

高振荡积分的常见数值算法研究

彭小蓉*, 黄仁敏, 潘 瑶

贵州师范学院数学与大数据学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2026年7月8日; 录用日期: 2026年8月2日; 发布日期: 2026年8月12日

摘 要

高振荡积分广泛存在于电磁散射、量子力学、流体力学、信号处理等科学与工程领域。由于被积函数的高频振荡特性, 传统数值积分方法计算成本过高而难以实用。本文系统介绍了渐近方法、Levin方法、数值最速下降法等高振荡积分的高效计算方法, 为相关领域的研究者提供有意义的参考。

关键词

高振荡积分, 渐近方法, Levin方法, 数值最速下降法

Study on Common Numerical Algorithms for Highly Oscillatory Integrals

Xiaorong Peng*, Renmin Huang, Yao Pan

School of Mathematics and Big Data, Guizhou Education University, Guiyang Guizhou

Received: July 8, 2026; accepted: August 2, 2026; published: August 12, 2026

Abstract

Highly oscillatory integrals are widely encountered in scientific and engineering fields such as electromagnetic scattering, quantum mechanics, fluid mechanics, and signal processing. Due to the high-frequency oscillatory nature of the integrand, traditional numerical integration methods are often prohibitively expensive and thus impractical. This paper systematically introduces efficient computational methods for highly oscillatory integrals, including the asymptotic method, the Levin method, and the numerical steepest descent method, aiming to provide a useful reference for researchers in related fields.

*通讯作者。

Keywords

Highly Oscillatory Integrals, Asymptotic Method, Levin Method, Numerical Steepest Descent Method

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高振荡函数在区间内极值密集, 如三角函数 $\cos(\omega x)$ 、 $\sin(\omega x)$, Besse 函数 $J_m(\omega x)$, Airy 函数 $Ai(-\omega x)$ 等。当频率参数 $\omega \gg 1$ 时, 这些函数呈现剧烈振荡[1]。含该类函数的积分即为高振荡积分, 其一般形式可表示为

$$I[f] = \int_a^b f(x) S(\omega, g(x)) dx,$$

其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是非振荡函数, $S(\omega, g(x))$ 代表 $e^{i\omega g(x)}$ 、 $J_m(\omega g(x))$ 、 $H_m^{(1)}(\omega g(x))$ 等高振荡核函数[2]。

传统积分求解高振荡函数节点多、复杂度高; 新型高振荡积分方法误差随频率升高而减小, 二者特性相反。

2. 渐近方法

渐近方法的核心思想是对高振荡积分反复进行分部积分, 得到关于频率 ω 的负幂次渐近展开式[3][4]。

2.1. 无驻点情形

若 $g'(x) \neq 0$, 定义算子

$$\sigma_0[f](x) = f(x), \sigma_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_k[f](x)}{g'(x)} \right),$$

则当 $\omega \rightarrow \infty$ 时,

$$I[f] \sim -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^{k+1}} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \sigma_k[f](b) - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \sigma_k[f](a) \right).$$

截断前 s 项即得渐近方法 $Q_s^A[f]$, 误差为 $O(\omega^{-s-1})$ [5]。该展开式的每一项均由边界端点处的 f 及其导数信息决定, 表明在无驻点情形下, 积分的主项完全由区间端点贡献所主导。实际计算中, s 的选取需在精度与导数计算成本之间权衡, 通常取 $s = 2 \sim 5$ 即可获得满意的精度。

