

路与圈Mycielski图的线性荫度

王继顺^{1,2}

¹连云港师范学院数学与信息工程学院, 江苏 连云港

²连云港师范学院数学与系统优化研究所, 江苏 连云港

收稿日期: 2026年7月13日; 录用日期: 2026年8月5日; 发布日期: 2026年8月17日

摘 要

将图 G 的边集 $E(G)$ 通过划分, 分解为 m 个边互不交的线性森林时, 所需要线性森林最小的数目 m 称为图的线性荫度, 此概念由Harary于1970年首次提出, 它丰富了图的理论, 又拓展了图的应用领域。本文针对由路与圈构造而成的Mycielski图开展探讨, 按照构造图的结构特点, 通过对其边进行分解, 证明了路与圈的Mycielski图满足线性荫度的猜想。

关键词

线性荫度, 线性荫度猜想, Mycielski图

The Linear Arboricity of Mycielski Graph of Path and Cycle

Jishun Wang^{1,2}

¹School of Mathematics and Information Engineering, Lianyungang Normal University, Lianyungang Jiangsu

²Institute of Mathematics and System Optimization, Lianyungang Normal University, Lianyungang Jiangsu

Received: July 13, 2026; accepted: August 5, 2026; published: August 17, 2026

Abstract

When the edge set $E(G)$ of graph G is partitioned into m mutually disjoint linear forests, the minimum number m required is termed the linear arboricity of the graph. This concept was first introduced by Harary in 1970, enriching graph theory and expanding its applications. This paper investigates Mycielski graphs constructed from paths and cycles. By analyzing their structural characteristics and decomposing their edges, it is proved that Mycielski graphs composed of paths and

文章引用: 王继顺. 路与圈 Mycielski 图的线性荫度[J]. 应用数学进展, 2026, 15(8): 117-124.

DOI: 10.12677/aam.2026.158339

cycles satisfy the linear arboricity conjecture.

Keywords

Linear Arboricity, Linear Arboricity Conjecture, Mycielski Graph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图的分解是图论研究的核心问题之一,图的分解不仅有利于认识图的结构特点和性质,在网络设计、调度作业等应用领域也发挥着重要的作用。而图的线性荫度作为刻画图分解的关键概念,由 Harary [1] 于 1970 年提出以来,就成为众多研究者关注的焦点问题,获得了图论工作者广泛深入的探讨。设对于给定的任意无向图 G , 其边集、顶点集和图的最大度分别表示为 $E(G)$ 、 $V(G)$ 和 $\Delta(G)$, 图 G 中 u 、 v 两个顶点有唯一的路,将该连通分支记作 $\{u,v\}$ 。图的线性荫度 $la(G)$ 指的是将图的边集分解为一组相互不交的线性森林所需要的最小数目,这里所说的线性森林就是每一个连通分支都是路的图。对于任意的图 G , 都有 $la(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ 。

Akiyama、Exoo、Harary [2] 在 1980 年就正则图提出了著名的线性荫度猜想: 对于 Δ -正则图 G , $la(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$, 归纳这两个结论, 线性荫度猜想可以等价的表述为:

猜想 1 [2] 对于任意的图 G , 有

$$\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil \leq la(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil. \quad (1)$$

1981 年, Akiyama、Exoo、Harary 对 4-正则图运用因子分解法成功证明上述猜想的成立, 文[3]又获得了 5-正则图、6-正则图、8-正则图的线性荫度, 文[4]得到了 10-正则图的线性荫度结果。随着研究的深入, 将图类的研究拓展到了平面图和可嵌入平面图的研究, 文[5]-[9]分别得到了 7-正则平面图、1C-平面图的线性荫度, 文[10]得到了 1-平面图的线性荫度; 通过对图的笛卡尔积、直积、乘积运算线性荫度的研究, 得到了路和完全图乘积图[11]、树和路乘积图[12]、二部图与完全图乘积图[13]、1-退化图的乘积图[14]的线性荫度。这些研究成果的获得一方面是对线性荫度猜想的验证, 另一方面也为图的分解提出了创新性思维方法, 为后续研究提供了新的思路和借鉴。

线性荫度猜想在众多的图类中得到了验证, 本文研究了 Mycielski 构造图的线性荫度, 给出了路和圈的 Mycielski 图的分解结果, 获得其线性荫度进一步拓展了线性荫度猜想的满足图的范围, 为相关图类的线性森林分解提出了新的思路, 对继续研究更复杂图类分解问题具有参考价值。

