

二阶齐次线性递推数列两种解法的几何统一性探究

冯靖骁, 刘玉霞

国防科技大学外国语学院, 江苏 南京

收稿日期: 2026年7月18日; 录用日期: 2026年8月11日; 发布日期: 2026年8月21日

摘要

本文构造投影映射 π , 将相空间向量映射为分量比形式的射影坐标, 证明了友矩阵特征向量的投影即为不动点, 从几何视角统一了二阶齐次线性递推数列的两类经典解法: 不动点法与线性代数法。两种方法的对角化过程在该映射下高度对应, 并针对特征值重根情形, 明确两种方法分别对应若尔当标准型与等差数列结构, 完善了理论框架, 同时借助兰彻斯特方程给出了解释, 为大学数学的学习和研究提供理论参考。

关键词

不动点法, 线性代数, 对角化, 莫比乌斯变换, 射影坐标

Exploration of the Geometric Unity of Two Solution Methods for Second-Order Homogeneous Linear Recursive Sequences

Jingxiao Feng, Yuxia Liu

College of International Studies, National University of Defense Technology, Nanjing Jiangsu

Received: July 18, 2026; accepted: August 11, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

This paper constructs a mapping π that projects phase space vectors to projective coordinates in the form of component ratios. It proves that the projection of eigenvectors of the companion matrix corresponds to fixed points, unifying the fixed-point method and linear algebra method for second-order homogeneous linear recursive sequences from a geometric perspective. Their diagonalization processes correspond highly under this mapping. For repeated eigenvalues, the two methods correspond

to the Jordan canonical form and arithmetic progression structure, completing the theory. An explanation using the Lanchester equation is also given, providing a theoretical reference for advanced mathematics learning and research.

Keywords

Fixed-Point Method, Linear Algebra, Diagonalization, Möbius Transformation, Projective Coordinates

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于二阶线性递推数列

$$A_n = pA_{n-1} + qA_{n-2} \quad (q \neq 0, n \geq 2), \quad A_0 = a, A_1 = b,$$

常见的求解方法有待定系数法、不动点法与线性代数法, 其中不动点法被看作一个重要的代数方法, 而线性代数法以矩阵的角度来进行求解, 这两种方法尽管形式不同, 但都是基于线性递归特征方程的求解, 本质上等价。

2. 不动点法: 射影直线上的视角

定义比值数列 $B_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$ (假定 $A_{n-1} \neq 0$), 则原递推化为

$$B_n = p + \frac{q}{B_{n-1}} = \frac{pB_{n-1} + q}{B_{n-1}} =: f(B_{n-1})$$

这是一个定义在扩充复平面上的莫比乌斯变换(文献[1]), 对于莫比乌斯变换我们先求解其不动点方程 $f(x) = x$ 得

$$x^2 - px - q = 0$$

两根记为 x_1, x_2 , 在复平面上, 它们相当于一个支点, 无论如何变换位置都不变。

2.1. 相异不动点情形

对于两个相异不动点, 我们考虑以两个不动点为基点的射影坐标变换(文献[2]):

$$\varphi(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2}$$

对于这个变换, 本质上是进行了一次坐标系的变换, 其底层逻辑是较复杂的莫比乌斯变换 f 。不动点法的简化手段是共轭(conjugacy, 见文献[3]): 构造变换 φ 使得 $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 成为简单伸缩。这里 φ 通过选取射影坐标变换实现, 见文献[2]。为了简化运算, 我们建立一个新的坐标系, 要求新的莫比乌斯变换只有伸缩等简单的变换。对于一般的莫比乌斯变换 $g(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, 若它的不动点 $x_1 = 0, x_2 = \infty$, 可得 $g(0) = 0$,

$g(\infty) = \infty$, 进而我们得到 $\beta = 0, \gamma = 0$ (因为当 $w \rightarrow \infty$ 时, $g(w) \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$, 要使其为 ∞ , 必须 $\gamma = 0$ 且 $\alpha \neq 0$),

