ and $S_B^{(n)}(D)$ of 7_3

图 3. 7_3 纽结的投影图、 $S_B(D)$ 、 $S_B^{(n)}(D)$

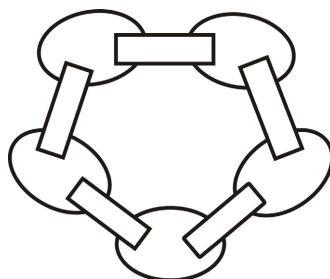


Figure 4. Reduced $S_B^{(n)}(D)$ of 7_3

图 4. 7_3 化简后的 $S_B^{(n)}(D)$

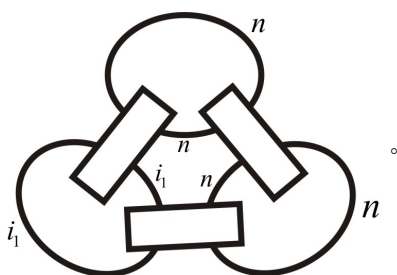
下面应用引理 2.5 计算化简后的 $S_B^{(n)}(D)$ ：

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array}$$

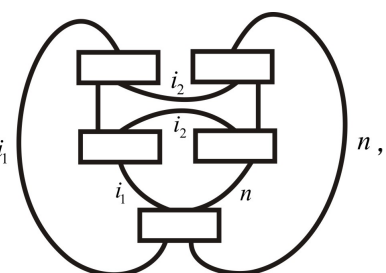
由性质 2.4 (3)，可得

$$\begin{aligned}
 S_B^{(n)}(D) &= \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \\
 &= \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array},
 \end{aligned}$$

由性质 2.4(5), 可得

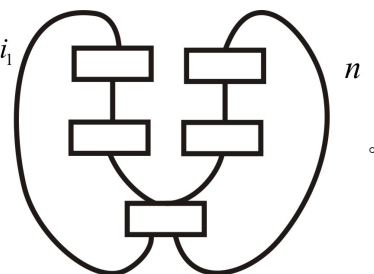
$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 \quad \text{。}$$


再次应用引理 2.5,

$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} i_1 & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_2} \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 i_1 \quad \text{,}$$


若 $i_2 \neq 0$, 则图中存在回转,

由性质 2.4 (4)可知, $S_B^{(n)}(D) = 0$, 故 $i_2 = 0$,

$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} i_1 & n \\ n & n \end{bmatrix}_0 \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 \quad \text{。}$$


应用性质 2.4 (6) (7),

$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} i_1 & n \\ n & n \end{bmatrix}_0 \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 \Delta_{n+i_1},$$

由于 $\begin{bmatrix} m & n \\ k & l \end{bmatrix}_i$ 公式中 m 、 n 具有对称性, 所以

$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} n & i_1 \\ n & n \end{bmatrix}_0 \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 \Delta_{n+i_1} \quad \text{。}$$

由于 $\tilde{J}_{n,7_3}(A) \doteq_{4(n+1)} S_B(D)$,

可得 $\tilde{J}_{n,7_3}(A) \doteq_{4(n+1)} \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} n & i_1 \\ n & n \end{bmatrix}_0 \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 \Delta_{n+i_1}$ 。

又因 $J_{n+1,7_3}(q) \doteq_n \frac{\tilde{J}_{n,7_3}(A)}{\Delta_n} \Big|_{A=q^{\frac{1}{4}}}$,

所以

$$\begin{aligned}
 J_{n+1,7_3}(q) &\doteq_n \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} n & i_1 \\ n & n \end{bmatrix}_0 \left(\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \right)^2 \frac{\Delta_{n+i_1}}{\Delta_n} \\
 &\doteq_n \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \begin{bmatrix} n & i_1 \\ n & n \end{bmatrix}_0 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n}.
 \end{aligned}$$

由引理 2.13 (2)可知

$$J_{n+1,7_3}(q) \doteq_n f(-q^4, -q) \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n}.$$

由于 $\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \doteq_n 1$,

所以

$$J_{n+1,7_3}(q) \doteq_n f(-q^4, -q).$$

应用性质 2.12 (2),

$$J_{n+1,7_3}(q) \doteq_n (q; q)_n \sum_{i=0}^n \frac{q^{i^2+i}}{(q)_i},$$

由性质 2.12 (3), 得到

$$J_{n+1,7_3}(q) \doteq_n (q; q)_n \frac{1}{(q^2; q^5)_\infty (q^3; q^5)_\infty}.$$

