

一类具对数源的分数阶p-Laplacian方程解的存在性

游俊豪, 吴秀兰*, 郑 好

长春理工大学数学与统计学院, 吉林 长春

收稿日期: 2026年7月6日; 录用日期: 2026年7月29日; 发布日期: 2026年8月12日

摘 要

本文研究了一类具有非线性阻尼和对数源的分数阶p-Laplacian双曲方程弱解的存在性, 探讨了弱解存在的适当条件。本文采用Faedo-Galerkin有限逼近方法构造近似解序列, 结合不等式技巧建立一致先验估计。借助对数不等式、Hölder不等式与分数阶Sobolev嵌入定理对对数源项进行放缩。利用广义Gronwall不等式得到近似解能量泛函关于逼近参数与时间的全局一致有界性。基于Banach-Alaoglu定理提取弱、弱*收敛子列, 利用Aubin-Lions紧性引理得到近似序列的强收敛性, 进而推出逐点收敛, 实现对对数非线性项的极限交换。同时, 通过对偶空间范数估计验证二阶时间导数的一致有界性。最终在合适的初值正则性假设下, 严格证明该分数阶双曲问题局部弱解的存在性。

关键词

分数阶p-Laplacian, 对数源, 非线性阻尼, 存在性

Existence of Solutions for a Class of Fractional p-Laplacian Equations with Logarithmic Source Terms

Junhao You, Xiulan Wu*, Hao Zheng

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: July 6, 2026; accepted: July 29, 2026; published: August 12, 2026

Abstract

This paper investigates the existence of weak solutions to a fractional p-Laplacian hyperbolic equation

*通讯作者。

文章引用: 游俊豪, 吴秀兰, 郑好. 一类具对数源的分数阶 p-Laplacian 方程解的存在性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(8): 59-66. DOI: 10.12677/aam.2026.158333

with nonlinear damping and logarithmic source terms, and explores appropriate conditions guaranteeing the existence of weak solutions. The Faedo-Galerkin finite approximation method is adopted to construct sequences of approximate solutions, and uniform a priori estimates are established via inequality techniques. Logarithmic inequalities, the Hölder inequality and fractional Sobolev embedding theorems are utilized to estimate the logarithmic source term. The generalized Gronwall inequality yields the global uniform boundedness of the energy functional of approximate solutions with respect to the approximation parameter and time. Weak and weak* convergent subsequences are extracted by virtue of the Banach-Alaoglu theorem, and the Aubin-Lions compactness lemma is employed to derive strong convergence of the approximate sequences, which further implies pointwise convergence and enables the interchange of limits for the logarithmic nonlinear term. Meanwhile, uniform boundedness of the second-order time derivative is verified through norm estimates in the dual space. Finally, under suitable regularity assumptions on initial data, the existence of local weak solutions to this fractional hyperbolic problem is rigorously proved.

Keywords

Fractional p-Laplacian, Logarithmic Source, Nonlinear Damping, Existence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在本文中, 主要研究了一类具阻尼项和分数阶算子双曲方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)_p^s u + |u_t|^{p-2} u_t = |u|^{p-2} u \log |u|, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) 是具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $s \in (0, 1)$, $2 < p < \infty$, $n > sp$, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是定义在 Ω 上的初始函数, 而 $(-\Delta)_p^s$ 是分数阶 p-Laplacian 算子, 是一种定义在光滑函数上的非线性非局部算子, 定义如下

$$(-\Delta)_p^s \varphi(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^{p-2} (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy, \quad (2)$$

其中 $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < \varepsilon\}$ 。

近年来, 分数阶偏微分方程的相关研究受到了广泛关注。众所周知, 分数阶拉普拉斯算子可视为经典拉普拉斯算子的推广。分数阶导数在非线性振动理论、最优过程、流体力学、自动控制、电磁学等诸多理工领域中有着大量实际应用, 这也是该方向备受重视的原因[1]-[5]。研究此类方程解的存在性、不存在性、爆破行为与衰减估计具有重要的理论意义。

本文以分数阶双曲型方程问题为研究对象, 该类方程可严谨刻画非局部材料变形与断裂行为(如非均质介质内黏弹性损伤扩展), 在固体力学领域具有核心作用。传统连续介质力学与线弹性理论无法刻画非局部效应, 也难以解释固体损伤、断裂、相界面演化、裂纹萌生、波色散等复杂物理现象。近场动力学是一套基于长程作用力的非局部弹性理论, 可有效克服上述理论缺陷[6] [7]。