那么 $g(w) = \lambda\omega$, 而 φ 将不动点 x_1 映为 0, 将 x_2 映为 ∞ 。在新的坐标系下 f 的表现形式为 $g(w) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w)$, 此时 $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$, 由上知 $g(w) = \lambda\omega$, 另 $\omega = \varphi(z)$, 我们可得 $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$, 这样一个复杂的莫比乌斯变换 f 就转换为一个简单的乘法, 也就是将变换在复平面上转化为简单的伸缩变换。

令 $C_n = \varphi(B_n)$, 则

$$C_n = \lambda C_{n-1}$$

即 $\{C_n\}$ 为等比数列, 接下来求出具体的公比。

由 $B_n = f(B_{n-1})$ 和不动点性质 $f(x_i) = x_i$, 有

$$B_n - x_i = \frac{pB_{n-1} + q}{B_{n-1}} - x_i = \frac{(p - x_i)B_{n-1} + q}{B_{n-1}}$$

利用 $x_i^2 = px_i + q$ 可得 $q = x_i^2 - px_i$, 代入分子:

$$(p - x_i)B_{n-1} + x_i^2 - px_i = (p - x_i)(B_{n-1} - x_i)$$

因此

$$B_n - x_i = \frac{(p - x_i)(B_{n-1} - x_i)}{B_{n-1}}$$

对 $i=1, 2$ 写出两式, 并作比运算

$$\frac{B_n - x_1}{B_n - x_2} = \frac{p - x_1}{p - x_2} \cdot \frac{B_{n-1} - x_1}{B_{n-1} - x_2}$$

由韦达定理, $p - x_1 = x_2$, $p - x_2 = x_1$, 因此

$$\frac{B_n - x_1}{B_n - x_2} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{B_{n-1} - x_1}{B_{n-1} - x_2}$$

即

$$C_n = \frac{x_2}{x_1} C_{n-1}$$

所以等比数列 $\{C_n\}$ 的公比为 $\frac{x_2}{x_1}$, 首项

$$C_1 = \frac{B_1 - x_1}{B_1 - x_2} = \frac{\frac{b}{a} - x_1}{\frac{b}{a} - x_2}$$

于是

$$C_n = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n-1} C_1$$

通过 C_n 反解出 B_n

$$C_n = \frac{B_n - x_1}{B_n - x_2} \Rightarrow B_n = \frac{x_1 C_n - x_2}{C_n - 1}$$

最后通过累乘求出 A_n

$$A_n = A_0 \prod_{k=1}^n B_k = a \prod_{k=1}^n \frac{x_1 C_k - x_2}{C_k - 1}$$

最后算得

$$A_n = \frac{(b - a\lambda_2)\lambda_1^n - (b - a\lambda_1)\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

2.2. 相同不动点情形

设重根: $x_1 = x_2 = x$, 上述构造则失效, 此时改用倒数坐标: $p = 2x$, $q = -x^2$, 分式递推为

$$B_n = \frac{2xB_{n-1} - x^2}{B_{n-1}}$$

构造倒数坐标:

$$D_n = \frac{1}{B_n - x}$$

计算 $B_n - x$:

$$B_n - x = \frac{x(B_{n-1} - x)}{B_{n-1}}$$

取倒数:

$$\frac{1}{B_n - x} = \frac{B_{n-1}}{x(B_{n-1} - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{B_{n-1} - x}$$

即

$$D_n = D_{n-1} + \frac{1}{x}$$

所以 $\{D_n\}$ 是等差数列, 公差 $\frac{1}{x}$, 首项

$$D_1 = \frac{1}{B_1 - x} = \frac{1}{\frac{b}{a} - x}$$

于是

$$D_n = D_1 + (n-1)\frac{1}{x}$$

反解得

$$B_n = x + \frac{1}{D_n}$$

再通过累乘, 得

$$A_n = ax^n + (b - ax)nx^{n-1}$$

此时没法对角化, 新变量成等差数列, 对应线性代数的若当标准形(Jordan canonical form, 见文献[4])。

3. 线性代数法: 二维相空间的视角

该二阶递推的友矩阵(companion matrix, 见文献[5])为

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则递推写成向量的形式:

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{pmatrix} = M \mathbf{v}_{n-1}$$

向量 $\mathbf{v}_n$ 在二维实平面上, 这个平面称为相空间。

M 的特征值 λ_1, λ_2 满足 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$, 对应的特征向量为

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对 M 进行对角化, 见文献[5]

$$M = P \Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

对角化的过程本质是通过基变换, 将复杂的线性变换分解为沿特征方向的伸缩, 简化迭代过程, 于是

$$M^n = P \Lambda^n P^{-1}$$

$$\mathbf{v}_n = P \Lambda^{n-1} P^{-1} \mathbf{v}_1$$

最后求得

$$A_n = \frac{(b - a\lambda_2)\lambda_1^n - (b - a\lambda_1)\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 此时 $p^2 + 4q = 0$, $\lambda = p/2$, 矩阵 M 不可对角化, 存在可逆矩阵 P 使得

$$M = PJP^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

若当块的幂为

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

代入 $\mathbf{v}_n = P J^n P^{-1} \mathbf{v}_0$, 计算可得 $A_n = a\lambda^n + (b - a\lambda)n\lambda^{n-1}$ 。

4. 两种方法的联系: 一个统一的几何图景

两种方法的深层联系可通过一个关键的投影映射 π 来阐明。

定义映射 $\pi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 为

$$\pi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0), \quad \pi\left(\frac{x}{0}\right) = \infty$$

换言之, π 将一个非零向量映射为其两个分量的比值。

其中 $\mathbb{RP}^1$ 为实射影直线(real projective line), 即欧氏直线上添加一个无穷远点 ∞ , 其上的点可用齐次坐标 $[u:v]$ 表示, 非齐次坐标 $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$) 对应有限点, ∞ 对应 $v=0$, 见文献[2]。

4.1. 核心元素的对应

线性代数的核心几何对象是特征向量 u_1, u_2 , 在相平面上, 它代表一条固定直线, 方向永恒不变。

不动点法的核心几何对象是不动点, 在射影直线上它代表一个不动的点, 特征向量经过投影映射 π 后, 就变成了射影直线上的不动点, 特征方向就是投影后的不动点。这正是为什么两种方法会解出同一个方程 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ 的根本原因。

4.2. 简化操作的对应

线性代数的简化手段是对角化 $P^{-1}AP = \Lambda$, 它通过选取特征向量作为新基, 将变化简化为伸缩。不动点法的简化手段是共轭(conjugacy, 见文献[3]) $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, 它通过选取射影坐标变化 $\varphi(z) = \frac{z-x_1}{z-x_2}$ 见

文献[2], 将原变化简化为一个伸缩变化, 这里函数 φ 的作用与 P 完全对应, 二者都是定义了一个新的坐标系, 在新的坐标系下, 原本复杂的变化被简化为单纯的伸缩变化。

4.3. 两种方法信息内容的对比

线性代数视角: 保留了所有信息, 我们不仅知道方向, 还知道长度, 知道了全部信息。

不动点法视角: 只抓住核心特征特征值的比, 丢弃了长度信息, 只专注于方向。

4.4. 几何动力学解释与渐进行为的统一

两种方法描述了同一个动力系统的演化见文献[3], 只是观察的角度不同。

相空间中的动力学: 在二维平面, v_n 沿两个方向伸缩, 迭代的长期行为由特征值的模长决定。

当 $\lambda_1 > \lambda_2$ 时, 随着 n 的增大, v_n 的方向越来越靠近 u_1 , 此时 u_1 为优势特征方向。

当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时, 随着 n 的增大, v_n 的方向越来越靠近 u_2 , 此时 u_2 为优势特征方向。