由 q -Pochhammer 定义易知,

$$(q; q^5)_\infty (q^2; q^5)_\infty (q^3; q^5)_\infty (q^4; q^5)_\infty (q^5; q^5)_\infty = (q; q)_\infty,$$

故

$$\begin{aligned}
 J_{n+1,7_3}(q) &\doteq_n (q; q)_n \frac{(q; q^5)_\infty (q^4; q^5)_\infty (q^5; q^5)_\infty}{(q; q)_\infty} \\
 &= \frac{(q; q)_n \left(-\frac{q^{\frac{5}{2}}}{-q^{\frac{3}{2}}}; \left(q^{\frac{5}{2}} \right)^2 \right)_\infty \left(-\left(-q^{\frac{3}{2}} \right) \cdot q^{\frac{5}{2}}; \left(q^{\frac{5}{2}} \right)^2 \right)_\infty \left(\left(q^{\frac{5}{2}} \right)^2; \left(q^{\frac{5}{2}} \right)^2 \right)_\infty}{(q; q)_\infty}.
 \end{aligned}$$

最后运用性质 2.12 (4), 令 $q \rightarrow q^{\frac{5}{2}}$, $z = -q^{\frac{3}{2}}$,

$$\begin{aligned}
 J_{n+1,7_3}(q) &\doteq_n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-q^{\frac{3}{2}} \right)^n \left(q^{\frac{5}{2}} \right)^{n^2} \\
 &= \frac{(q; q)_n}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} \\
 &= \frac{(q; q)_n}{(q; q)_\infty} h_5 \\
 &\doteq_n h_5.
 \end{aligned}$$

3.2. 计算 7_3^* 纽结着色 Jones 多项式的尾部

7_3^* 纽结的投影图及对应的全 B 平滑状态图 $S_B(D)$ 、 $S_B^{(n)}(D)$ 如图 5。

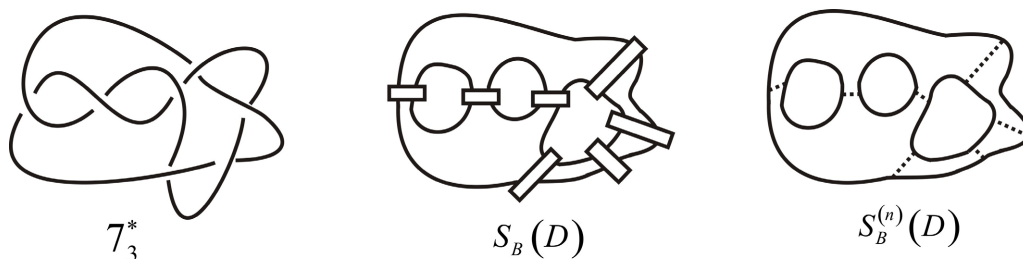


Figure 5. The diagram, $S_B(D)$ and $S_B^{(n)}(D)$ of 7_3^*

图 5. 7_3^* 纽结的投影图、 $S_B(D)$ 、 $S_B^{(n)}(D)$

由性质 2.4 (6), Jones-Wenzl 幂等元具有幂等性, $S_B^{(n)}(D)$ 可化简为图 6 的形式。

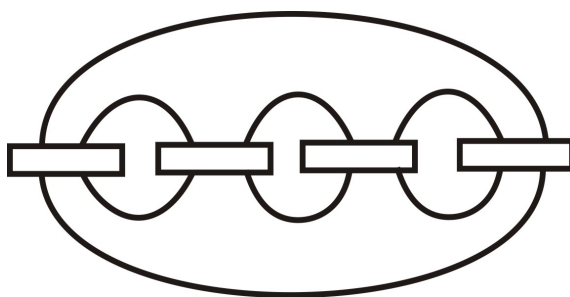


Figure 6. Reduced $S_B^{(n)}(D)$ of 7_3^*

图 6. 7_3^* 的化简后的 $S_B^{(n)}(D)$

下面应用引理 2.5 计算化简后的 $S_B^{(n)}(D)$ ：

$$\text{Diagram 1} = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \text{Diagram 2},$$

连续应用性质 2.4 (3), 可得

$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \text{Diagram 3}$$

$$= \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \text{Diagram} \circ$$

依次应用性质 2.4 (5) (3) (7), 可得

$$S_B^{(n)}(D) = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \text{Diagram} \\ = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \text{Diagram} \\ = \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \Delta_{2n} \circ$$