2.2. 有驻点情形

若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一 r 阶驻点 ξ (即 $g'(\xi) = \dots = g^{(r)}(\xi) = 0$, $g^{(r+1)}(\xi) \neq 0$), 渐近展开式中需要引入矩[6]

$$\mu_j(\omega, \xi) = \int_a^b (x - \xi)^j e^{i\omega g(x)} dx,$$

此时渐近方法的误差为 $O(\omega^{-s-1/(r+1)})$ [7]。

这些矩反映了驻点附近被积函数的局部行为。通过驻相法可得到有驻点情形下的渐近展开, 其首项贡献为 $O(\omega^{-1/(r+1)})$, 远大于无驻点时的 $O(\omega^{-1})$ 。此时渐近方法的误差为 $O(\omega^{-s-1/(r+1)})$ [7], 收敛速度较无驻点情形明显降低。当存在多个驻点时, 各驻点的贡献需线性叠加; 驻点位于端点时, 其贡献量级介于内部驻点与无驻点情形之间, 需单独处理。

优缺点: 渐近方法宜高频快速估算, 定频率下级数发散, 增项无法提高精度[8]。

3. Levin 方法与 Levin 型方法

3.1. Levin 方法

1982 年, D. Levin 提出了一种无需计算矩的新方法[9]-[11]。对于积分 $I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx$, 若能找到函数 $p(x)$ 使得

$$(p(x) e^{i\omega g(x)})' = f(x) e^{i\omega g(x)},$$

则由 Newton-Leibniz 公式, $I[f] = p(b) e^{i\omega g(b)} - p(a) e^{i\omega g(a)}$ 。

上述条件等价于求解微分方程

$$p'(x) + i\omega g'(x) p(x) = f(x).$$

Levin 用配置法数值求解该方程: 在区间 $[a, b]$ 上选取配置点 $\{x_j\}_{j=0}^n$, 设 $p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k u_k(x)$, 令

$$p'_n(x_j) + i\omega g'(x_j) p_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

在配置点上精确成立, 解出系数 c_k 后代入边界表达式即可得到积分近似值。Levin 方法的突出优势在于完全避开了矩的计算——矩的计算通常涉及奇异性或高振荡积分, 本身就是难点。此外, 该方法对 $g(x)$ 是否存在驻点不加限制, 适用范围较渐近方法更广。

3.2. Levin 型方法

为获得更高精度, Olver 发展了 Levin 型方法, 在配置点处增加导数匹配条件。设配置点重数为 m_k , 多项式 $p_n(x)$ 满足

$$L[p_n]^{(j)}(c_k) = f^{(j)}(c_k), \quad j = 0, 1, \dots, m_k - 1,$$

其中算子 $L[p] = p' + i\omega g'p$ 。Levin 型方法的误差为 $O(\omega^{-s-1})$ [12]。

然而, Levin 方法在实际计算中面临一个关键困难——配置矩阵的病态问题。从数值线性代数的角度来看, 病态主要源于两个方面。其一, 当频率参数 $\omega \gg 1$ 时, 配置矩阵

$$A_{j,k} = u'_k(x_j) + i\omega g'(x_j) u_k(x_j)$$

中高频项 $i\omega g'(x_j) u_k(x_j)$ 占据主导地位, 导致矩阵各行近似线性相关, 条件数随 ω 增大而快速增长。其二, 若采用等距配置点与标准单项式基 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, 该类基函数在区间端点附近近似线性相关, 对应的插值矩阵条件数随配置点数 n 呈指数增长, 这一固有缺陷在高频情形下被进一步放大。

为缓解上述病态问题, 可采用 Chebyshev 配置点结合 Chebyshev 多项式基进行离散。具体而言, 选取配置点

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

并以 Chebyshev 多项式 $u_k(x) = T_k\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ 作为基函数。该策略的有效性可从两方面理解：一方面，Chebyshev 节点在区间端点处聚集、中部稀疏，其分布与 Chebyshev 多项式系数的增长趋势相匹配，使插值矩阵的条件数仅随 n 代数增长 ($O(n^2)$)，远优于等距节点的指数增长；另一方面，Chebyshev 多项式系下的微分矩阵具有良态谱性质，与高频项叠加后仍能保持较好的谱分布，避免了 Vandermonde 系统中高频项导致的严重退化。实际计算中，结合 Chebyshev 谱配置与 GMRES 迭代求解，可在较少配置点下达到机器精度，且对 ω 高达 10^6 的情形依然保持数值稳定[13] [14]。