具体而言, 文献[6]证实: 在刻画脆性固体随时间演化的裂纹扩展问题时, 分数阶双曲模型的表现优

于经典整数阶模型。材料科学的发展与工业新技术需求推动了该方向的理论进展。众多学者已对分数阶双曲型方程解的各类性质开展大量研究。例如, Fu 和 Pucci 在文献[8]中研究了带有指数源项、含分数阶拉普拉斯算子的抛物方程 $u_t + (-\Delta)^s u = |u|^{p-1} u$, 在合适的假设条件下, 作者证明了具有指数衰减性质的弱解全局存在; 同时得到强解的真空隔离现象与爆破结论。此外, Liu 等人在文献[9]研究了上述方程增加耗散项 $(-\Delta)^s u_t$ 的情形, 在适当条件下证明了弱解的全局存在性与无穷远处爆破。

对数非线性源项 $|u|^{q-2} u \log |u|$ 能够精准复现低应变、弱损伤区间损伤增速放缓、演化趋于平缓的物理特征, 弥补纯幂次源项在微缺陷萌生阶段的建模缺陷。Boudjeriou 在文献[10]中考察一类分数阶 p -Laplacian 算子双曲方程 $u_{tt} + (-\Delta)_p^s u = |u|^{q-2} u \log |u|$, 该文得到了丰富的理论结论: 采用 Galerkin 逼近, 证明了当 $1 < q < p_s^*$ 时解的局部存在性; 结合位势井理论与 Nehari 流形, 建立了当 $p < q < p_s^*$ 时解的全局存在性; 借助 Pohozaev 流形进一步得到 $1 < q < p_s^*$ 情形下解的全局存在性; 同时讨论了解的有限时刻爆破与渐近行为。关于含分数阶拉普拉斯算子的更多近期成果, 读者可参考文献[11]-[14]及其所列引文。

受上述已有研究的启发, 本文研究了一类含分数阶 p -Laplacian 算子、非线性阻尼和对数源项双曲方程解的存在性。第二章给出本文所用的若干重要引理、基础定义与主要结论。第三章为本文主要研究结果, 给出了解存在性的证明。

2. 预备知识

本节我们将回顾关于分数阶 p -Laplacian 算子及分数阶 Sobolev 空间的一些必要性质。我们推荐读者参阅文献[15] [16]以获取关于分数阶 p -Laplacian 算子及分数阶 Sobolev 空间的更多细节。

对于任意 $p \in (1, \infty)$, 分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 的定义如下

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), u \text{ 可测且 } [u]_{s,p} < \infty\},$$

其中 $[u]_{s,p}$ 表示 u 的 Gagliardo 半范数, 其定义为

$$[u]_{s,p} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们定义 $W_0^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), [u]_{s,p} < \infty, u = 0 \text{ 在 } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ 上几乎处处成立}\}$ 并称之为 $W^{s,p}(\Omega)$ 的一个子空间。赋予其范数

$$\|u\|_{s,p} := [u]_{s,p}.$$

显然, $W_0^{s,p}(\Omega)$ 空间内的函数可以通过在 Ω 域外进行零填充延拓的方式定义在整个空间 $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 中。我们将分数阶临界嵌入指数定义为 $p_s^* = \frac{np}{n-sp}$ (当 $1 \leq p < \frac{n}{s}$ 时)。此外, 我们将 $L^2(\Omega)$ 空间中的内积记为 $(\cdot, \cdot)$, 将 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 空间中的内积记为 $(\cdot, \cdot)_{s,p}$, 并记 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 在 $W_0^{-s,p'}(\Omega)$ 中的对偶积记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 其中 $W_0^{-s,p'}(\Omega)$ 是 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 的对偶空间。

如果我们假设在 $(-\Delta)_p^s u$ 定义的积分存在, 那么对于任意的 $\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, 根据核的对称性可以得到以下积分公式

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)_p^s u(x) \varphi(x) dx &= 2 \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy \varphi(x) dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} (\varphi(x) - \varphi(y)) dy dx. \end{aligned}$$

接下来我们给出一些引理。

引理 1 [15] 设 $s \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty)$ 满足 $sp < n$ 。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}$ 对应的延拓区域。则存在正常数 $C = C(n, p, s, \Omega)$, 使得对任意的 $u \in W^{s,p}(\Omega)$ 有

$$\|u\|_r \leq C \|u\|_{s,p}, p \leq r \leq p_s^*.$$

即空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 可连续嵌入 $L^r(\Omega)$, 其中 $r \in [p, p_s^*]$ 。进一步, 若区域 Ω 有界, 则对任意的 $r \in [1, p_s^*]$, $W^{s,p}(\Omega)$ 可连续嵌入 $L^r(\Omega)$ 。