定义 2 [15] 对简单图 G , 若 $V(\mathcal{M}(G)) = V(G) \cup V' \cup \{w\}$, $E(\mathcal{M}(G)) = E(G) \cup \{uv' \mid u \in V(G), v' \in V', uv \in E(G)\} \cup \{wv' \mid v' \in V'\}$, 其中 $V' = \{v' \mid v \in V(G)\}$, $\{w\} \cap (V \cup V') = \emptyset$, 称图 $\mathcal{M}(G)$ 是 G 的 Mycielski 图。

文中未定义的术语和符号参见文献[16]。

2. 主要结果及证明

本文主要对路和圈的 Mycielski 图的结构进行研究, 证明了路和圈的 Mycielski 图均满足线性荫度的猜想, 得到了下面的两个定理。鉴于定理中用到圈的线性荫度结论, 先给出圈的线性荫度及其证明。

引理 1 设 n 阶圈 C_n , 则其线性荫度

$$la(C_n) = \left\lceil \frac{\Delta(C_n) + 1}{2} \right\rceil. \quad (2)$$

证明: 由图的线性荫度的定义可得 $la(C_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(C_n)}{2} \right\rceil$ 。

因为偶圈的边色数 $\chi'(C_n) = \Delta(C_n)$, 而奇圈的边色数为 $\chi'(C_n) = \Delta(C_n) + 1$, 对于偶圈, 其线性荫度 $la(C_n) \neq \left\lceil \frac{\Delta(C_n)}{2} \right\rceil = 1$, 整个圈本身含有环, 不是线性森林, 而按其边染色任意两种着色的边导出子图都

分别是一个线性森林, 因此偶圈的线性荫度为 $la(C_n) = \left\lceil \frac{\Delta(C_n)}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\Delta(C_n) + 1}{2} \right\rceil$; 若图为奇圈, 设其边

依次为: $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, \dots, e_{n-1} = v_{n-1}v_n, e_n = v_nv_1$, 作二分分解得 $F_1 = \{e_1, e_3, \dots, e_{n-2}\}$, $F_2 = \{e_2, e_4, \dots, e_{n-1}, e_n\}$, 易见 $F_1 \cup F_2$ 包含圈的所有边, 且 F_1, F_2 都是线性森林, 因此, $la(C_n) \neq 1$ 且 $la(C_n) \leq \left\lceil \frac{\chi'(C_n)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(C_n) + 1}{2} \right\rceil$, 所以有 $la(C_n) = \left\lceil \frac{\Delta(C_n) + 1}{2} \right\rceil$ 。

综上所述, 圈 C_n 的线性荫度 $la(C_n) = \left\lceil \frac{\Delta(C_n) + 1}{2} \right\rceil$ 。

定理 1 对于 n 阶路 P_n 的 Mycielski 图 $\mathcal{M}(P_n)$, 这里 $n \geq 2$, 有

$$la(\mathcal{M}(P_n)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n)) + 1}{2} \right\rceil, & n = 2; \\ \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil, & n \geq 3. \end{cases} \quad (3)$$

证明: 由 Mycielski 图的定义可得, 当 $n \geq 5$ 时, n 阶路 P_n 的 Mycielski 图 $\mathcal{M}(P_n)$ 有唯一的最大度顶点, 且 $\Delta(\mathcal{M}(P_n)) = d(w) = n$, 当 $n = 4$ 时, 其最大度顶点有 3 个 (v_2, v_3, w), 此时 $\Delta(\mathcal{M}(P_n)) = 4$, 当 $n = 3$ 时, 有唯一最大度顶点 v_2 , 且 $\Delta(\mathcal{M}(P_n)) = 4$, 当 $n = 2$ 时, 此时 $\mathcal{M}(P_2) \cong C_5$, 由引理 1, 结论成立。下面就 $n \geq 3$ 的情况进行证明。

由图的线性荫度的定义可知, 当 $n \geq 3$ 时, $la(\mathcal{M}(P_n)) \geq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil$ 。

要证 $la(\mathcal{M}(P_n)) = \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil$, 只要再有 $la(\mathcal{M}(P_n)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil$ 即可, 而这只要将 $\mathcal{M}(P_n)$ 的边分解成 $\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil$ 个边不交的线性森林, 记分解所得的线性森林为 $LF_i, i = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil$ 。下面分两种情况予以讨论。