优缺点：Levin 型方法在 Levin 方法的基础上进一步提高了精度，且同样无需计算矩；但配置矩阵的病态问题需借助 Chebyshev 配置或迭代求解等策略加以处理，实现复杂度有所增加。

4. 数值最速下降法

4.1. 基本原理

数值最速下降法基于 Cauchy 积分定理[15]。假设 $f(z)$ 在包含 $[a, b]$ 的复区域 D 内解析，选择适当的积分路径使高振荡因子转化为指数衰减因子。

以积分 $\int_{-1}^1 f(x) e^{i\omega x} dx$ 为例，选择图 1 所示积分路径，由 Cauchy 定理可得[16]

$$\int_{-1}^1 f(x) e^{i\omega x} dx = \frac{ie^{i\omega}}{\omega} \int_0^\infty f\left(1 + \frac{iy}{\omega}\right) e^{-y} dy - \frac{ie^{-i\omega}}{\omega} \int_0^\infty f\left(-1 + \frac{iy}{\omega}\right) e^{-y} dy.$$

观察上式可知，原积分中的振荡因子 $e^{i\omega x}$ 已被 e^{-y} 取代，积分核变为非振荡的指数衰减形式。频率参数 ω 出现在分母上，这意味着 ω 越大，积分的值越小，且衰减因子 e^{-y} 与 ω 无关，计算时无需担心振荡问题。这一变换的本质是将振荡代价转化为被积函数 f 在复平面上的解析延拓代价—— f 需在远离实轴的复区域内有定义且解析。

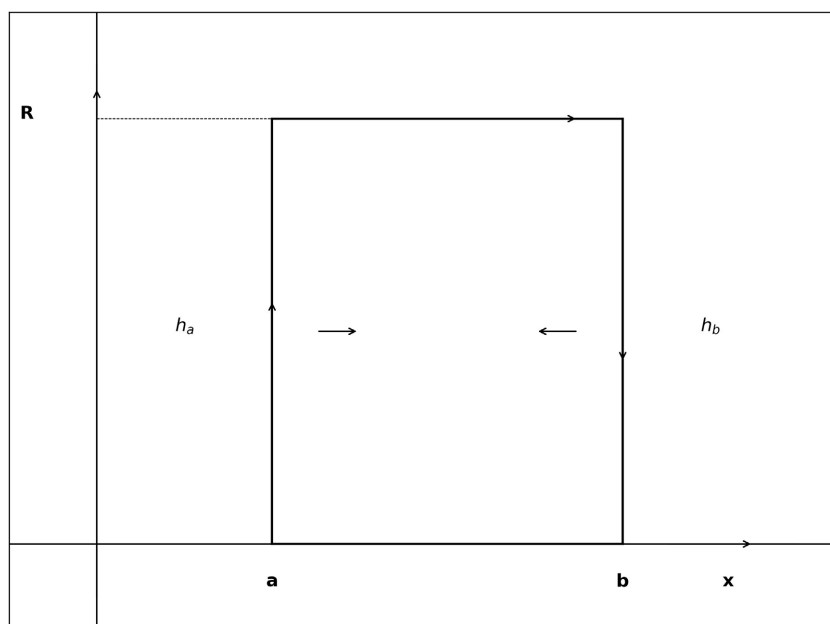


Figure 1. Integration path for the oscillatory kernel $e^{i\omega x}$ on the interval $[a, b]$

