

常微分 - 波方程系统滑模与自抗扰控制及分析

王子雄, 杨坤一*

北方工业大学理学院, 北京

收稿日期: 2026年9月9日; 录用日期: 2026年10月2日; 发布日期: 2026年10月12日

摘要

本文研究一类具有应变耦合特征的常微分(ODE) - 波方程的级联系统。针对波方程控制端受限于纽曼(Neumann)边界且存在未知有界扰动, 而非受控端受限于狄利克雷(Dirichlet)边界的复杂工况, 分别构建了滑模与自抗扰控制器。首先, 利用可逆变换简化原级联耦合系统。对于滑模控制, 通过构造滑模面, 证明了闭环系统的指数稳定性。对于自抗扰控制, 构建高增益观测器, 对扰动进行实时补偿, 并证明了闭环系统的渐近稳定性。数值仿真结果验证了两种控制策略的有效性。

关键词

ODE-波方程级联系统, 扰动, 滑模控制, 自抗扰控制, 稳定性

Sliding Mode and Active Disturbance Rejection Control of Ordinary Differential-Wave Equations with Perturbations, and Their Analysis

Zixiong Wang, Kunyi Yang*

College of Science, North China University of Technology, Beijing

Received: September 9, 2026; accepted: October 2, 2026; published: October 12, 2026

Abstract

In this paper, we consider an ODE-wave equation cascaded system characterized by strain coupling. To address the complex boundary configuration, where the controlled end of the wave equation is

*通讯作者。

subject to a Neumann condition under unknown bounded disturbances, while the uncontrolled end follows a Dirichlet condition-both sliding mode control (SMC) and active disturbance rejection control (ADRC) are formulated. Initially, an invertible transformation is applied to simplify the original coupled dynamics. Under the SMC framework, a sliding surface is designed to establish the exponential stability of the closed-loop system. Alternatively, the ADRC approach utilizes a high-gain observer for real-time compensation of the disturbance, subsequently ensuring the asymptotic stability of the overall system. Finally, numerical simulations are provided to demonstrate the effectiveness of the two proposed control strategies.

Keywords

ODE-Wave Equation Cascaded System, Disturbance, Sliding Mode Control, Active Disturbance Rejection Control, Stabilization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在深海探测、航空航天以及大型柔性隔振平台中,长距离柔性介质与末端设备构成的级联系统极为常见[1]-[3]。这类系统通常可抽象为一类由 ODE 与波动方程构成的单向级联模型,见本文的系统(1)。其中,波动方程描述拉杆或缆绳等柔性介质中弹性应力波的时空演变;ODE 描述末端负载的内部动力学。此框架使得,对波的动态特性影响常微分方程描述系统行为的分析成为可能[4]-[6]。该系统具有如下核心特征:非受控端受限 Dirichlet 边界条件(如设备锚定状态),柔性介质传导至该处的张力或应变 $u_x(0,t)$ 会作为强耦合干扰直接影响 ODE;控制输入受限远端的 Neumann 边界,即通过执行器施加给边界;控制端暴露于未知的外界扰动。这种通过无穷维介质向有限维系统单向传导扰动的特性,使得仅依赖远端边界来控制实现全局稳定变得具有挑战性。

滑模控制(SMC)因其固有的变结构特性,以及对参数不确定的鲁棒性,在偏微分方程(PDE)的非线性扰动抑制中表现出显著优势。目前,滑模控制已广泛应用于欧拉-伯努利梁方程[7]、波方程[8]、薛定谔方程[9]及热方程[10]等典型的无穷维系统。此后逐步向级联系统拓展,涵盖了 ODE-薛定谔方程[11][12]、ODE-波方程[13]、ODE-热方程[14]、ODE-一阶双曲方程[15]等。尽管参考文献[13]考虑了 Neumann 边界条件下的状态耦合 ODE-波方程,但在端位移受限的实际场景中,系统多呈现为速度耦合特征。边界控制作用机理的本质差异,使得现有文献中的策略失效。

与此同时,韩京清教授提出的自抗扰控制(ADRC)为处理系统内部不确定性或外部干扰提供了全新的视角。通过构建扩张状态观测器(ESO)进行实时补偿,为处理非线性不确定性提供了独特范式。此理论广泛应用于高精密运动控制[7][16]、电力系统稳定性维护以及航空航天等工程领域,并成功从常微分方程拓展至偏微分方程[8]-[10]。学者们先后探讨了具有边界扰动的 ODE-波方程[13]、ODE-热方程[17]等的抗扰控制。但多侧重于状态耦合和速度耦合,或受扰边界与控制边界物理分离的工况。

本文考虑不同的问题:控制输入与未知有界扰动共存于 Neumann 边界,且扰动效应依托波动方程向 Dirichlet 边界发生单向应力级联。本文结构如下,第一节通过可逆变换实现级联系统的解耦与简化;第二节与第三节分别构建滑模控制律与自抗扰控制方案,并分别证明闭环系统的稳定性;第四节通过数值仿真,验证两类控制器的稳定效果。

2. 系统变换

本文考虑一个由 ODE 和波方程耦合的级联系统, 其中, 波方程的输出是常微分方程的输入。波方程在 $x=0$ 处满足 Dirichlet 边界条件, 在 $x=1$ 处受 Neumann 控制, 且该控制受到未知的有界扰动。如图 1 所示:

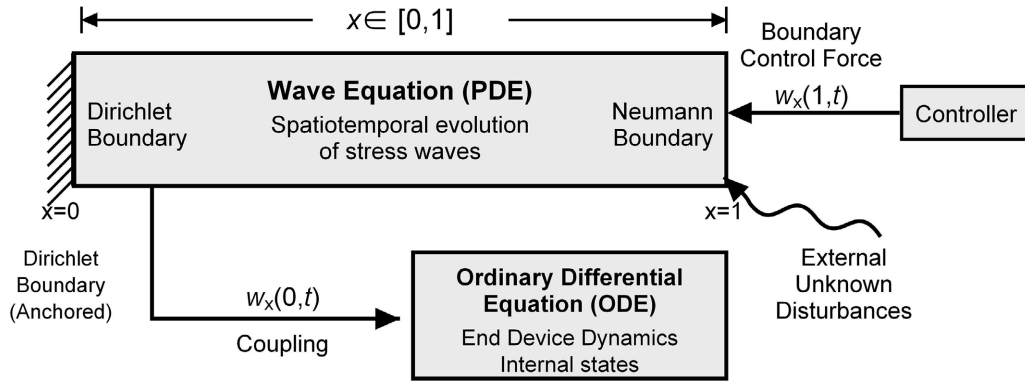


Figure 1. The system schematic diagram

图 1. 系统示意图

系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu_x(0, t), t \geq 0, \\ u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, t \geq 0 \\ u_x(1, t) = U(t) + d(t), t \geq 0 \\ X(0) = X_0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^n$ 分别为给定的矩阵和向量, $X(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $u(x, t) \in \mathbb{R}$ 表示状态, $U(t)$ 为控制输入, $d(t)$ 为有界扰动 ($|d(t)| \leq M$), M 为正常数, 且 $(X_0, u_0, u_1)^T$ 为初值。在能量空间 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n \times H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ 中, 定义内积:

$$\left\langle (X_1, f_1, g_1)^T, (X_2, f_2, g_2)^T \right\rangle_{\mathbb{H}} = X_1^T X_2 + \int_0^1 [f_1'(x) f_2'(x) + g_1(x) g_2(x)] dx. \quad (2)$$

定义系统能量为:

$$E(t) = \|X(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_0^1 [w_x^2(x, t) + w_t^2(x, t)] dx. \quad (3)$$