情况 1 当 n 为奇数时, 若 $n = 3$ 时, 按照 $\mathcal{M}(P_3)$ 的构造特点, 令

$$LF_1 = P_3 \cup \{v_1 v'_2\} \cup \{v'_1 w, v'_2 w\}, \quad LF_2 = \{v_2 v'_1, v_2 v'_3, v_3 v'_2\} \cup \{v'_3 w\}.$$

LF_1 看作从 P_3 的顶点 v_1 依次联边 $v_1 v'_2$ 、 $v'_2 w$ 、 ww'_1 而得的一条路, LF_1 有一个连通分支 $\{v_1, v'_1\}$, LF_2 是由路 $v'_1 v'_2 v'_3 w$ 和 $v_3 v'_2$ 的并集,其有两个连通分支 $\{v'_1, w\}$ 和 $\{v_3, v'_2\}$,从而 LF_1 和 LF_2 都是线性森林,且 $LF_1 \cup LF_2$ 覆盖了 $\mathcal{M}(P_3)$ 的所有边如图1(a)。故有 $la(\mathcal{M}(P_3)) = 2$ 。

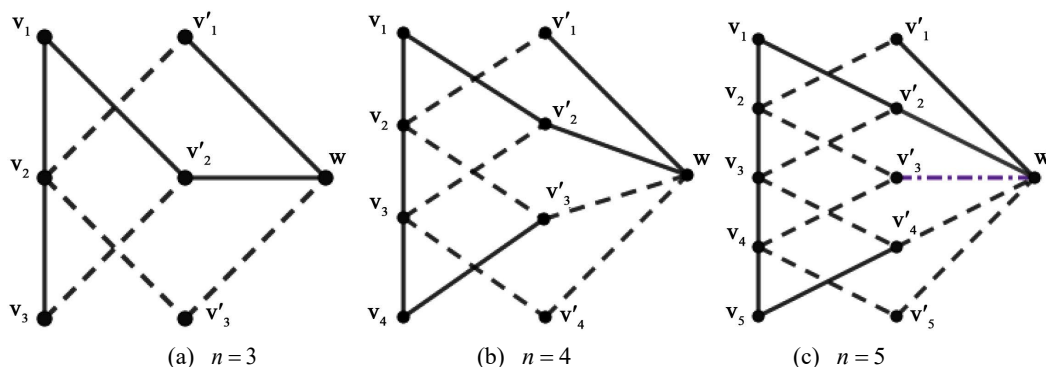


Figure 1. A linear forest decomposition of $\mathcal{M}(P_n)$ for $n=3,4,5$

图 1. 当 $n=3,4,5$ 时 $\mathcal{M}(P_n)$ 的一种线性森林分解

若 $n \geq 5$ 时,按照 $\mathcal{M}(P_n)$ 的结构特点对其进行分解,令

$$LF_1 = P_n \cup \{v_1 v'_2, v_n v'_{n-1}\} \cup \{v'_1 w, v'_2 w\},$$

$$LF_2 = \{v_i v'_{i-1}, v_i v'_{i+1} \mid i = 2, 3, \dots, n-1\} \cup \{v'_{n-1} w, v'_n w\},$$

$$LF_i = \{v'_{2i-3} w, v'_{2i-2} w\}, \quad i = 3, 4, \dots, \left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor - 1, \quad LF_{\left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor} = \{v'_{n-2} w\}.$$

LF_1 是由 P_n 的顶点 v_n 联边 $v_n v'_{n-1}$,由顶点 v_1 顺次联边 $v_1 v'_2$ 、 $v'_2 w$ 、 ww'_1 形成的一条路,共 $n+3$ 条边,它只有一个连通分支 $\{v'_1, v'_{n-1}\}$, LF_2 可以看成由顶点 v'_1 开始,以 $v'_{i-1} v_i$ 、 $v_i v'_{i+1}$ 方式顺次联边,直到 v'_n ,然后在联边 $v'_n w$ 、 ww'_{n-1} ,接着再从 v'_{n-1} 开始 $v'_{i+1} v_i$ 、 $v_i v'_{i-1}$ 的方式顺次联边直到 v'_2 ,正好就形成一条由 v'_1 到 v'_2 的路,共 $2n-2$ 条边,这样, LF_2 也只有一个连通分支 $\{v'_1, v'_2\}$, LF_i 是 $v'_{2i-3} w v'_{2i-2} w$ 路,其连通分支为