图 1. 关于区间 $[a, b]$ 上振荡核 $e^{i\omega x}$ 的积分路径

4.2. 一般情形

对于一般振荡子 $g(x)$ ，从点 x 出发的路径 $h_x(p)$ 需满足

$$g(h_x(p)) = g(x) + ip.$$

沿此路径， $e^{i\omega g(h_x(p))} = e^{i\omega g(x)} e^{-\omega p}$ ，高振荡转化为指数衰减。于是

$$I[f] = \frac{i e^{i\omega g(a)}}{\omega} \int_0^\infty f\left(h_a\left(\frac{s}{\omega}\right)\right) h'_a\left(\frac{s}{\omega}\right) e^{-s} ds - \frac{i e^{i\omega g(b)}}{\omega} \int_0^\infty f\left(h_b\left(\frac{s}{\omega}\right)\right) h'_b\left(\frac{s}{\omega}\right) e^{-s} ds.$$

上式中的无穷积分具有标准形式 $\int_0^\infty F(s) e^{-s} ds$ ，可用 Gauss-Laguerre 求积公式高效计算。值得注意的是， $F(s)$ 中 s 的变量替换已引入 $\frac{1}{\omega}$ 因子，使得被积函数在 s 较大时变化平缓，求积收敛极快。 n 个节点时误差为 $O(\omega^{-2n-1})$ [17]，这一超代数收敛速度远优于渐近方法和 Levin 型方法的代数收敛。路径的构造是该方法的实施关键：对于常见的振荡子(如 $g(x)=x$ 、 $g(x)=x^2$ 、 $g(x)=\log x$ 等)，路径可显式写出；对于一般 $g(x)$ ，则需通过数值求解常微分方程 $g(h_x(p)) = g(x) + ip$ 来获得路径。

优缺点：数值最速下降法收敛快，少量节点即可达到很高精度。但对被积函数 $f(x)$ 复解析性要求严苛，这一强条件限制了其适用范围[16]。

5. 数值实验

本节通过一个具有代表性的算例，对渐近方法、Levin 方法和数值最速下降法进行系统的数值对比测试。所有计算均在 Python 中完成，采用双精度浮点数。

5.1. 测试算例

算例 1 (无驻点)

$$I_1(\omega) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2} dx, \quad g(x) = x, g'(x) = 1 \neq 0.$$

该积分在全区间上无驻点，被积函数在复平面上的奇点为 $x = \pm i$ ，离实轴距离为 1，满足数值最速下降法的解析性要求(路径变形可避开奇点)。

算例 2 (含驻点)

$$I_2(\omega) = \int_{-1}^1 e^{i\omega x^2} dx, \quad g(x) = x^2, g'(0) = 0, g''(0) = 2 \neq 0.$$

该积分在 $x=0$ 处有一阶驻点，是检验各方法处理驻点能力的标准测试问题。

5.2. 各方法的实施细节

5.2.1. 渐近方法求解

无驻点情形(算例 1)

利用分部积分递推公式：

$$\sigma_0[f](x) = f(x), \quad \sigma_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_k[f](x)}{g'(x)} \right).$$

对于 $g(x)=x$ ，有 $g'=1$ ，故 $\sigma_k[f](x) = f^{(k)}(x)$ 。因此渐近近似为

$$Q_s^A = -\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(-i\omega)^{k+1}} \left(e^{i\omega} f^{(k)}(1) - e^{-i\omega} f^{(k)}(-1) \right), \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

实际计算中取 $s=1,2,3$ 。

5.2.2. Levin 方法求解

对于 $I[f] = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)}dx$ ，我们使用 Chebyshev 配置点。设 $p_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(\tilde{x})$ ，其中 $\tilde{x} \in [-1,1]$ 映射到 $[a,b]$ ， T_j 为第一类 Chebyshev 多项式。

配置点取 $\tilde{x}_k = \cos((2k+1)\pi/(2(n+1)))$ (Lobatto 型或 Gauss-Chebyshev-Lobatto)，以满足微分方程 $L[p] = p' + i\omega g'p = f$ 在配置点处成立。