做如下变换([18]):

$$\begin{cases} X(t) = X(t), \\ w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x p(x, y) u(y, t) dy - \int_0^x q(x, y) u_t(y, t) dy - \gamma(x) X(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中, $p(x, y) = \gamma(x - y)AB$, $q(x, y) = \gamma(x - y)B$, $\gamma(x) = K(0 \quad I)e^{\begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ I & 0 \end{pmatrix}x} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$, 且 $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 使得 $A + BK$

为 Hurwitz 矩阵。此时, 系统(1)可变换为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw_x(0, t), t \geq 0, \\ w_u(x, t) = w_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, t \geq 0, \\ w_x(1, t) = U(t) + d(t) - \int_0^1 p_x(1, y)u(y, t)dy - \int_0^1 q_x(1, y)u_t(y, t)dy - \gamma'(1)X(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

3. 设计滑模控制器并证明闭环系统的稳定性

本节将对系统(5), 设计滑模面, 证明系统在滑模面上的稳定性, 进而设计滑模控制器, 并分析闭环系统的稳定性。

3.1. 滑模面的设计与系统在滑模面上的稳定性分析

定义如下的滑模空间:

$$S^w(t) = \left\{ (X, w, w_t)^T \in \mathbb{H} \mid w(1, t) = \int_0^1 k(x) [w_t(x, t) - w(x, t)] dx \right\}, \quad (6)$$

其中, $k(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e + e^{-1}}$ 。显然, $-1 < k(1) = -1 + \frac{2e^{-1}}{e + e^{-1}} < 0$ 。系统(5)在滑模面上为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw_x(0, t), t \geq 0, \\ w_u(x, t) = w_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, t \geq 0, \\ w(1, t) = \int_0^1 k(x) [w_t(x, t) - w(x, t)] dx, t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

定理 1 在滑模面上的系统(7)是指数稳定的, 即存在正常数 M_0 及 ω_0 , 使得:

$$\|X(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_0^1 [w_x^2(x, t) + w_t^2(x, t)] dx \leq M_0 e^{-\omega_0 t} \left(\|X_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_0^1 [w_0^2(x) + w_1^2(x)] dx \right). \quad (8)$$

证明: 考虑如下的李雅普诺夫(Lyapunov)函数([19]):

$$V(t) = X(t)^T P X(t) + a E_0(t), \quad (9)$$

其中, 矩阵 $P > 0$ 满足 $P(A + BK) + (A + BK)^T P = -I$, a 和 δ 均为正常数, 且

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [w_x^2(x, t) + w_t^2(x, t)] dx + \delta \int_0^1 (x+1) w_x(x, t) w_t(x, t) dx. \quad (10)$$

将(7)中第二式乘 $k(x)$, 并对 x 从 0 到 1 积分, 使用(7)中边界条件得:

$$w_x(1, t) = k(1)^{-1} w_t(1, t), \forall t \geq 0.$$

再由(7), (9)和(10), 并利用柯西不等式得:

$$\dot{V}(t) \leq -\min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a\delta}{2} \right\} E(t), \quad (11)$$

其中, 常数 $0 < \delta < -(k(1) + k(1)^{-1})^{-1}$, $a > 4 \|B^T P\|^2 \delta^{-1}$, 且 $E(t)$ 由(3)式定义。

又由(3), (9)和(10), 可得

$$c_1 E(t) \leq V(t) \leq c_2 E(t), \quad (12)$$

其中, 正常数 $c_1 = \min \left\{ \lambda_{\min}(\mathbf{P}), a \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \right\}$, $c_2 = \max \left\{ \lambda_{\max}(\mathbf{P}), a \left(\frac{1}{2} + \delta \right) \right\}$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 。

则由(11)~(12)得:

$$\dot{V}(t) \leq -c_0 V(t),$$

其中,

$$c_0 = \frac{\min \{1, a\delta\}}{\max \{2\lambda_{\max}(\mathbf{P}), a(1+2\delta)\}}, 0 < \delta < \min \left\{ -\left(k(1)+k(1)^{-1}\right)^{-1}, \frac{1}{2} \right\}, a > 4 \|\mathbf{B}^T \mathbf{P}\|^2 \delta^{-1}.$$

因此, 由格朗沃尔(Gronwall)不等式得:

$$V(t) \leq e^{-c_0 t} V(0). \quad (13)$$

则(8)得证([19])。

最后使用变换(4)将滑模面(6)化为:

$$\begin{aligned} S_w(t) &= u(1, t) - \int_0^1 [p(1, y)u(y, t) + q(1, y)u_t(y, t)] dy + r(1)X(t) \\ &\quad - \int_0^1 k(x) \left[u_t(x, t) - \int_0^x (p(x, y)u_t(y, t) + q(x, y)u_{tt}(y, t)) dy - \gamma(x)\dot{X}(t) \right] dx \\ &\quad + \int_0^1 k(x) \left[u(x, t) - \int_0^x (p(x, y)u(y, t) + q(x, y)u_t(y, t)) dy - \gamma(x)X(t) \right] dx \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

命题 1 在滑模面上的系统(7)可化为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu_x(0, t), t \geq 0, \\ u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, t \geq 0, \\ u(1, t) = \int_0^1 [p(1, y)u(y, t) + q(1, y)u_t(y, t)] dy + \gamma(1)X(t) \\ \quad + \int_0^1 k(x) \left[u_t(x, t) - \int_0^x (p(x, y)u_t(y, t) + q(x, y)u_{tt}(y, t)) dy + \gamma(x)\dot{X}(t) \right] dx \\ \quad - \int_0^1 k(x) \left[u(x, t) - \int_0^x (p(x, y)u(y, t) + q(x, y)u_t(y, t)) dy + \gamma(x)X(t) \right] dx, t \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

由定理 1, 及(7)与(15)的等价性, 则知该系统是指数稳定的。

3.2. 滑模控制器的设计与闭环系统的稳定性分析

由(6)及(15)得:

$$\begin{aligned} \dot{S}_w(t) &= w_t(1, t) - k(1) \left[U(t) + d(t) - \int_0^1 p_x(1, y)u(y, t) dy \right] \\ &\quad + k(1) \left[\int_0^1 q_x(1, y)u_t(y, t) dy \right] + k(1)\gamma'(1)X(t) - S_w(t). \end{aligned} \quad (16)$$

自然地, 可设计滑模控制器为:

$$\begin{aligned} U(t) &= k(1)^{-1} w_t(1, t) - (M + \eta) \frac{S_w(t)}{|S_w(t)|} \\ &\quad + \int_0^1 p_x(1, y)u(y, t) dy + \int_0^1 q_x(1, y)u_t(y, t) dy + \gamma'(1)X(t). \end{aligned}$$

其中, M 为扰动 $d(t)$ 的边界 ($|d(t)| \leq M$), η 为给定的正常数。

此时(16)可化为:

$$\dot{S}_w(t) = k(1)(M + \eta) \frac{S_w(t)}{|S_w(t)|} - k(1)d(t) - S_w(t), \quad (17)$$

即: $\dot{S}_w(t)S_w(t) = k(1)(M + \eta)|S_w(t)| - k(1)d(t)S_w(t) - S_w^2(t)$ 。

则由 $|d(t)| \leq M$ 且 $k(1) < 0$ 得:

$$\dot{S}_w(t)S_w(t) \leq k(1)(M + \eta)|S_w(t)| - k(1)M|S_w(t)| = k(1)\eta|S_w(t)| \leq 0, \quad (18)$$

即为滑模控制的可达条件。

施加滑模控制器后, 系统(5)变为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw_x(0, t), t \geq 0, \\ w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, t \geq 0, \\ w_x(1, t) = k(1)^{-1}w_t(1, t) + \tilde{d}(t), t \geq 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中, $\tilde{d}(t) = -(M + \eta) \frac{S_w(t)}{|S_w(t)|} + d(t)$ 。

将此闭环系统写为:

$$\frac{d}{dt}Z(\cdot, t) = \mathbb{A}Z(\cdot, t) + \mathbb{B}\tilde{d}(t), \quad (20)$$