$\{v'_{2i-3}, v'_{2i-2}\}$, $i = 3, 4, \dots, \left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor - 1$, $LF_{\left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor}$ 是只有一条边的连通分支 $\{v'_{n-2}, w\}$,它们都是线性

森林,且各线性森林总边数

$$(n+3) + (2n-2) + 2 * \left(\left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor - 1 - 2 \right) + 1 = (n+3) + (2n-2) + 2 * \left(\frac{n+1}{2} - 3 \right) + 1 = 4n-3.$$

$LF_1 \cup LF_2 \cup \dots \cup LF_{\left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor}$ 覆盖了 $\mathcal{M}(P_n)$ 的所有边(由握手定理可求得 $\mathcal{M}(P_n)$ 的边有 $4n-3$ 条),而且

这些连通分支是两两不交的,其中 $n=5$ 的情况如图1(c)所示。因此可得 $la(\mathcal{M}(P_n)) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rfloor$ 。

情况 2 当 n 为偶数时,对 $n \geq 4$,将 $\mathcal{M}(P_n)$ 作如下分解

$$\begin{aligned}
 LF_1 &= P_n \cup \{v_1 v'_2, v_n v'_{n-1}\} \cup \{v'_1 w, v'_2 w\}, \\
 LF_2 &= \{v_i v'_{i-1}, v_i v'_{i+1} \mid i = 2, 3, \dots, n-1\} \cup \{v'_{n-1} w, v'_n w\}, \\
 LF_i &= \{v'_{2i-3} w, v'_{2i-2} w\}, \quad i = 3, 4, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil.
 \end{aligned}$$

同样可以验证 $LF_i \left(i = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil \right)$ 都是线性森林, 且所有线性森林总边数

$$(n+3) + (2n-2) + 2 * \left(\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil - 2 \right) = (n+3) + (2n-2) + 2 * \left(\frac{n}{2} - 2 \right) = 4n-3.$$

$LF_1 \cup LF_2 \cup \dots \cup LF_{\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil}$ 覆盖了 $\mathcal{M}(P_n)$ 的所有边, 且各连通分支是相互独立的, 其中 $n=4$ 的情况

如图 1(b) 所示。所以可得 $la(\mathcal{M}(P_n)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(P_n))}{2} \right\rceil$ 。

综上所述, 结论成立。

定理 2 对于 n 阶圈 C_n 的 Mycielski 图 $\mathcal{M}(C_n)$, 其中 $n \geq 3$, 有

$$la(\mathcal{M}(C_n)) = \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil. \quad (4)$$

证明: 由 Mycielski 图的定义可得, 当 $n \geq 4$ 时, n 阶圈 C_n 的 Mycielski 图 $\mathcal{M}(C_n)$ 的最大度 $\Delta(\mathcal{M}(C_n)) = n$, 当 $n=3$ 时, $\Delta(\mathcal{M}(C_n)) = d(v_2) = 4$ 。且与同阶数的 $\mathcal{M}(P_n)$ 相比, $\mathcal{M}(C_n)$ 的边数都多 3 条, 所以 $|E(\mathcal{M}(C_n))| = 4n$ 。

由图的线性荫度的定义可知 $la(\mathcal{M}(C_n)) \geq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 。

要证 $la(\mathcal{M}(C_n)) = \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$, 只要再有 $la(\mathcal{M}(C_n)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 即可, 而这只要将 $\mathcal{M}(C_n)$ 的

边分解成 $\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 个边不交的线性森林, 记分解所得的线性森林为 LF_i , $i = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 。

由引理 1 已知 $la(C_n) = \left\lceil \frac{\Delta(C_n)+1}{2} \right\rceil = 2$, 为了从 C_n 的两个线性森林扩展到 $\mathcal{M}(C_n)$ 的 $\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 个线性森林进行讨论, 首先令 $C_n = P_n \cup \{v_1 v_n\}$ 。