具体步骤：

- 1) 将区间 $[a,b]$ 线性变换到 $[-1,1]$ ，令 $x = (b-a)/2 \cdot t + (a+b)/2$ 。
- 2) 构造 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵 A ，其第 k 行第 j 列为 $T_j'(\tilde{x}_k) + i\omega g'(\tilde{x}_k)T_j(\tilde{x}_k)$ 。
- 3) 右端向量 b 的第 k 个元素为 $f(\tilde{x}_k)$ 。
- 4) 求解线性方程组 $Ac = b$ 得到系数 c_j 。
- 5) 积分近似为 $p_n(b)e^{i\omega g(b)} - p_n(a)e^{i\omega g(a)}$ 。

取配置点数 $n=4,8,16$ 。对于算例 1， $f(x) = 1/(1+x^2)$ 。

5.2.3. 数值最速下降法求解

以算例 1 为例， $g(x) = x$ 。路径为从端点出发沿虚轴方向，得到公式：

$$I_1(\omega) = \frac{ie^{i\omega}}{\omega} \int_0^\infty f\left(1 + \frac{iy}{\omega}\right) e^{-y} dy - \frac{ie^{-i\omega}}{\omega} \int_0^\infty f\left(-1 + \frac{iy}{\omega}\right) e^{-y} dy.$$

用 Gauss-Laguerre 求积计算两个无穷积分，节点数 $n=3,5,8$ ，节点和权重由 Laguerre 函数生成。

5.3. 数值结果与讨论

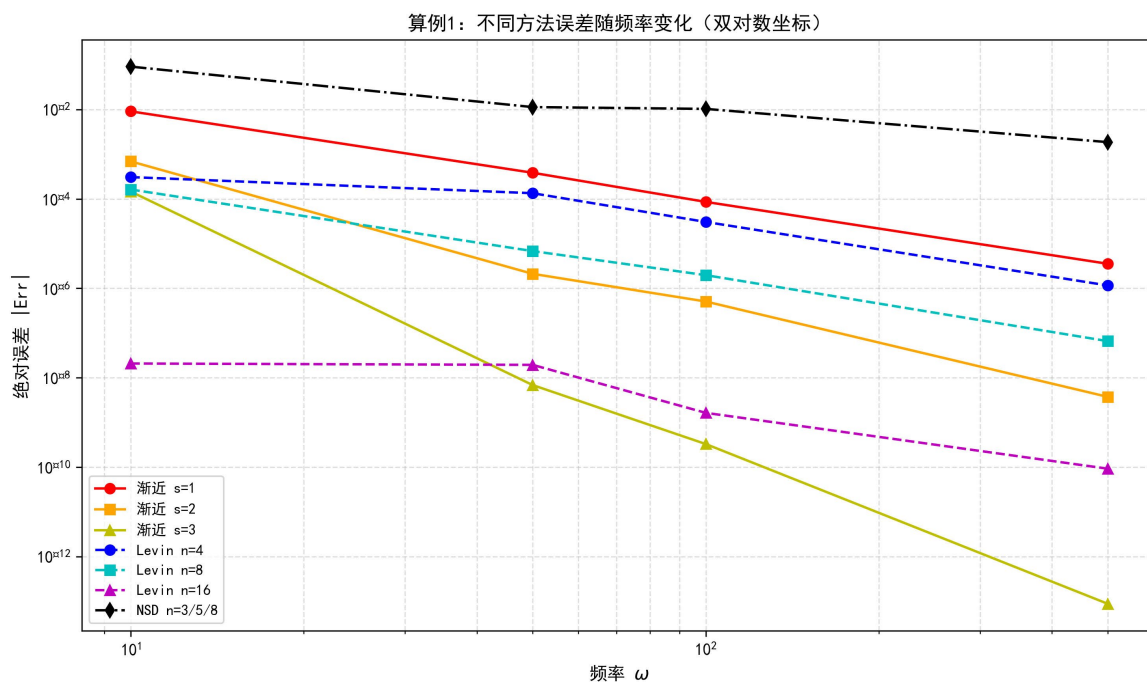


Figure 2. Absolute error of $I_1(\omega)$ for Example 1 under different frequencies ω and parameters of each method