由于 $\tilde{J}_{n,7_3^*}(A) \doteq_{4(n+1)} S_B(D)$,

可得

$$\tilde{J}_{n,7_3^*}(A) \doteq_{4(n+1)} \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \Delta_{2n} \circ$$

又因 $J_{n+1,7_3^*}(q) \doteq_n \frac{\tilde{J}_{n,7_3^*}(A)}{\Delta_n} \Big|_{A=q^{\frac{1}{4}}}$,

所以

$$J_{n+1,7_3^*}(q) \doteq_n \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \circ$$

由于 $\frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \doteq_n 1$,

$$J_{n+1,7_3^*}(q) \doteq_n \sum_{i_1=0}^n \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}_{i_1} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{n+i_1}},$$

由引理 2.13 (1), 可得

$$J_{n+1,7_3^*}(q) \doteq_n \Psi(q^3, q),$$

应用性质 2.12 (2),

$$J_{n+1,7_3^*}(q) \doteq_n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k^2+k}{2}}.$$

接下来将关于 k 的求和式分为奇偶两部分, 即令 $k = 2n$, $k = 2n+1$,

$$\begin{aligned} J_{n+1,7_3^*}(q) &\doteq_n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} q^{\frac{(2n)^2+2n}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} q^{\frac{(2n+1)^2+2n+1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n^2+n} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n^2+3n+1}, \end{aligned}$$

在第二个求和式中令 $n \rightarrow -n-1$, 得到

$$\begin{aligned} J_{n+1,7_3^*}(q) &\doteq_n \sum_{n \geq 0} q^{2n^2+n} - \sum_{n < 0} q^{2(-n-1)^2+3(-n-1)+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} q^{2n^2+n} - \sum_{n < 0} q^{2n^2+n} \\ &= h_4. \end{aligned}$$

4. 结论

本文应用气泡展开公式(bubble expansion formula)和 Jones-Wenzl 幂等元的性质, 计算了 7_3 纽结及其镜像的着色 Jones 多项式的尾部, 对该结果应用数论中的相关恒等式, 证明结果均与猜想一致:

$J_{n+1,7_3}(q) \doteq_n h_5$, $J_{n+1,7_3^*}(q) \doteq_n h_4$ 。本文的分析方法具有一定的通用性, 为尾部的计算提供了一种新方法。基于该研究思路, 可尝试将该其拓展至 Garoufalidis 和 Lê 猜想中其余纽结尾部的验证过程中。

基金项目

国家自然科学基金项目(12001255)。

参考文献

- [1] Dasbach, O.T. and Lin, X. S. (2006) On the Head and the Tail of the Colored Jones Polynomial. *Compositio Mathematica*, **142**, 1332-1342. <https://doi.org/10.1112/s0010437x06002296>
- [2] Armond, C. (2013) The Head and Tail Conjecture for Alternating Knots. *Algebraic & Geometric Topology*, **13**, 2809-2826. <https://doi.org/10.2140/agt.2013.13.2809>
- [3] Armond, C. and Dasbach, O.T. (2011) Rogers-Ramanujan Type Identities and the Head and Tail of the Colored Jones Polynomial. arXiv: 1106.3948.
- [4] Garoufalidis, S. and Lê, T.T. (2015) Nahm Sums, Stability and the Colored Jones Polynomial. *Research in the Mathematical Sciences*, **2**, Article No. 1. <https://doi.org/10.1186/2197-9847-2-1>
- [5] Garoufalidis, S. and Vuong, T. (2014) Alternating Knots, Planar Graphs, and q -Series. *The Ramanujan Journal*, **36**, 501-527. <https://doi.org/10.1007/s11139-014-9592-5>
- [6] Keilthy, A. and Osburn, R. (2016) Rogers-Ramanujan Type Identities for Alternating Knots. *Journal of Number Theory*, **161**, 255-280. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2015.02.002>
- [7] Hajij, M. (2015) The Tail of a Quantum Spin Network. *The Ramanujan Journal*, **40**, 135-176. <https://doi.org/10.1007/s11139-015-9705-9>
- [8] Elhamdadi, M. and Hajij, M. (2018) Foundations of the Colored Jones Polynomial of Singular Knots. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **55**, 937-956.
- [9] Hajij, M. (2014) The Bubble Skein Element and Applications. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **23**, Article 1450076. <https://doi.org/10.1142/s021821651450076x>
- [10] Kauffman, L.H. and Lins, S.L. (1994) Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400882533>