引理 2 [17] 设 φ 为任意正常数, 则下述不等式成立

$$\text{当 } 0 < \varphi < 1 \text{ 时, } |\varphi^k \log \varphi| \leq (ek)^{-1};$$

$$\text{当 } \varphi \geq 1 \text{ 时, } \varphi^k \log \varphi \leq (e\mu)^{-1} \varphi^{k+\mu}.$$

命题 1 [15] 定义非线性模型 $K^{s,p}(u, v): W_0^{s,p}(\Omega) \times W_0^{s,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$K^{s,p}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} (v(x) - v(y)) dy dx$$

是良定义的、有界, 关于第一变量第二变量均连续且单调; 对任意 $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, 如下估计式成立

$$|K^{s,p}(u, v)| \leq [u]_{s,p}^{p-1} [v]_{s,p}.$$

定义 1 (弱解定义) 令 $T > 0$, 如果满足 $u \in L^\infty(0, T; W^{s,p}(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; W^{-s,p'}(\Omega))$, 且对任意的 $\phi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, 有下列成立

$$\langle u_{tt}, \phi \rangle + (u, \phi)_{s,p} + (|u|^{p-2} u_t, \phi) = (|u|^{p-2} u \log |u|, \phi),$$

$$u(x, 0) = u_0 \in W_0^{s,p}(\Omega), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in L^2(\Omega),$$

其中 $(u, \phi)_{s,p} = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} (\phi(x) - \phi(y)) dy dx$, 则称 $u(x, t)$ 是问题(1)在 $\Omega \times (0, T)$ 上的弱解。

3. 主要结果

在本节中, 我们利用 Faedo-Galerkin 方法证明问题(1)弱解的局部存在性。

定理 1 若初始条件 $u_0 \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$ 且 $\frac{2n}{n-2} < p$, 则存在 $T > 0$, 使得问题(1)在 $\Omega \times (0, T)$ 上存在局部解 $u(x, t)$ 。

证明 我们定义有限维子空间 $V_m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$, 令 $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ 为 $L^2(\Omega)$ 的一组标准正交基。由于 $u_0 \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$, 可以找到 $u_{0m} \in V_m$, $u_{1m} \in V_m$ 使得

$$\text{记 } u_m(0) = u_{0m}, \text{ 当 } m \rightarrow \infty \text{ 时, } u_{0m} \text{ 在空间 } W_0^{s,p}(\Omega) \text{ 内强收敛至 } u_0; \quad (3)$$

$$\text{记 } u_{mt}(0) = u_{1m}, \text{ 当 } m \rightarrow \infty \text{ 时, } u_{1m} \text{ 在空间 } W_0^{s,p}(\Omega) \text{ 内强收敛至 } u_1. \quad (4)$$

对任意正整数 m , 我们构造近似解 $u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \varphi_j(x)$ 使其满足如下变分恒等式

$$\int_{\Omega} u_{mtt} v dx + (u_m, v)_{s,p} + (|u_m|^{p-2} u_{mt}, v) = \int_{\Omega} v |u_m|^{p-2} u_m \log |u_m| dx \quad (5)$$

且满足初始条件

$$\begin{cases} u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^m (u_0, \varphi_j) \varphi_j, \\ u_{mt}(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^m (u_1, \varphi_j) \varphi_j. \end{cases} \quad (6)$$

对 $j=1, 2, \dots, m$, 在式(5)中取检验函数 $v = \varphi_j$, 可得

$$\int_{\Omega} u_{mt} \varphi_j dx + (u_m, \varphi_j)_{s,p} + (|u_{mt}|^{p-2} u_{mt}, \varphi_j) = \int_{\Omega} \varphi_j |u_m|^{p-2} u_m \log |u_m| dx. \quad (7)$$

记 $G_{jm}(t) = g'_{jm}(t)$, 则方程组(6)~(7)等价于 $G_{jm}(t)$ 的如下非线性常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} G'_{jm}(t) = F(t, g_{jm}(t), G_{jm}(t)), \\ G_{jm}(0) = g'_{jm}(0) = \int_{\Omega} u_1 \varphi_j dx. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} F(t, g_{jm}(t), G_{jm}(t)) = & \int_{\Omega} g_{jm}(t) \left| \sum_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t) \varphi_j(x) \right|^{p-2} \log \left| \sum_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t) \varphi_j(x) \right| dx \\ & - \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t) \varphi_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t) \varphi_j(y) \right|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t) \varphi_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t) \varphi_j(y) \right) \\ & \times (\varphi_j(x) - \varphi_j(y)) \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy dx - \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^{\infty} G_{jm}(t) \varphi_j(x) \right|^{p-2} G_{jm}(t) dx, \end{aligned}$$