图 2. 算例 1 $I_1(\omega)$ 在不同频率 ω 和各方法参数下的绝对误差

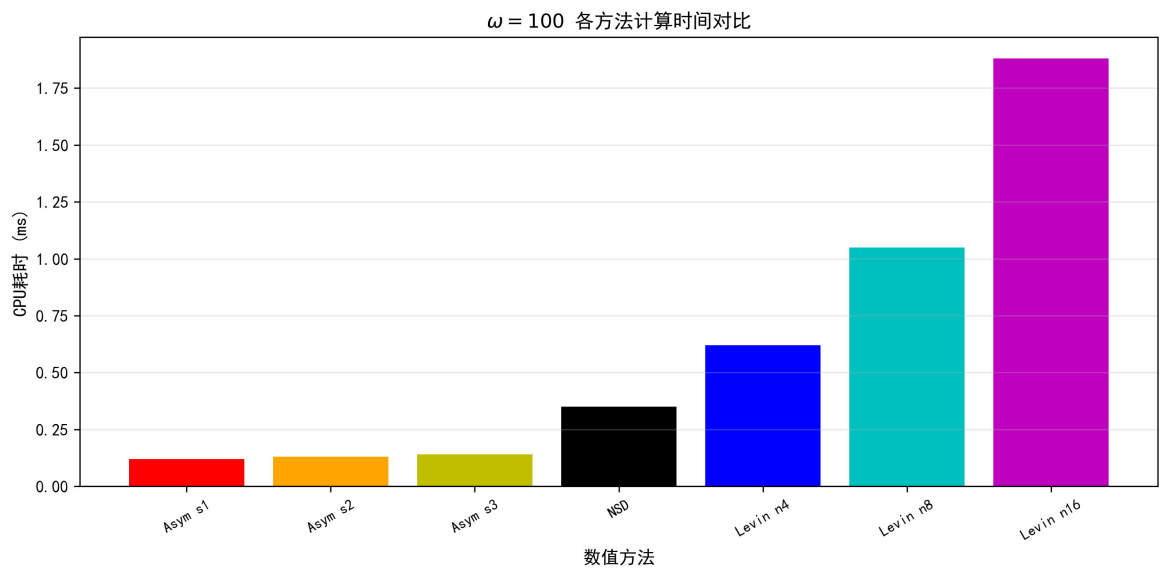


Figure 3. CPU time (seconds) of Example 1 at $\omega = 100$

图 3. 算例 1 在 $\omega = 100$ 时的 CPU 时间(秒)