情况 1 当 n 为奇数时, 若 $n \geq 5$, 对 $\mathcal{M}(C_n)$ 进行分解, 由基础图 C_n 由按上述方式分解出的线性森林 P_n 添加 $\mathcal{M}(C_n)$ 的其他边得到

$$LF_1 = P_n \cup \{v_1 v'_2, v_n v'_{n-1}\} \cup \{v'_1 w, v'_2 w\}.$$

由基础图 C_n 按上述方式分解出的线性森林 $\{v_1 v_n\}$ 添加 $\mathcal{M}(C_n)$ 的其他边得到

$$LF_2 = \{v_1 v_n\} \cup \{v_1 v'_n, v_i v'_{i-1}, v_i v'_{i+1} \mid i = 2, 3, \dots, n-1\} \cup \{v'_{n-1} w\}.$$

对 $\mathcal{M}(C_n)$ 剩余的边继续分解得到

$$LF_3 = \{v_n v'_1\} \cup \{v'_3 w, v'_4 w\}, \quad LF_i = \{v'_{2i-3} w, v'_{2i-2} w\}, \quad i = 4, 5, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil - 1, \quad LF_{\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil} = \{v'_{n-2} w, v'_n w\}.$$

由于 LF_1 是由 P_n 的顶点 v_1 依次联边 $v_1 v'_2$ 、 $v'_2 w$ 、 $w v'_1$ ，由顶点 v_n 联边 $v_n v'_{n-1}$ ，得到由 v'_1 到 v'_{n-1} 共计 $n+3$ 条边的路，即连通分支 $\{v'_1, v'_{n-1}\}$ ， LF_2 由 $v_1 v_n$ 的 v_1 联边 $v_1 v'_n$ ，然后按 $v'_{i+1} v_i$ 、 $v_i v'_{i-1}$ ，依次联边，即 i 从 $n-1$ 逐次减小到 2，到达顶点 v'_1 ，得到 v'_n 到 v'_1 路，从 v'_2 开始按 $v'_{i-1} v_i$ 、 $v_i v'_{i+1}$ 顺次 ($i = 3, \dots, 4, n-2$) 联边到 v'_{n-1} ，最后联边 $v'_{n-1} w$ ，得到 v'_2 到 w ， LF_2 两个连通分支 $\{v_n, v'_1\}$ 和 $\{v'_2, w\}$ 总边数为 $2n-1$ ， LF_3 有两个连通分支 $\{v_n, v'_1\}$ 和 $\{v'_3, v'_4\}$ 分别是路 $v_n v'_1$ 和 $v'_3 w v'_4$ ，各 LF_i 的连通分支 $\{v'_{2i-4}, v'_{2i-3}\}$ 是路 $v'_{2i-4} w v'_{2i-3}$ ，

$i = 4, 5, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil - 1$ ， $LF_{\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil}$ 是路 $v'_{n-2} w v'_n$ 。它们都是线性森林，且所有线性森林总边数

$$(n+3) + (2n-1) + 3 + 2 * \left(\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil - 1 - 3 \right) + 2 = 3n + 7 + 2 \left(\frac{n+1}{2} - 4 \right) = 4n.$$

$LF_1 \cup LF_2 \cup \dots \cup LF_{\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil}$ 覆盖了 $\mathcal{M}(C_n)$ 的所有边，而且这些连通分支是相互独立的，其中 $n = 5$ 时，

如图 2(c) 所示。因此可得 $la(\mathcal{M}(C_n)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 。

若 $n = 3$ 时，令

$$LF_1 = \{v_1 v_2, v_2 v_3\} \cup \{v_1 v'_2, v_3 v'_1\} \cup \{v'_1 w, v'_3 w\},$$

$$LF_2 = \{v_1 v_3\} \cup \{v_1 v'_3, v_2 v'_1, v_2 v'_3, v_3 v'_2\} \cup \{v'_2 w\}.$$

LF_1 、 LF_2 的连通分支分别为 $\{v'_1, w\}$ 和 $\{v'_2, v'_3\}$ ，是相互独立的线性森林(如图 2(a)所示)，所以有

$$la(\mathcal{M}(C_3)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_3))}{2} \right\rceil.$$