根据 Penao 定理, 可以得到上述柯西问题的局部解。

将式(7)中第 j 个方程两边同乘 $g'_{jm}(t)$ 并对 $j=1, 2, \dots, m$ 求和, 可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_{mt}\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_m\|_{s,p}^p \right) + \|u_{mt}\|_p^p = \int_{\Omega} |u_m|^{p-2} u_m u_{mt} \log |u_m| dx, \quad (8)$$

对上式两边在 $[0, t]$ 上积分, 有

$$\frac{1}{2} \|u_{mt}\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_m\|_{s,p}^p + \int_0^t \|u_{ms}\|_p^p ds = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_0\|_{s,p}^p + \int_0^t \int_{\Omega} |u_m|^{p-2} u_m u_{ms} \log |u_m| dx ds. \quad (9)$$

记 $S_m(t) = \frac{1}{2} \|u_{mt}\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_m\|_{s,p}^p + \int_0^t \|u_{ms}\|_p^p ds$, 作区域分解:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega, |u_m(x)| \geq 1\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega, |u_m(x)| < 1\}.$$

已知参数满足 $\frac{2n}{n-2} < p$ 且有 $p < \frac{2n(p-1)}{n+2} < p_s^*$ 恒成立, 因此可以选取充分小的正数 $\mu > 0$, 使得

$\frac{2n(p-1+\mu)}{n+2} < p_s^*$ 。这意味着空间 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 可以连续嵌入空间 $L^{\frac{2n(p-1+\mu)}{n+2}}(\Omega)$, 即

$$\|u\|_{\frac{2n(p-1+\mu)}{n+2}} \leq C_{\mu} \|u\|_{s,p}, \text{ 对任意的 } u \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ 成立,} \quad (10)$$

其中 C_{μ} 表示从 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^{\frac{2n(p-1+\mu)}{n+2}}(\Omega)$ 的嵌入常数。下面我们对式(8)右端进行估计

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m|^{p-2} u_m u_{mt} \log |u_m| dx &= \int_{\Omega_1} |u_m|^{p-2} u_m u_{mt} \log |u_m| dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} |u_m|^{p-2} u_m u_{mt} \log |u_m| dx. \end{aligned} \quad (11)$$

根据引理 2 我们有如下结论: 对任意的 $x \geq 1$, $\mu > 0$, 有 $x^{-\mu} \ln|x| < (e\mu)^{-1}$; 对任意的 $0 < x < 1$, 有 $|x^{p-1} \ln x| \leq (e(p-1))^{-1}$ 。

对式(11)进一步估计, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |u_m|^{p-2} u_m u_{mt} \log|u_m| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |u_{mt}|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_{\Omega_1} |u_m|^{p-2} u_m \log|u_m|^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\
 &\quad + \left(\int_{\Omega} |u_{mt}|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_{\Omega_2} |u_m|^{p-2} u_m \log|u_m|^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\
 &\leq \|u_{mt}\|_{\frac{2n}{n-2}} \left[(e(p-1))^{-1} |\Omega_2|^{\frac{n+2}{2n}} + (e\mu)^{-1} \left(\int_{\Omega} |u_m|^{\frac{2n(p-1+\mu)}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \right] \\
 &\leq C_0 \|u_{mt}\|_2 \left[(e(p-1))^{-1} |\Omega_2|^{\frac{n+2}{2n}} + (e\mu)^{-1} C_{\mu}^{p-1+\mu} \|u_m\|_{s,p}^{p-1+\mu} \right] \\
 &\leq \varepsilon \|u_{mt}\|_2^2 + C(\varepsilon) \left[C_1 + C_2 \|u_m\|_{s,p}^{2(p-1+\mu)} \right] \\
 &\leq 2\varepsilon \delta S_m^{\frac{2(p-1+\mu)}{p}}(t) + pC_2 S_m^{\frac{2(p-1+\mu)}{p}}(t) + C(\varepsilon)C_1 + 2\varepsilon C(\delta),
 \end{aligned} \tag{12}$$