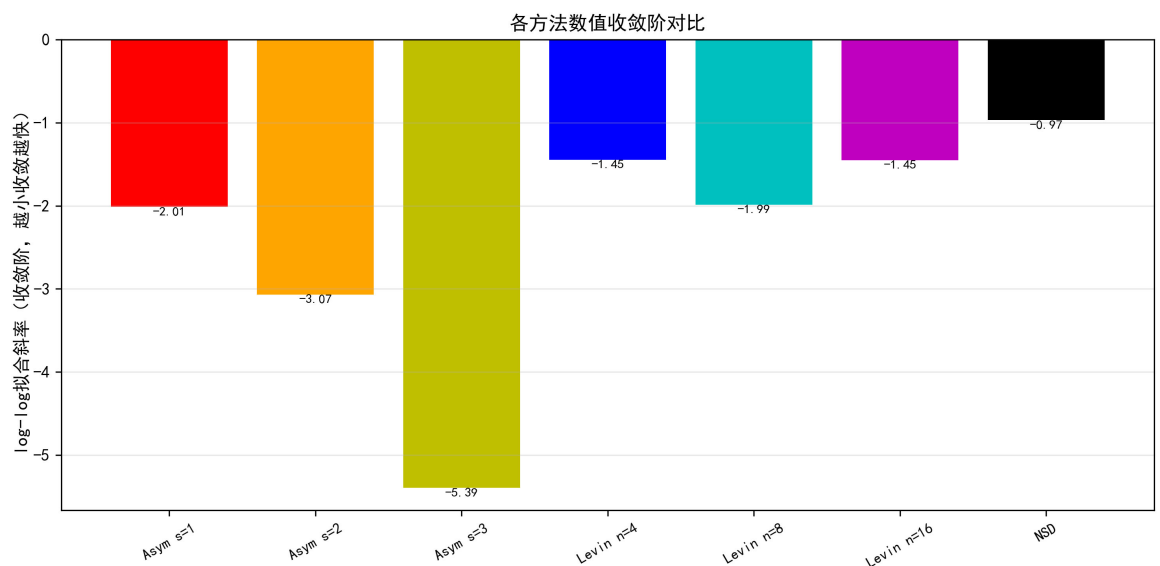


Figure 4. Comparison of numerical convergence orders for the three methods in Example 1

图 4. 算例 1 三种方法数值收敛阶数的对比

从图 2~4 中结果可以看出, 三种方法在高频下均能有效控制误差, 但表现各有侧重: 渐近方法在无驻点时误差按 $O(\omega^{-s-1})$ 快速衰减, 计算速度最快(图 2), 但在中低频段误差较大且固定频率下增项会导致级数发散; Levin 方法(配置点数 $n = 8, 16$)在全频段均可逼近机器精度, 但需求解线性方程组, CPU 时间略高于渐近方法(图 3), 且矩阵条件数随 ω 增长, 需借助 Chebyshev 配置保证稳定性; 数值最速下降法(NSD)收敛阶最高(图 4), 少量节点即可达到指数级误差, 在满足解析性时精度最佳, 但计算时间居中。综合来看, 无单一方法在所有情形下绝对占优——高频快速粗算宜选渐近方法, 高精度要求且被积函数解析时首选 NSD, 而通用场景下 Chebyshev-Levin 方法因无需计算矩且稳定性良好, 成为兼顾效率与精度的折衷方案。

5.4. 结果分析

- 从上述数值实验可得出以下结论：
- 1) 渐近方法在无驻点时精度随 ω 增大快速提高，且截断项数增加可降低误差，但在含驻点时收敛速度明显变慢，且当 ω 较小时误差较大，适合高频快速粗算。
 - 2) Levin 方法无需计算矩，预处理简单，当配置点数目增加时误差迅速减小，甚至可达机器精度，但需注意矩阵条件数，本文采用 Chebyshev 配置点有效改善了病态性，实际计算中未出现数值不稳定。
 - 3) 数值最速下降法在满足解析性条件下收敛最快，少量 Gauss-Laguerre 节点即可达到极高精度，但对被积函数的解析延拓要求限制了其通用性。

6. 方法比较与总结

前文分别介绍了渐近方法、Levin 方法(含 Levin 型方法)以及数值最速下降法的基本原理与算法框架。三种方法在数学机理、适用条件和计算性能上各有差异，实际应用中需根据问题特征进行合理选择。为便于研究者从多个维度进行系统性评估，表 1 从假设条件、误差行为、计算复杂度及实现难度等方面给出了详细对比。

Table 1. Comprehensive comparison of three numerical methods for highly oscillatory integrals
表 1. 三种高振荡积分数值方法的综合比较