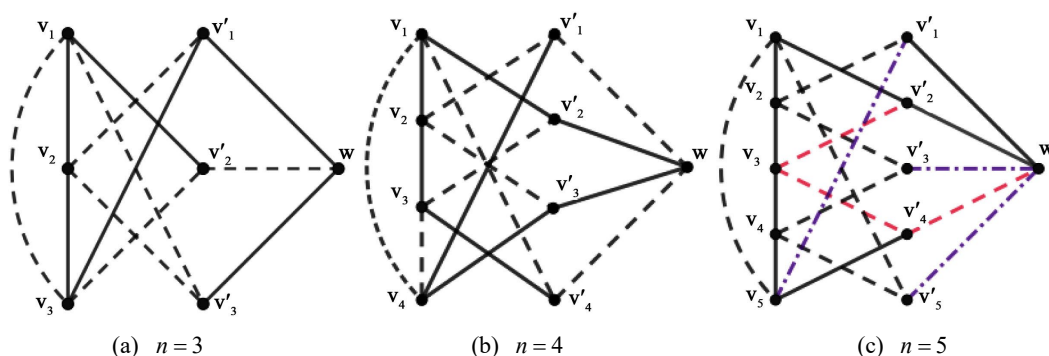


Figure 2. A linear forest decomposition of $\mathcal{M}(C_n)$ when $n = 3, 4, 5$

图 2. 当 $n = 3, 4, 5$ 时 $\mathcal{M}(C_n)$ 的一种线性森林分解

情况 2 当 n 为偶数时，若 $n \geq 6$ ，先由基础图 C_n 由按上述方式分解出的线性森林 P_n 添加 $\mathcal{M}(C_n)$ 的其他边得到 LF_1

$$LF_1 = P_n \cup \{v_1 v'_2, v_n v'_{n-1}\} \cup \{v'_3 w, v'_4 w\}.$$

而由基础图 C_n 分解出的线性森林 $\{v_1 v_n\}$ 添加 $\mathcal{M}(C_n)$ 的其他边得到 LF_2

$$LF_2 = \{v_1 v_n\} \cup \{v_1 v'_n, v_i v'_{i-1}, v_i v'_{i+1} \mid i = 2, 3, \dots, n-1\} \cup \{v'_2 w, v'_{n-1} w\}.$$

对 $\mathcal{M}(C_n)$ 剩余的边继续分解得到

$$LF_3 = \{v_n v'_1\} \cup \{v'_1 w, v'_n w\}, \quad LF_i = \{v'_{2i-3} w, v'_{2i-2} w\}, \quad i = 4, 5, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil.$$

如此分解即得到了 $\mathcal{M}(C_n)$ 的 $\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 个相互独立的线性森林。事实上, LF_1 有两个连通分支

$\{v'_2, v'_{n-1}\}$ 和 $\{v'_3, v'_4\}$, $\{v'_2, v'_{n-1}\}$ 是由 P_n 的顶点 v_1 、 v_n 分别联边 $v_1 v'_2$ 、 $v_n v'_{n-1}$, 得到边数为 $n+1$ 的路, $\{v'_3, v'_4\}$ 为路 $v'_3 w v'_4$ 。 LF_2 仅有一个连通分支 $\{v_n, v'_1\}$, 是由边 $v_1 v_n$ 的顶点 v_1 线联边 $v_1 v'_n$, 然后由 v'_n 依次联边 $v'_{i+1} v_i$ 、 $v_i v'_{i-1}$, 即下标序号依次递减直到 $v'_3 v'_2$, 接着再联边 $v'_2 w$ 、 $w v'_{n-1}$, 从 v'_{n-1} 再按 $v'_i v'_{i-1}, v'_{i-1} v'_{i-2}$ 顺次联边直到 $v'_2 v'_1$, 得到的是一条由 v_n 到 v'_1 的共 $2n$ 条边的路, LF_3 的分支 $\{v_n, v'_n\}$ 即是路 $v_n v'_1 w v'_n$, LF_i 的连通分支 $\{v'_{2i-3}, v'_{2i-2}\}$ 为路 $v'_{2i-3} w v'_{2i-2}$, $i = 4, 5, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 。且有

$$(n+3) + 2n + 3 + 2 * \left(\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil - 3 \right) = 3n + 6 + 2 \left(\frac{n}{2} - 3 \right) = 4n.$$