如图 1 为 $p=1, q=2$ 时的迭代情形。

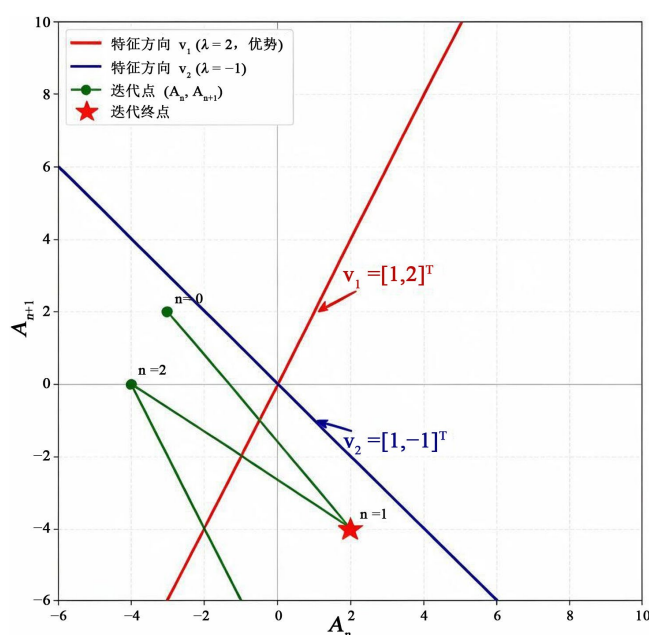


Figure 1. Schematic diagram of the iterative method in linear algebra
图 1. 线性代数法迭代示意图

射影直线上的动力学：通过投影 π ，上述动力学被反映到射影直线上，特征方向被映为不动点，特征值的模长关系决定了不动点的类型：

当 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ ，则 C_n 趋近于 ∞ ， B_n 趋近于不动点 x_2 ，此时 x_2 就为一个全局吸引子见文献[3]；

当 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ ，则 C_n 趋近于 0， B_n 趋近于不动点 x_1 ，此时 x_1 就为一个全局吸引子；

当 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$ ，则 C_n 为中性点。

如图 2 为 $p=1, q=2$ 时的迭代情形。

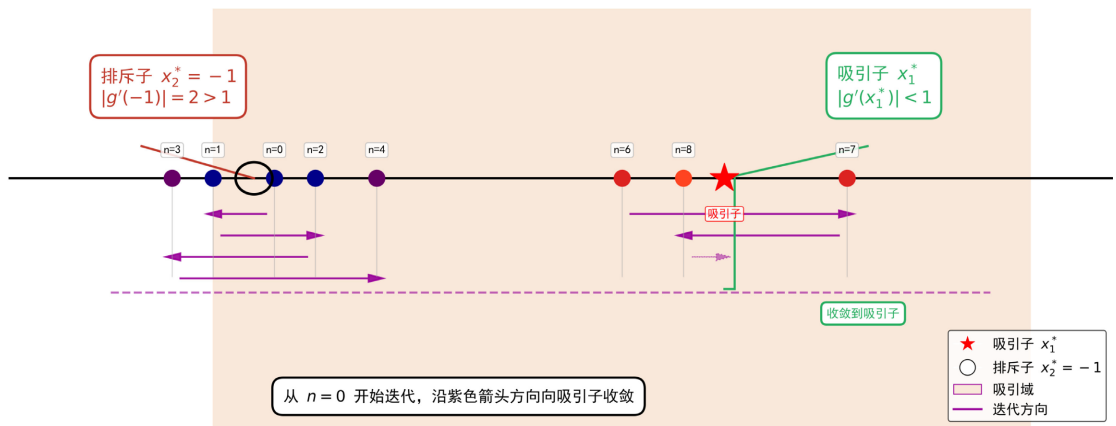


Figure 2. Schematic diagram of the fixed-point iteration method
图 2. 不动点法迭代示意图

全局渐近行为的对应：假设 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ ，则在代数视角下， v_n 的方向趋近于 u_1 。在不动点视角下，这意味着比值 $x_n = \pi(v_n)$ 将趋近于 $\pi(u_1) = x_1$ ，优势特征方向 u_1 对应不动点 x_1 ，称为射影直线动力学中的全局吸引子。这也揭示了动力学中一个深刻现象：投影操作将相空间中沿某个方向的(可能)扩张，转化为射影直线上一个点的吸引。