其中, $Z(\cdot, t) = (X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T$, 且算子 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 定义为:

$$\begin{cases} \mathbb{A}(X, f, g)^T = ((A + BK)X + Bf'(0), g, f'')^T, \\ D(\mathbb{A}) = \{(X, f, g)^T \in \mathbb{R}^n \times H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) | f(0) = g(0) = 0, f'(1) = k(1)^{-1}g(1)\}, \\ \mathbb{B} = (0 \quad 0 \quad \delta(x-1))^T. \end{cases} \quad (21)$$

引理 1 算子 $\mathbb{A}^{-1}$ 存在, 且在 $\mathbb{H}$ 中是紧的。因此, 谱 $\sigma(\mathbb{A})$ 由有限代数重数的离散算子构成。而且 $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(A + BK)$ 。

证明: 根据索伯列夫(Sobolev)嵌入定理([20] [21]), 并使用参考文献([15])中的方法即可证明。

引理 2 算子 $\mathbb{A}$ 生成 $\mathbb{H}$ 中紧且指数稳定的 C_0 -半群 $e^{\mathbb{A}t}$ 。

证明: 首先, 定义如下的新内积([22]):

$$\langle (X_1, f_1, g_1)^T, (X_2, f_2, g_2)^T \rangle = X_1^T X_2 + \int_0^1 [e^{\alpha(1-x)}(f_1' + g_1)(f_2' + g_2) + e^{\alpha(x-1)}(f_1' - g_1)(f_2' - g_2)] dx. \quad (22)$$

其中, α 为正常数, 则对应的范数为:

$$\|(X, f, g)^T\|_{\mathbb{H}}^2 = |X|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_0^1 [e^{\alpha(1-x)}(f' + g)^2 + e^{\alpha(x-1)}(f' - g)^2] dx. \quad (23)$$

显然(22)和(23)分别与(2)和(3)等价。

由(21)计算可得:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbb{A}(X, f, g)^T, (X, f, g)^T \right\rangle_1 &= X^T (A + BK)^T X + B^T X f'(0) + 2k(1)^{-1} g(1)^2 - \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} f'(0)^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \left[e^{\alpha(1-x)} (f' + g)^2 + e^{\alpha(x-1)} (f' - g)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

则由杨(Young)不等式和 $k(1) < 0$, 得 $\langle \mathbb{A}(X, f, g), (X, f, g) \rangle_1 \leq M \|(X, f, g)\|_1^2$, 其中, 正常数

$$M = \max \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \|A + BK\|^2 + \frac{\|B\|^2}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \right], \frac{\alpha}{2} \right\},$$

即算子 $\mathbb{A} - MI$ 耗散。进一步地, 根据卢默 - 菲利普斯(Lumer-Phillips)定理, 算子 $\mathbb{A}$ 生成 $\mathbb{H}$ 中的紧 C_0 -半群 $e^{\mathbb{A}t}$ ([23])。再使用, 与(9)~(13)相同的乘法([19]), 则引理 2 得证。

引理 3 算子 $\mathbb{B}$ 对于由算子 $\mathbb{A}$ 生成的半群 $e^{\mathbb{A}t}$ 是可允许的(admissible)。

证明: 首先, 分别求 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 的对偶算子 $\mathbb{A}^*$ 和 $\mathbb{B}^*$ ([24]):

$$\begin{cases} \mathbb{A}^*(Y, \varphi, \phi)^T = \left((A + BK)^T Y, -\phi, -\varphi'' \right)^T, \\ D(\mathbb{A}^*) = \left\{ (Y, \varphi, \phi)^T \in \mathbb{R}^n \times H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) \mid \phi(0) = B^T Y, \varphi'(1) = -k(1)^{-1} \phi(1) \right\}, \\ \mathbb{B}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle \delta(x-1), \cdot \rangle \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (24)$$

则得系统(19)的对偶系统:

$$\begin{cases} \dot{X}^*(t) = (A + BK)^T X^*(t), t \geq 0, \\ w_{tt}^*(x, t) = w_{xx}^*(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w_t^*(0, t) = -B^T X^*(t), t \geq 0, \\ w_x^*(1, t) = k(1)^{-1} w_t^*(1, t), t \geq 0, \\ y(t) = w_t^*(1, t), t \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

其次, 对 $\forall (X, f, g)^T \in \mathbb{H}$, 由(24)计算得:

$$\mathbb{B}^* \mathbb{A}^{*-1} (X, f, g)^T = -f(1). \quad (26)$$

即算子 $\mathbb{B}^* \mathbb{A}^{*-1}$ 从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{C}$ 有界。

然后, 对系统(25), 定义能量([19]):

$$E^*(t) = X^*(t)^T P X^*(t) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[w_x^{*2}(x, t) + w_t^{*2}(x, t) + \delta(x+1) w_x^*(x, t) w_t^*(x, t) \right] dx, \quad (27)$$

其中, 矩阵 P 和正常数 δ 的定义与(9)和(10)中相同。

由系统(25), 可得如下估计:

$$\dot{E}^*(t) \leq -\left| X^*(t) \right|_{\mathbb{R}^n}^2 - \left[-k(1)^{-1} - \delta(1 + k(1)^{-2}) \right] w_t^{*2}(1, t) + \left(\frac{1}{2\delta} - \frac{\delta}{2} \right) \left| B^T X^*(t) \right|^2. \quad (28)$$

令 $0 < \delta < -\left(k(1) + k(1)^{-1} \right)^{-1}$, 则上式可化为:

$$\dot{E}^*(t) \leq \left[\left(\frac{1}{2\delta} - \frac{\delta}{2} \right) \|B\|^2 - 1 \right] \left| X^*(t) \right|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (29)$$

又由(25)中第一式([15])得: $X^*(t) = e^{(A+BK)^T t} X_0^*$, 且 $A + BK$ 为 Hurwitz 矩阵, 则

$$\left| \mathbf{X}^*(t) \right|_{\mathbb{R}^n} \leq M^* e^{-\omega^* t} \left| \mathbf{X}_0^* \right|_{\mathbb{R}^n}, \forall t \geq 0, \quad (30)$$

其中, M^*, ω^* 为正常数。

下面根据参考文献[15]第 15 页的方法分析 $E^*(t)$ 。

设正常数 $\zeta = \max \left\{ \left(\frac{1}{2\delta} - \frac{\delta}{2} \right) \|\mathbf{B}\|^2 - 1, 0 \right\}$, 则由(29)和(30)得:

$$E^*(T) \leq E^*(0) + M^{*2} T \zeta \left| \mathbf{X}_0^* \right|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (31)$$

进一步假设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$, 又由(29)得: $E^*(t) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \left| \mathbf{X}^*(t) \right|_{\mathbb{R}^n}^2$ 。

则(31)变为:

$$E^*(T) \leq \left(1 + \frac{M^{*2} T}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \zeta \right) E^*(0). \quad (32)$$

使用与以上类似的推导过程可得:

$$\int_0^T E^*(t) dt \leq T \left(1 + \frac{M^{*2} T}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \zeta \right) E^*(0). \quad (33)$$

接下来, 定义乘子 $\rho^*(t) = \int_0^1 x w_x^*(x, t) w_t^*(x, t) dx$ 。由(27)得: $|\rho^*(t)| \leq \frac{1}{1-2\delta} E^*(t)$, 其中, 常数 $0 < \delta < \min \left\{ -\left(k(1) + k(1)^{-1} \right)^{-1}, \frac{1}{2} \right\}$ 。又由系统(25)得:

$$\int_0^T w_t^{*2}(1, t) dt = \frac{2}{1+k(1)^{-2}} \left\{ \rho^*(T) - \rho^*(0) + \int_0^T \left[\int_0^1 \left(w_x^{*2}(x, t) + w_t^{*2}(x, t) \right) dx \right] dt \right\}. \quad (34)$$