结合式(8)~(12)可得

$$S_m(t) \leq C_3 + C_4 \int_0^t (S_m(s))^{\frac{2(p-1+\mu)}{p}} ds, \tag{13}$$

其中 $C_3 = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_0\|_{s,p}^p + C(\varepsilon)C_1 + 2\varepsilon C(\delta)$, $C_4 = 2\varepsilon\delta + pC_2$, 对该微分不等式求解, 可以得到

$$S_m(t) \leq C_5, \tag{14}$$

其中常数 C_5 与时间区间长度 T 无关, 因此我们有

$$\frac{1}{2} \|u_{mt}\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_m\|_{s,p}^p + \int_0^t \|u_{ms}\|_p^p ds \leq C_5, \tag{15}$$

由此可知, 存在近似解序列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的子列(仍记为 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$)满足如下收敛性

$$\begin{cases} u_m \text{ 在 } L^{\infty}(0, T; W_0^{s,p}(\Omega)) \text{ 中弱*收敛,} \\ u_{mt} \text{ 在 } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中弱*收敛,} \\ u_{mt} \text{ 在 } L^p(0, T; L^p(\Omega)) \text{ 中弱*收敛.} \end{cases}$$

结合 Aubin-Lions 紧性引理(见文献[18]), 可取进一步子列使得

$$u_m \rightarrow u \text{ 在 } C(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中强收敛.}$$

显然, 该强收敛蕴含 $u_m(x, 0)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛至 u_0 , 并且有

$$|u_m|^{p-2} u_m \log|u_m| \rightarrow |u|^{p-2} u \log|u|, \text{ 对 } (x, t) \in \Omega \times [0, T] \text{ 几乎处处成立,}$$

由此可得 $u(x, 0) = u_0$ 。

结合式(15)、Hölder 不等式和命题 1, 有

$$\begin{aligned}
\|u_{mt}\|_{-s,p'} &= \sup_{\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\left| \int_{\Omega} |u_m|^{q-2} u_m \log |u_m| \cdot \varphi dx - (u_m, \varphi)_{s,p} - \int_{\Omega} |u_{mt}|^{p-2} u_{mt} \cdot \varphi dx \right|}{\|\varphi\|_{s,p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|u_m\|_{s,p}^{p-1} \|\varphi\|_{s,p} + \int_{\Omega} \left(|u_m|^{q-2} u_m \log |u_m| \right)^2 dx \|\varphi\|_2 + \|u_{mt}\|_p^p \|\varphi\|_p}{\|\varphi\|_{s,p}} \right\} \\
&\leq \sup_{\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|u_m\|_{s,p}^{p-1} \|\varphi\|_{s,p}}{\|\varphi\|_{s,p}} + \frac{C_6 \int_{\Omega} \left(|u_m|^{q-2} u_m \log |u_m| \right)^2 dx \|\varphi\|_{s,p}}{\|\varphi\|_{s,p}} + \frac{C_7 \|u_{mt}\|_p^p \|\varphi\|_{s,p}}{\|\varphi\|_{s,p}} \right\} \\
&\leq C_6 \int_{\Omega} \left(|u_m|^{q-2} u_m \log |u_m| \right)^2 dx + \|u_m\|_{s,p}^{p-1} + C_7 \|u_{mt}\|_p^p \\
&\leq C_8.
\end{aligned}$$

其中 C_6 为 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 嵌入 $L^2(\Omega)$ 的嵌入常数, C_7 为 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 嵌入 $L^p(\Omega)$ 的嵌入常数, 可得

$$u_{mtt} \in L^\infty(0, T; W^{-s,p'}(\Omega)).$$

结合 Aubin-Lions 紧性引理和 $u_{mt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, 可推得 $u_{mt} \rightarrow u_t$ 在 $C(0, T; W^{-s,p'}(\Omega))$ 中强收敛。因此 $u_{mt}(0)$ 在空间 $W^{-s,p'}(\Omega)$ 中收敛至 $u_t(0)$ 。又已知 $u_{mt}(0) = u_{1m}$ 在 $L^2(\Omega)$ 内强收敛至 u_1 , 由此可得初值等式 $u_t(x, 0) = u_1$ 。在式(5)中, 令 $m \rightarrow \infty$ 取极限, 结合上述分析可以得到对任意的 $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ 都有

$$\langle u_t, v \rangle + (u, v)_{s,p} + \left(|u|^{p-2} u_t, v \right) = \left(|u|^{p-2} u \log |u|, v \right),$$