5. 军事案例应用

在 1916 年，兰彻斯特提出了一组微分方程，用来描述两支军队在战场上的对抗损耗，其离散形式是二阶线性递推系统。

离散 Lanchester 平方律(文献[6])： $x_{n+1} = x_n - \beta y_n$ ， $y_{n+1} = y_n - \alpha x_n$ ，可化为关于 x_n 的二阶递推，如下述表格解释(表 1)。

Table 1. Mathematical concepts and their tactical interpretations in the Lancaster Model
表 1. 兰彻斯特模型中的数学概念与战术释义对照

上述概念		Lanchester 模型中的对应
友矩阵	状态转移矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$	
特征向量	兵力演化的“优势方向”——决定战斗的长期趋势	

续表

特征值	决定战斗胜负的关键不变量: $\alpha R^2 - \beta B^2 = \text{常数}$ 也称战斗势能或兰彻斯特不变量
投影映射	交换比(exchange ratio) x_n/y_n ——指挥官最关心的“宏观指标”, 丢弃了兵力绝对值, 只关注相对态势
不动点	兵力平衡点——双方兵力为 $\sqrt{\beta/\alpha}$ 时稳定

从目前的论述中可以很自然得到明确结论: 从粗粒化视角出发, 交换比的变化趋势往往能揭示战斗的长期走向, 因此指挥官在特定情形下可将注意力集中于这一宏观指标, 而对精确兵力数字的依赖可以适度降低。而投影 π 正好把特征向量映到不动点, 因此战斗的长期胜负(由优势特征方向决定)实质上就是交换比向某个不动点(平衡点)收敛的过程。这是典型的“粗粒化”军事决策智慧: 去粗取精, 抓取不变量。

6. 结束语

由于同一个问题可以用两套语言来自然地描述: 线性代数是“全信息视角”, 即考察状态向量所有分量, 而不动点法是“比值视角”, 即只看两个分量的比例关系, 主动舍弃模长信息, 因此连接二者的投影映射 π 就十分自然: 把二维向量直接映射为分量比。因此让两种方法彼此衔接、互为补充。

这个思想不只属于数学, 统计力学把分子的微观状态“投影”为温度和压强; 流体力学在某些情况下“丢掉”粘性细节, 用更简洁的方程描述大尺度流动; 军事决策中, 指挥官不需要每个士兵的精确位置, 他需要的是兵力对比、态势比——这些都是 π 在不同领域的化身。

所以核心启示是: 对一个复杂系统最深层的理解, 往往来自构建多个不同尺度的模型, 并用严格的映射把它们连起来, 那些在不同尺度上都保持不变的东西——比如特征值, 比如不动点——往往就是理解这个系统的钥匙。

参考文献

- [1] 特里斯坦·尼达姆. 复分析: 可视化方法[M]. 齐民友, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2009: 106-107.
- [2] 梅向明, 刘增贤. 高等几何[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 29-57.
- [3] 陈绥阳, 褚蕾蕾, 编著. 动力系统基础及其方法[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 1-6, 290-303.
- [4] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 82-110.
- [5] 燕山大学理学院应用数学系, 主编. 线性代数[M]. 秦皇岛: 燕山大学出版社, 2023: 143-183.
- [6] Taylor, J.G. (1983) Lanchester Models of Warfare. Vol. 1, Operations Research Society of America.