因此, 由(27)和(32)~(34)得:

$$\int_0^T w_t^{*2}(1, t) dt \leq \frac{2}{(1+k(1)^{-2})(1-2\delta)} \left[\left(2 + \frac{M^{*2} T}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \zeta \right) + \frac{2T}{1-2\delta} \left(1 + \frac{M^{*2} T}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \zeta \right) \right] E^*(0). \quad (35)$$

又由(27), 则引理 3 得证([25])。

定理 2 对任意初值 $(\mathbf{X}_0, w_0, w_1)^T \in \mathbb{H}$, 且 $S_w(0) \neq 0$, 闭环系统(19)存在唯一解:

$$(\mathbf{X}(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T \in C([0, T_{\max}; \mathbb{H}]),$$

其中, $T_{\max} > 0$ 为某一时刻。当 $t \geq T_{\max}$ 时, $S_w(t) = 0$, 且系统(19)可化为(7)。而且, $S_w(t)$ 在区间 $[0, T_{\max}]$ 上连续且单调, 此外, $S_w(T_{\max}) = 0$ 。

证明: 根据引理 3, 对 $\forall T > 0$ 以及 $(\mathbf{X}_0, w_0, w_1)^T \in \mathbb{H}$, 若当 $t \in [0, T]$ 时, $S_w(t) \in C[0, T], S_w(t) \neq 0$, 则闭环系统(19)存在唯一解 $(\mathbf{X}(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T \in C([0, T; \mathbb{H}])$ 。由于, 当 $S_w(t) < 0$ 时, 证明过程类似。因此, 不失一般性, 可假设对于 $\forall t \geq 0$, $S_w(t) > 0$ 。又由(16)得:

$$S_w(t) \leq e^{-t} S_w(0) + k(1) \eta (1 - e^{-t}).$$

则由(6)知, 当 $S_w(t) > 0$ 时, 在最大区间 $[0, T_{\max})$ 内存在唯一且连续的解 $S_w(t)$, 且 $S_w(T_{\max}) = 0$ 。此外, 由(17)得, $S_w(t)$ 在区间 $[0, T_{\max})$ 上是单调减函数, 且当 $t \in [0, T_{\max})$ 时, 有 $S_w(t) > 0$ 。由于 $S_w(t)$ 连续, 且根据可达条件(18), 则当 $t \geq T_{\max}$ 时有, $S_w(t) = 0$ 。

4. 设计自抗扰控制器并证明闭环系统的稳定性

本节将对系统(1)设计自抗扰控制器, 并分析闭环系统的稳定性。为此假设扰动 $d(t)$ 满足 $|d(t)| \leq M$, $|\dot{d}(t)| \leq M$, 其中, M 为正常数。

4.1. 系统的适定性

本小节分析系统(1)的适定性。由于(1)与(5)可通过等价变换(4)互相推导, 则只需考虑系统(5)的适定性。引入控制律:

$$U(t) = -kw_t(1, t) + U_0(t) + \int_0^1 p_x(1, y)u(y, t)dy + \int_0^1 q_x(1, y)u_t(y, t)dy + \gamma'(1)X(t), k > 0,$$

其中, $U_0(t)$ 为新的控制器。

此时系统(5)变为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw_x(0, t), t \geq 0, \\ w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, t \geq 0, \\ w_x(1, t) = -kw_t(1, t) + U_0(t) + d(t), t \geq 0, k > 0. \end{cases} \quad (36)$$

将此系统写成算子形式:

$$\frac{d}{dt}Z(\cdot, t) = \mathcal{A}Z(\cdot, t) + \mathcal{B}[U_0(t) + d(t)], \quad (37)$$

其中, $Z(\cdot, t) = (X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T$, 且算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 定义为:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(X, f, g)^T = ((A + BK)X + Bf'(0), g, f'')^T, \\ D(\mathcal{A}) = \{(X, f, g)^T \in \mathbb{H} \times H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) | f(0) = g(0) = 0, f'(1) = -kg(1)\}, \\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(x-1) \end{pmatrix}^T. \end{cases} \quad (38)$$

根据(21)中算子 $\mathcal{A}$ 定义, 以及引理 1~引理 3, 直接可得如下的引理。

引理 4 $\mathcal{A}^{-1}$ 在 $\mathbb{H}$ 中存在且是紧的。因此, 谱 $\delta(\mathcal{A})$ 仅由有限代数重数的离散特征值构成, 而且 $\delta(\mathcal{A}) = \delta(A + BK)$ 。

引理 5 算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{H}$ 上生成紧的, 指数稳定的 C_0 -半群 $e^{\mathcal{A}t}$ 。

引理 6 算子 $\mathcal{B}$ 对于 $\mathcal{A}$ 生成的半群 $e^{\mathcal{A}t}$ 是可允许的。

定理 3 对于任意初值 $(X_0, w_0, w_1)^T \in \mathbb{H}$, 控制输入 $U_0(t) \in L_{loc}^2(0, \infty)$ 以及扰动 $d(t) \in L_{loc}^2(0, \infty)$, 系统(36)存在唯一解: $(X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T \in C([0, +\infty; \mathbb{H}])$ 。

证明: 经直接计算可得, 算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的对偶算子 $\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{B}^*$, 如下:

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*(Y, \varphi, \phi)^T = ((A + BK)^T Y, -\phi, -\varphi'')^T, \\ D(\mathcal{A}^*) = \{(Y, \varphi, \phi)^T \in \mathbb{H} \times H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) | \phi(0) = B^T Y, \varphi'(1) = k\phi(1)\}, \\ \mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle \delta(x-1), \cdot \rangle \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (39)$$

根据(38)和(39)中算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ 的定义, 并结合引理 4~引理 6, 定理则得证。

4.2. 自抗扰控制器的设计及闭环系统的稳定性分析

本小节构造高增益预估器, 进而设计自抗扰控制器。

首先引入如下的函数:

$$y_1(t) = \int_0^1 x w_t(x, t) dx, y_2(t) = w(1, t), t \geq 0. \quad (40)$$

利用(36)得: $\dot{y}_1(t) = -k\dot{y}_2(t) - y_2(t) + U_0(t) + d(t), t \geq 0, k > 0$ 。

构造高增益预估器: ([26])

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}}(t) = -k\dot{\hat{y}}_2(t) - \hat{y}_2(t) + U_0(t) + \hat{d}(t) - \frac{1}{\varepsilon}(\hat{y}(t) - y_1(t)), t \geq 0, k > 0, \\ \dot{\hat{d}}(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}(\hat{y}(t) - y_1(t)), t \geq 0, \end{cases} \quad (41)$$

其中, ε 为充分小的正常数。

定义误差函数: $\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) - y_1(t), \tilde{d}(t) = \hat{d}(t) - d(t), t \geq 0$ 。并使用(40)~(41)得:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\tilde{y}(t) + \tilde{d}(t), t \geq 0, \\ \dot{\tilde{d}}(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{y}(t) - \dot{d}(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (42)$$

将此系统写为:

$$\frac{d}{dt}(\tilde{y}(t), \tilde{d}(t))^T = A_0(\tilde{y}(t), \tilde{d}(t))^T + B_0\dot{d}(t), \quad (43)$$

其中,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

自然地, 可设计系统(36)的自抗扰控制器为:

$$U_0(t) = -\hat{d}(t), t \geq 0, \quad (45)$$

则得如下的闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw_x(0, t), t \geq 0, \\ w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0 \\ w(0, t) = 0, t \geq 0, \\ w_x(1, t) = -kw_t(1, t) - \hat{d}(t) + d(t), t \geq 0, k > 0, \\ \dot{\hat{y}}(t) = -k\dot{\hat{y}}_2(t) - \hat{y}_2(t) + U_0(t) + \hat{d}(t) - \frac{1}{\varepsilon}(\hat{y}(t) - y_1(t)), t \geq 0, k > 0, \\ \dot{\hat{d}}(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}(\hat{y}(t) - y_1(t)), t \geq 0. \end{cases} \quad (46)$$