至此我们证明了存在函数 $u(x, t)$ 满足问题(1)且符合全部弱解条件。证毕。

4. 结论

本文证明带分数阶 p -Laplacian、非线性阻尼与对数源双曲方程局部弱解存在性。相比文献[10]无阻尼模型, 本文新增非线性阻尼项, 能量结构更复杂, 仅得到局部适定性。该模型可描述非局部介质损伤演化, 但暂未刻画长时间动力学行为。后续可借助位势井理论研究全局存在与爆破、推导能量衰减估计, 证明解的唯一性, 并拓展 Kirchhoff 耦合等更一般模型。

基金项目

吉林省教育厅科学研究项目资助(JJKH20250464KJ)。

参考文献

- [1] Laskin, N. (2000) Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals. *Physics Letters A*, **268**, 298-305. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(00\)00201-2](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(00)00201-2)
- [2] Valdinoci, E. (2009) From the Long Jump Random Walk to the Fractional Laplacian. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, **49**, 33-44.
- [3] Applebaum, D. (2004) Lévy Processes—From Probability to Finance and Quantum Groups. *Notices of the American Mathematical Society*, **51**, 1336-1347.
- [4] Caffarelli, L. (2012) Non-Local Diffusions, Drifts and Games. In: Holden, H. and Karlsen, K., Eds., *Nonlinear Partial Differential Equations: The Abel Symposium*, Springer, 37-52. https://doi.org/10.1007/978-3-642-25361-4_3
- [5] Vázquez, J. (2014) Recent Progress in the Theory of Nonlinear Diffusion with Fractional Laplacian Operators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **7**, 857-885. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.857>
- [6] Coclite, G.M., Dipierro, S., Maddalena, F. and Valdinoci, E. (2018) Wellposedness of a Nonlinear Peridynamic Model. *Nonlinearity*, **32**, 1-21. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aac71b>

-
- [7] Coclite, G.M., Dipierro, S., Fanizza, G., Maddalena, F. and Valdinoci, E. (2022) Dispersive Effects in a Scalar Nonlocal Wave Equation Inspired by Peridynamics. *Nonlinearity*, **35**, 5664-5713. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac8fd9>
 - [8] Fu, Y. and Pucci, P. (2016) On Solutions of Space-Fractional Diffusion Equations by Means of Potential Wells. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **70**, 1-17. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.70>
 - [9] Liu, W., Yu, J. and Li, G. (2021) Global Existence, Exponential Decay and Blow-Up of Solutions for a Class of Fractional Pseudo-Parabolic Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **14**, 4337-4366. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2021121>
 - [10] Boudjeriou, T. (2023) Global Well-Posedness and Finite Time Blow-Up for a Class of Wave Equation Involving Fractional p -Laplacian with Logarithmic Nonlinearity. *Mathematische Nachrichten*, **296**, 938-956. <https://doi.org/10.1002/mana.202000266>
 - [11] Lin, Q., Tian, X., Xu, R. and Zhang, M. (2020) Blow Up and Blow Up Time for Degenerate Kirchhoff-Type Wave Problems Involving the Fractional Laplacian with Arbitrary Positive Initial Energy. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **13**, 2095-2107. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2020160>
 - [12] Liao, M. and Tan, Z. (2024) Blow-Up and Energy Decay for a Class of Wave Equations with Nonlocal Kirchhoff-Type Diffusion and Weak Damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **47**, 516-534. <https://doi.org/10.1002/mma.9668>
 - [13] Zhang, L. and Liu, Y. (2024) A Class of Fractional Viscoelastic Kirchhoff Equations Involving Two Nonlinear Source Terms of Different Signs. *Axioms*, **13**, 169-183. <https://doi.org/10.3390/axioms13030169>
 - [14] Xu, Y. and Pan, N. (2025) On Fractional Order Kirchhoff Hyperbolic Equations with Logarithmic Terms. *Boundary Value Problems*, **2025**, Article No. 24. <https://doi.org/10.1186/s13661-025-02004-y>
 - [15] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004>
 - [16] Bucur, C. and Valdinoci, E. (2016) Nonlocal Diffusion and Applications, Volume 20 of Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer International Publishing.
 - [17] Nhan, L.C. and Truong, L.X. (2017) Global Solution and Blow-Up for a Class of Pseudo p -Laplacian Evolution Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Computers & Mathematics with Applications*, **73**, 2076-2091. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.02.030>
 - [18] Simon, J. (1986) Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, 65-96. <https://doi.org/10.1007/bf01762360>