$LF_1 \cup LF_2 \cup \dots \cup LF_{\left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil}$ 覆盖了 $\mathcal{M}(C_n)$ 的所有边, 而且这些连通分支是两两不交的, 因此可得

$$la(\mathcal{M}(C_n)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil.$$

若 $n=4$ 时, 可将 $\mathcal{M}(C_4)$ 分解为如下的两个互不交的线性森林

$$LF_1 = \{v_1 v_2, v_2 v_3\} \cup \{v_1 v'_2, v_3 v'_4, v_4 v'_1, v_4 v'_3\} \cup \{v'_2 w, v'_3 w\},$$

$$LF_2 = \{v_1 v_4, v_3 v_4\} \cup \{v_1 v'_4, v_2 v'_1, v_2 v'_3, v_3 v'_2\} \cup \{v'_1 w, v'_4 w\}.$$

LF_1 、 LF_2 的连通分支分别为 $\{v'_1, v'_4\}$ 和 $\{v'_2, v'_3\}$, 它们是相互独立的线性森林(如图 2(b)所示), 所以有

$$la(\mathcal{M}(C_4)) \leq \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_4))}{2} \right\rceil.$$

综上所述, $la(\mathcal{M}(C_n)) = \left\lceil \frac{\Delta(\mathcal{M}(C_n))}{2} \right\rceil$ 。

3. 总结

线性荫度作为图论的重要内容, 关于线性荫度的猜想自 1980 年提出后一直是关注的焦点, 众多学者对这一领域的问题进行了深入的研究, 得到了很多有价值的结论。研究中, 通过对很多图类, 包括有限的图类、构造得到的图类、运算得到的图类等验证线性荫度的猜想在这些图类上的正确性, 同时也提出了一下新颖的证明方法, 拓展了图论的理论成果。

本文研究并证明了路与圈的 Mycielski 图的线性荫度, 结果满足线性荫度猜想。本文的研究方法具有

一定的推广价值,可以将其推广到更复杂图类的 Mycielski 图研究中,通过深入研究不断丰富图论中分解问题的理论体系,为解决更多实际问题提供更强大的理论支持。后续我们将继续研究,通过发现新问题提出新方法,以期推动图论研究不断向前发展,为数学领域的进步做出更大的贡献。

基金项目

本文由连云港市哲学社会科学基金一般项目(24LK0028)资助。

参考文献

- [1] Harary, F. (1970) Covering and Packing in Graphs, I. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **175**, 198-205. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1970.tb56470.x>
- [2] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F. (1980) Covering and Packing in Graphs III: Cyclic and Acyclic Invariants. *Mathematica Slovaca*, **30**, 405-417.
- [3] Enomoto, H. and Péroche, B. (1984) The Linear Arboricity of Some Regular Graphs. *Journal of Graph Theory*, **8**, 309-324. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190080211>
- [4] Guldán, F. (1986) The Linear Arboricity of 10-Regular Graphs. *Mathematica Slovaca*, **36**, 225-228.
- [5] Wu, J. and Wu, Y. (2008) The Linear Arboricity of Planar Graphs of Maximum Degree Seven Is Four. *Journal of Graph Theory*, **58**, 210-220. <https://doi.org/10.1002/jgt.20305>
- [6] Wang, H., Wu, J., Liu, B. and Chen, H. (2014) On the Linear Arboricity of Graphs Embeddable in Surfaces. *Information Processing Letters*, **114**, 475-479. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.03.013>
- [7] 闫清华, 向长媛, 徐常青. 无 4-圈的 IC-可平面图线性 2-荫度[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2023, 56(5): 64-76.
- [8] 姜楠, 黄丹君. IC-平面图的线性荫度[J]. 应用数学学报, 2023, 46(1): 114-125.
- [9] 闫清华, 徐常青. 围长至少为 5 的 IC-可平面图线性 2-荫度[J]. 数学的实践与认识, 2026, 56(1): 226-235.
- [10] 黄丹君, 姜楠. 1-平面图的线性荫度[J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(2): 339-352.
- [11] 易思梦. 路和完全图的乘积图的线性荫度[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1494-1499.
- [12] 李萍. 树和路乘积图的线性荫度[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1242-1246.
- [13] 于晓晴. 二部图与完全图的乘积图的线性荫度[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 258-263.
- [14] 刘兆志, 买吐肉孜·买司地克. 1-退化图的乘积图的线性荫度[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(2): 51-62.
- [15] 王继顺. 图 $\mathcal{M}(P_n)$ 和 $\mathcal{M}(C_n)$ 的点可区别边色数[J]. 数学杂志, 2012, 32(2): 363-368.
- [16] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) *Graph Theory with Applications*. Springer.