此闭环系统等价于:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw_x(0, t), t \geq 0, \\ w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, t \geq 0, \\ w_x(1, t) = -kw_t(1, t) - \tilde{d}(t), t \geq 0, k > 0, \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\tilde{y}(t) + \tilde{d}(t), t \geq 0, \\ \dot{\tilde{d}}(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{y}(t) - \dot{\tilde{d}}(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (47)$$

定理 4 对于任意初值 $(X_0, w_0, w_1)^T \in \mathbb{H}$ 及扰动 $d(t)$ ($|d(t)| \leq M, |\dot{d}(t)| \leq M$), 闭环系统(47)存在唯一解 $(X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T \in C(0, \infty; \mathbb{H})$ 。而且, 当 $t \rightarrow \infty$ 且 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 系统(47)的解 $(X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T$ 趋于零。

证明: 对于闭环系统(47), 首先分析函数 $\tilde{y}(t)$ 和 $\tilde{d}(t)$ 的收敛性。求解(43)可得:

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(t) \\ \tilde{d}(t) \end{pmatrix} = e^{A_0 t} \begin{pmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{d}(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A_0(t-s)} B_0 \dot{d}(s) ds. \quad (48)$$

对于(44)式定义的矩阵 A_0 和 B_0 , 计算可得:

$$\begin{cases} e^{A_0 t} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 \lambda_2 (-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) & -\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \\ e^{A_0 t} B_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (49)$$

其中, 常数 $\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2\varepsilon}, \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2\varepsilon}$ 。因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 且 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 若扰动 $d(t)$ 满足 $|d(t)| \leq M, |\dot{d}(t)| \leq M$, 则系统(47)的解 $\tilde{y}(t)$ 和 $\tilde{d}(t)$ 收敛于零, 即(48)满足: 当 $t \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\tilde{y}(t) \rightarrow 0, \tilde{d}(t) \rightarrow 0. \quad (50)$$

因此, 对任意足够小的正数 ε_1 , 存在 $T_0 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$, 使得: 当 $t > T_0$ 且 $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ 时, $|\tilde{d}(t)| < \varepsilon_1$ 。

接下来, 考虑(47)的解 $(X(t), w(x, t), w_t(x, t))^T$, 将其表示为:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X(t) \\ w(\cdot, t) \\ w_t(\cdot, t) \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} X(t) \\ w(\cdot, t) \\ w_t(\cdot, t) \end{pmatrix} + \mathcal{B} [-\tilde{d}(t)], \quad (51)$$

其中, 算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 由(38)式定义。根据引理 6 和(50), 对任意初值 $(X_0, w_0, w_1)^T \in \mathbb{H}$, 系统(47)存在唯一解: $(X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T \in C(0, +\infty; \mathbb{H})$ ([27]), 并且,

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ w(\cdot, t) \\ w_t(\cdot, t) \end{pmatrix} = e^{\mathcal{A}t} \begin{pmatrix} X_0 \\ w_0(\cdot) \\ w_1(\cdot) \end{pmatrix} - e^{\mathcal{A}(t-T_0)} \cdot \int_0^{T_0} e^{\mathcal{A}(T_0-s)} \mathcal{B} \tilde{d}(s) ds - \int_{T_0}^t e^{\mathcal{A}(t-s)} \mathcal{B} \tilde{d}(s) ds. \quad (52)$$

根据引理 5, 存在正常数 L_1 和 ω_1 使得([23]): $\|e^{\mathcal{A}t}\|_{\mathbb{H}} \leq L_1 e^{-\omega_1 t}$ 。且根据引理 6 有: ([25])

$$\left\| \int_0^{T_0} e^{\mathcal{A}(T_0-s)} \mathcal{B} \tilde{d}(s) ds \right\|_{\mathbb{H}} \leq C_{T_0} \|\tilde{d}(s)\|_{L_{loc}^2(0, T_0)} \leq C_{T_0} T_0 M, \quad (53)$$

其中, C_{T_0} 为给定的正常数。使用参考文献[25]中命题 2.5 和(50), 存在 $L > 0$ 使得:

$$\left\| \int_{T_0}^t e^{A(T_0-s)} \mathcal{B} \tilde{d}(s) ds \right\|_{\mathbb{H}} = \left\| \int_0^t e^{A(T_0-s)} \mathcal{B} \left(0 \diamond_{T_0} \tilde{d}(s) \right) ds \right\|_{\mathbb{H}} \leq L \left\| 0 \diamond_{T_0} \tilde{d}(s) \right\|_{L^\infty(0,\infty)} \leq L \varepsilon_1, \quad (54)$$

其中,

$$(u \diamond_{\tau} v)(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ v(t), & t > \tau. \end{cases} \quad (55)$$

综上所述, 解(52)满足:

$$\left\| \begin{pmatrix} X(t) \\ w(\cdot, t) \\ w_i(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}} \leq L_1 e^{-\omega_1 t} \left\| \begin{pmatrix} X_0 \\ w_0(\cdot) \\ w_1(\cdot) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}} + L_1 C_{T_0} e^{-\omega_1(t-T_0)} T_0 M + L \varepsilon_1. \quad (56)$$

由于 $\varepsilon_1 > 0$ 任意, 则当 $t \rightarrow \infty$ 且 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 闭环系统(47)的解 $(X(t), w(x, t), w_i(x, t))^T$ 收敛到零。

5. 控制策略比较以及数值模拟

5.1. 控制策略的比较与讨论

本小节对滑模控制以及自抗扰控制进行比较:

在系统镇定机理上, SMC 设定增益的前提是已知外部扰动 $d(t)$ 的理论上限 M , 由于在构造滑模面的过程中使用了可逆变换, 故可推导出该方程的指数稳定。ADRC 依靠状态观测器来重构边界扰动, 放宽了对边界信息的依赖。但受限于本模型的动力学特征, 闭环系统只能呈现渐进稳定。

SMC 依靠增益 η 来匹配扰动项, 符号函数的非连续切换会激发高频抖振, 故本模型采用 $\tanh$ 函数设定边界层来进行控制, 但这往往会影响仿真的精度。而, ADRC 解耦了总扰动, 输出的边界控制信号可保持连续形态。对于带有大惯量的被控对象, 该特性可避免瞬间激振导致的仪器疲劳损耗。

在控制器离散化部署方面, SMC 的算力消耗偏低, 且参数空间维度低。而, ADRC 需要实时计算扰动, 计算更复杂。同时在实际控制中, 观测器带宽的选择颇具挑战性。

5.2. 数值模拟

本节分别对施加滑模控制器和自抗扰控制器的两个闭环系统进行数值模拟。首先, 对于施加滑模控制的闭环系统(19), 选择如下初值和参数:

$$\begin{cases} X_0 = (1, 1)^T, w_0(x) = x, w_1(x) = -x, d(t) = \sin(t), M = 1, \eta = 0.1, \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (57)$$

空间和时间步长分别取为 10^{-2} 和 10^{-4} 。使用有限差分法对系统(19)进行模拟, 得图 2。如图所示, 随着时间的推移, 系统(19)的状态和速度均迅速收敛至零。模拟结果表示, 滑模控制器具有显著的稳定效果。

接下来对 SMC 关键参数进行敏感性分析: 针对 SMC 的三个参数 M, η 以及边界层参数进行全要素扫描, 以系统能量为指标, 其中 M 是最敏感参数, 且对于能量影响较大 $M = 0.5$ 时 $\|X(T)\| = 0.447$; $M = 2.0$ 时降至 0.094。边界层参数次之, η 则是在基线附近低敏感, 即超过扰动幅值时, 再增大 η 对系统影响较小。

下面对 SMC 进行鲁棒性分析, 对系统施加阶跃、正弦、方波、随机等不同类型的扰动, 考察系统当扰动幅值跨越到达条件 $M + \eta = 1.1$ 时, 系统性能的变化。

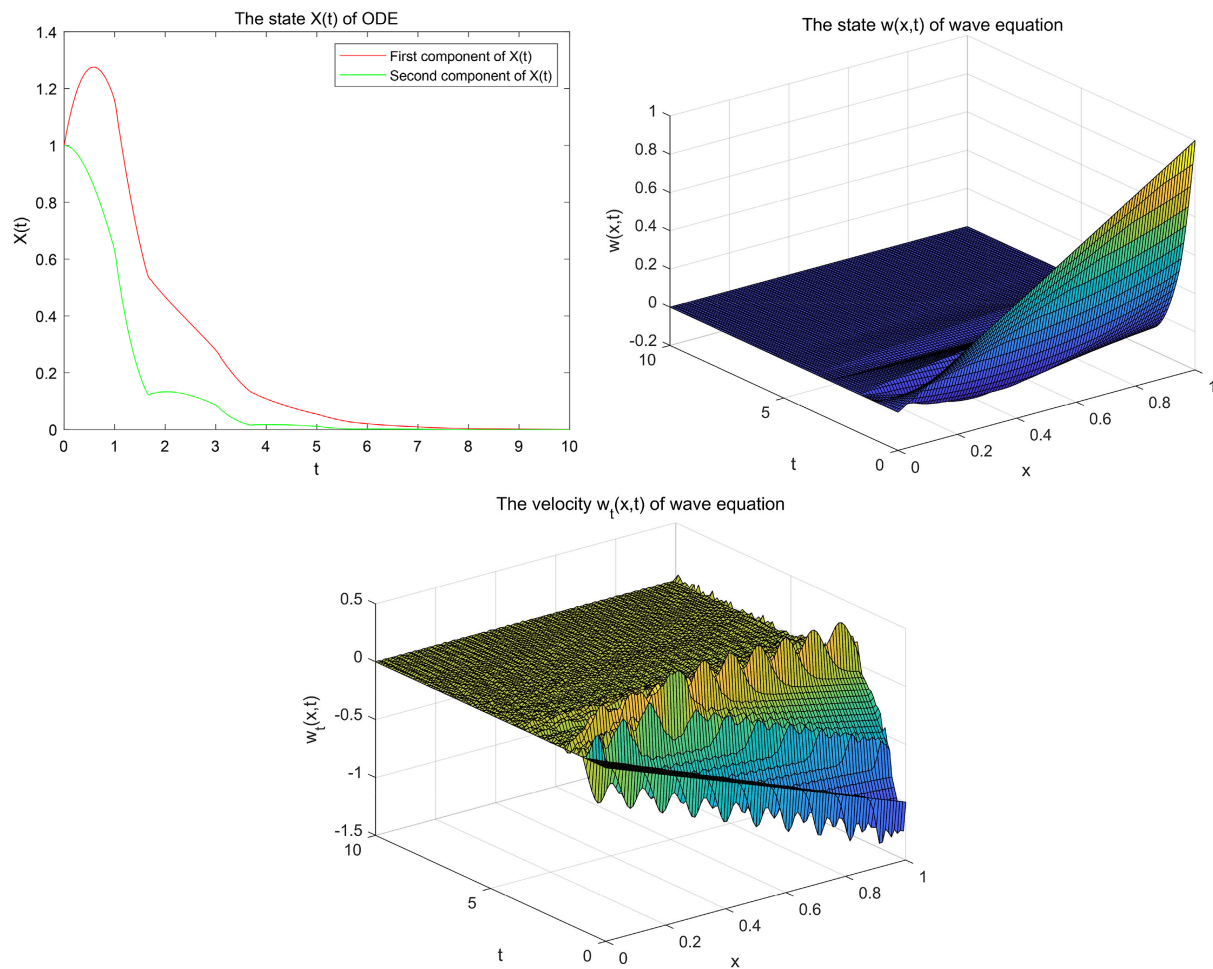


Figure 2. Numerical simulation of the closed-loop system (19) with sliding mode control
图 2. 施加滑模控制的闭环系统(19)的数值模拟

如图 3 左子图, 在 $A=1.1$ 处有一条虚线, 可以看到在虚线左侧, 所有类型状态的最大值都较小, 性能

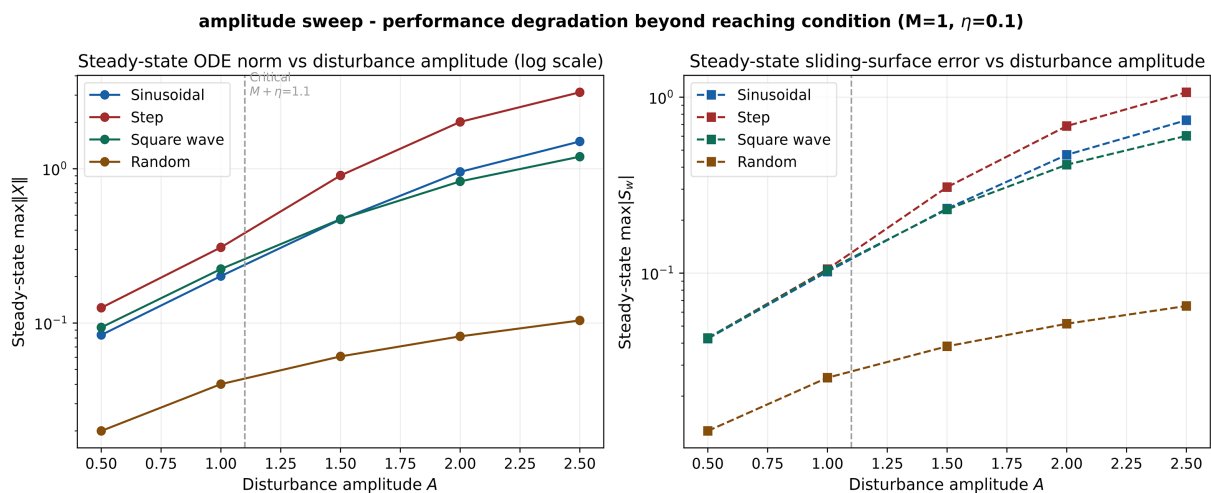


Figure 3. Robustness analysis of the closed-loop system (19) under sliding mode control
图 3. 施加滑模控制的闭环系统(19)的鲁棒性分析

良好。虚线右侧, 性能开始退化。其中阶跃扰动退化最快, 正弦和方波退化趋势较为接近, 随机曲线几乎不受影响。但即使是退化最快的阶跃跳动, 系统仍然没有发散, 只是稳态偏差增大。图 3 右子图趋势与左图一致, 滑模面偏差随 A 的增大而增大。在四种扰动下, 系统始终保持有界, 虽然幅值超临界后性能退化但不发散。

其次, 对施加自抗扰控制器的闭环系统(46)进行模拟, 初值和参数选择如下:

$$\begin{cases} X_0 = (1, 2)^T, w_0(x) = x^2, w_1(x) = x+1, k=1, d(t) = \cos t, \varepsilon = 10^{-3}, \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (58)$$

空间和时间步长分别取 10^{-2} 和 10^{-4} 。使用有限差分法对系统(46)进行模拟, 得图 4。观察图 4 可知, 随着时间的推移, 系统(46)的状态和速度均迅速收敛至零。模拟结果表明, 自抗扰控制器具有显著的稳定性效果。

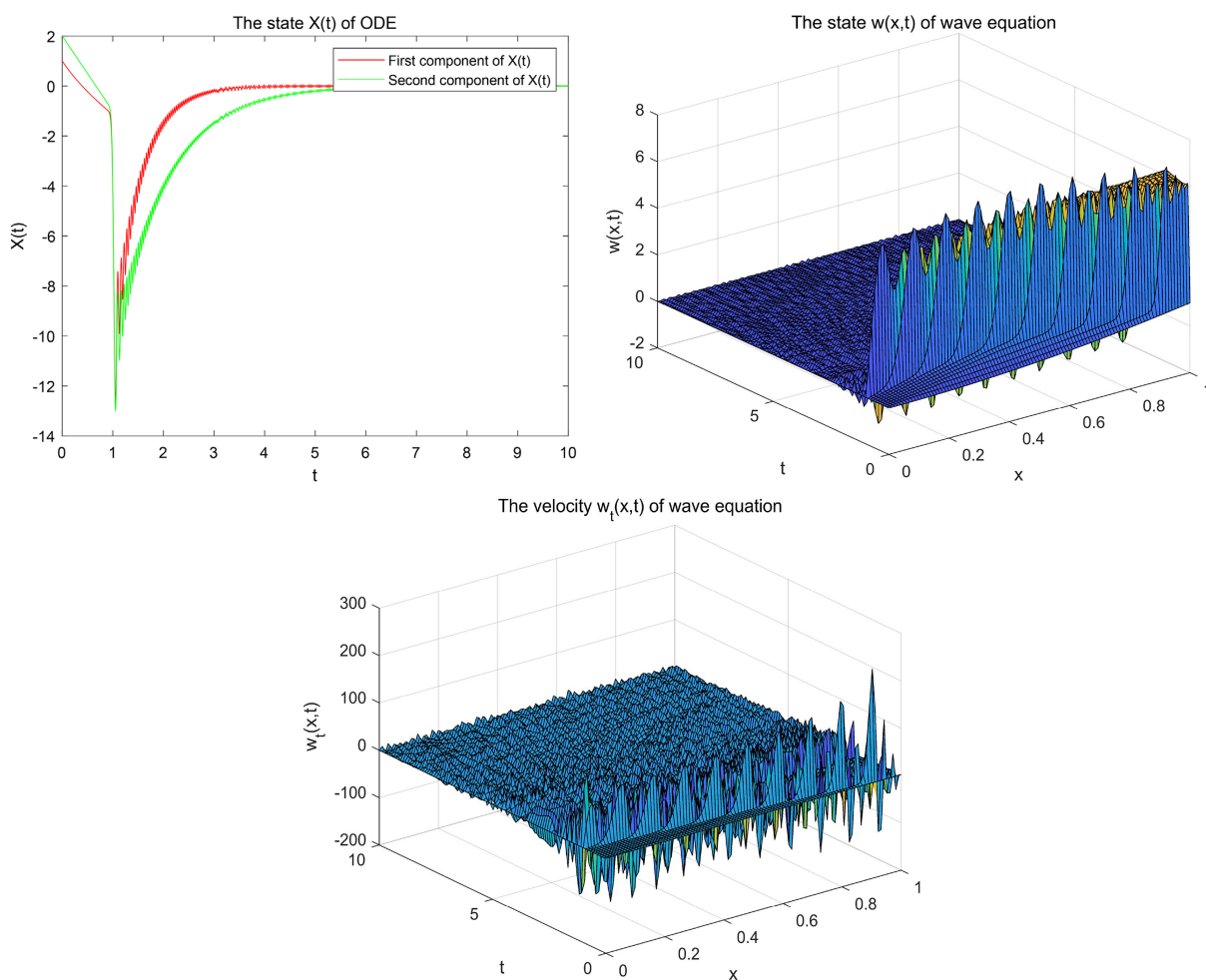


Figure 4. Numerical simulation of the closed-loop system (46) for active disturbance rejection control

图 4. 施加自抗扰控制的闭环系统(46)的数值模拟

接下来对 ADRC 关键参数进行敏感性分析: 以能量衰减率和反射系数作为指标可以看出 PDE 子系统的收敛速度对边界阻尼非常敏感, 且存在一个最优值 $k=1$, 偏离该点时速率迅速下降, 见图 5。

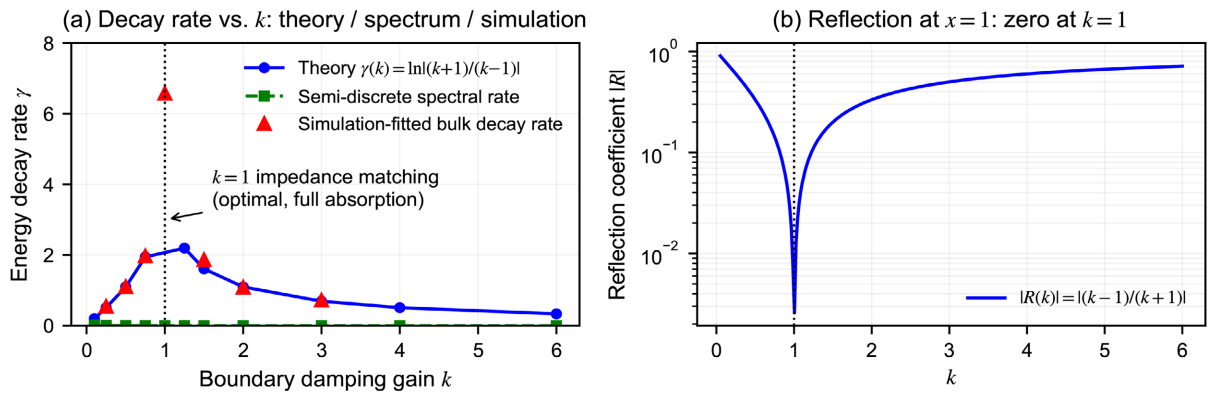


Figure 5. Parameter sensitivity analysis of the closed-loop system (46) under ADRC

图 5. 施加自抗扰控制的闭环系统(46)参数的敏感性分析

下面对 ADRC 进行鲁棒性分析, 对系统施加余弦、阶跃、方波和斜坡等不同类型的扰动后系统的估计误差, 响应幅值和能量, 见图 6。

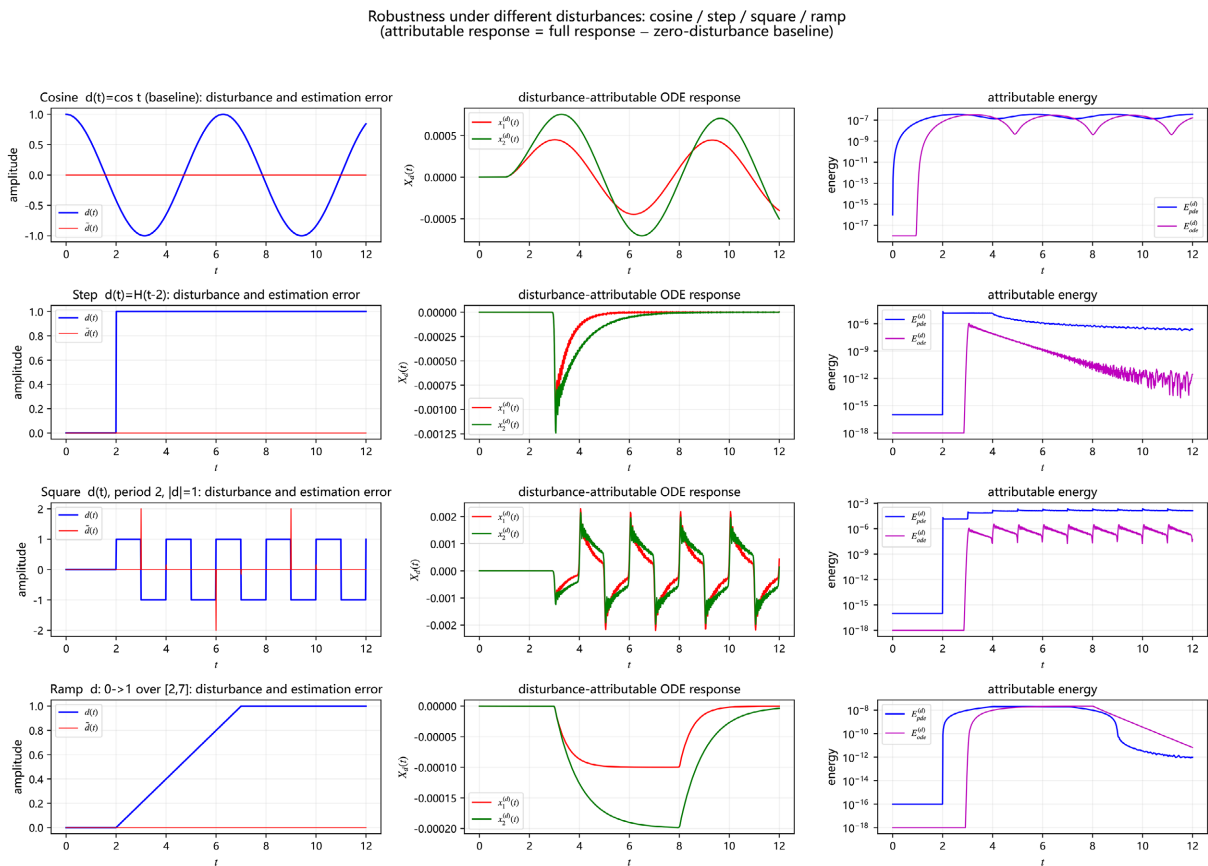


Figure 6. Robustness Analysis of the Closed-Loop System (46) under Sliding Mode Control

图 6. 施加自抗扰控制的闭环系统(46)的鲁棒性分析

图 5 中第一列为扰动与扰动误差估计, 由此可以看出估计器的跟踪效果较好, 系统受扰动影响较小。第二列为系统响应幅值, 虽然方波扰动在反复跳变, 但可以看出其仍然有界且值很小。第三列表示扰动注入系统的能量, 可以看到进入的能量值都很小, 结果表明 ADRC 具有较强的鲁棒性。

参考文献

- [1] 田强, 刘钺, 李培, 胡海岩. 多柔体系统动力学研究进展与挑战[J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(5): 385-405.
- [2] 徐建亮, 毛海军, 徐友洪, 毕少平. 基于自适应动态规划的柔性机械臂跨尺度运动控制研究[J]. 动力系统与控制, 2025, 14(2): 116-129.
- [3] 洪嘉振, 尤超蓝. 刚柔耦合系统动力学研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2004, 2(2): 1-6.
- [4] Han, Z.J. and Zuazua, E. (2016) Decay Rates for 1-d Heat-Wave Planar Networks. *Networks and Heterogeneous Media*, **11**, 655-692. <https://doi.org/10.3934/nhm.2016013>
- [5] Valein, J. and Zuazua, E. (2009) Stabilization of the Wave Equation on 1-D Networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 2771-2797. <https://doi.org/10.1137/080733590>
- [6] Than, A.A. and Wang, J. (2021) Output Feedback Stabilization of Cascaded ODE-Wave Equations with Time Delay in Observation. *Asian Journal of Control*, **23**, 449-462. <https://doi.org/10.1002/asjc.2217>
- [7] Guo, B.Z. and Jin, F.F. (2013) The Active Disturbance Rejection and Sliding Mode Control Approach to the Stabilization of the Euler-Bernoulli Beam Equation with Boundary Input Disturbance. *Automatica*, **49**, 2911-2918. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.06.018>
- [8] Guo, B.Z. and Jin, F.F. (2012) Sliding Mode and Active Disturbance Rejection Control to Stabilization of One-Dimensional Anti-Stable Wave Equations Subject to Disturbance in Boundary Input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**, 1269-1274. <https://doi.org/10.1109/tac.2012.2218669>
- [9] Guo, B.Z. and Liu, J.J. (2014) Sliding Mode Control and Active Disturbance Rejection Control to the Stabilization of One-Dimensional Schrödinger Equation Subject to Boundary Control Matched Disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**, 2194-2212. <https://doi.org/10.1002/rnc.2977>
- [10] Liu, J.J. and Wang, J.M. (2015) Active Disturbance Rejection Control and Sliding Mode Control of One-Dimensional Unstable Heat Equation with Boundary Uncertainties. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **32**, 97-117. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnt034>
- [11] Kang, W. and Fridman, E. (2016) Sliding Mode Control of Schrödinger Equation-ODE in the Presence of Unmatched Disturbances. *Systems & Control Letters*, **98**, 65-73. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2016.10.009>
- [12] Liu, J.J. (2018) Sliding Mode Control to Stabilization of an ODE-Schrödinger Cascade Systems Subject to Boundary Control Matched Disturbance. *Journal of Systems Science and Complexity*, **31**, 1146-1163. <https://doi.org/10.1007/s11424-018-6286-x>
- [13] Liu, J.J. and Wang, J.M. (2017) Boundary Stabilization of a Cascade of ODE-Wave Systems Subject to Boundary Control Matched Disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **27**, 252-280. <https://doi.org/10.1002/rnc.3572>
- [14] Wang, J.M., Liu, J.J., Ren, B., et al. (2015) Sliding Mode Control to Stabilization of Cascaded Heat PDE-ODE Systems Subject to Boundary Control Matched Disturbance. *Automatica*, **52**, 23-34. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.117>
- [15] Zhou, H.C. and Guo, B.Z. (2019) Stabilization of ODE with Hyperbolic Equation Actuator Subject to Boundary Control Matched Disturbance. *International Journal of Control*, **92**, 12-26. <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1235286>
- [16] Guo, B.Z., Zhou, H.C., Al-Fhaid, A.S., et al. (2014) Stabilization of Euler-Bernoulli Beam Equation with Boundary Moment Control and Disturbance by Active Disturbance Rejection Control and Sliding Mode Control Approaches. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **20**, 539-558. <https://doi.org/10.1007/s10883-014-9241-8>
- [17] Guo, B.Z., Liu, J.J., Al-Fhaid, A.S., et al. (2015) The Active Disturbance Rejection Control Approach to Stabilisation of Coupled Heat and ODE System Subject to Boundary Control Matched Disturbance. *International Journal of Control*, **88**, 1554-1564. <https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1010179>
- [18] Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008) Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718607>
- [19] Susto, G.A. and Krstic, M. (2010) Control of PDE-ODE Cascades with Neumann Interconnections. *Journal of the Franklin Institute*, **347**, 284-314. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2009.09.005>
- [20] Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003) Sobolev Spaces. Elsevier.
- [21] Müller, V. (2007) Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras. Birkhäuser Basel.
- [22] Yang, K., Ren, X. and Zhang, J. (2016) Output Feedback Stabilization of an Unstable Wave Equation with Observations Subject to Time Delay. *Journal of Systems Science and Complexity*, **29**, 99-118. <https://doi.org/10.1007/s11424-016-5169-2>
- [23] Pazy, A. (2012) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer Science &

Business Media.

- [24] Tucsnak, M. and Weiss, G. (2009) Observation and Control for Operator Semigroups. Birkhäuser Basel.
- [25] Weiss, G. (1989) Admissibility of Unbounded Control Operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **27**, 527-545. <https://doi.org/10.1137/0327028>
- [26] Guo, B.Z. and Zhao, Z. (2011) On the Convergence of an Extended State Observer for Nonlinear Systems with Uncertainty. *Systems & Control Letters*, **60**, 420-430. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.03.008>
- [27] Komornik, V. and Loreti, P. (2005) Fourier Series in Control Theory. Springer.