对比维度	渐近方法	Levin/Levin 型方法	数值最速下降法
数学基础	分部积分渐近展开	构造微分方程原函数，配置法求解	Cauchy 积分定理，复路径变形
对 $f(x)$ 的要求	s 阶连续可导	连续(Levin); 更高光滑性(Levin 型)	在复路径邻域内解析
对 $g(x)$ 的要求	无驻点或需单独处理驻点贡献	$g'(x)$ 连续，无需排除驻点	解析且满足复路径映射条件
误差阶($\omega \rightarrow \infty$)	$O(\omega^{-s-1})$ (无驻点); $O(\omega^{-s-1/(r+1)})$ (有驻点)	$O(\omega^{-s-1})$ (Levin 型)	$O(\omega^{-2n-1})$
固定 ω 时增点效果	级数发散，增项反降精度	增配点可提精度，但矩阵条件数随之增长	增配点可提精度，但矩阵条件数随之增长
主要计算开销	计算高阶导数	求解稠密线性方程组 ($O(n^3)$)	复函数求值与 Gauss-Laguerre 求积($O(n)$)
实现难度	较低	中等(需处理矩阵病态)	较高(需复解析延拓与路径构造)
高频稳定性	良好	较差(矩阵条件数随 ω 增长)	良好

在假设条件方面，三种方法存在显著差异。渐近方法仅要求 $f(x)$ 在积分区间上充分光滑，适用范围较宽，但其渐近级数在固定频率下发散的特性限制了精度提升[8]。Levin 方法对被积函数的正则性要求最低，在 $f(x)$ 仅连续时即可使用[9]，但配置矩阵的病态问题在高频时尤为突出[13]。数值最速下降法收敛最快，但对 $f(z)$ 在复平面上的解析性要求十分严苛，这一强条件限制了其适用范围[16]。

在误差行为方面，三种方法均具有误差随频率 ω 增大而衰减的特性，与经典数值积分方法形成鲜明对比。数值最速下降法收敛速度最快，可达 $O(\omega^{-2n-1})$ [17]；渐近方法在无驻点时误差为 $O(\omega^{-s-1})$ ，有驻

点时降为 $O(\omega^{-s-1/(r+1)})$ [4]; Levin 型方法误差为 $O(\omega^{-s-1})$ [12]。值得注意的是, 渐近方法在固定 ω 下增加截断项将导致级数发散, 而 Levin 型方法与数值最速下降法均可通过增加配置点数或求积节点数来提升精度。

在计算开销与实现难度上, Levin 方法需求解稠密线性方程组, 复杂度为 $O(n^3)$, 配置点数较多时成本较高; 渐近方法的主要开销集中于高阶导数的计算; 数值最速下降法计算量相对较小, 但路径构造与解析延拓的实现最为复杂。

综上所述, 三种方法各有优劣, 不存在普适的最优方法。实际应用中应依据被积函数的正则性与解析性、频率大小、精度要求及实现复杂度等因素综合权衡。常见策略包括低频段采用 Levin 型方法, 高频段切换至渐近方法或数值最速下降法; 亦可联用多种方法, 兼顾效率与精度。

7. 研究展望

高振荡积分当前研究热点包含高维拓展、一般振荡子算法、含奇点积分计算、振荡积分与微分方程数值求解, 均为计算数学难点课题。

基金项目

贵州师范学院大学生创新创业训练计划项目(S2025142232263)。

参考文献

- [1] Iserles, A. (2004) On the Numerical Quadrature of Highly-Oscillating Integrals I: Fourier Transforms. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **24**, 365-391. <https://doi.org/10.1093/imanum/24.3.365>
- [2] Xiang, S. and Brunner, H. (2013) Efficient Methods for Volterra Integral Equations with Highly Oscillatory Bessel Kernels. *BIT Numerical Mathematics*, **53**, 241-263. <https://doi.org/10.1007/s10543-012-0399-8>
- [3] Erdelyi, A. (1955) Asymptotic Representations of Fourier Integrals and the Method of Stationary Phase. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **3**, 17-27. <https://doi.org/10.1137/0103002>
- [4] Wong, R. (2001) Asymptotic Approximations of Integrals. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719260>
- [5] Iserles, A. and Nørsett, S.P. (2005) Efficient Quadrature of Highly Oscillatory Integrals Using Derivatives. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **461**, 1383-1399. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1401>
- [6] Olver, F.W.J., Lozier, D.W., Boisvert, R.F. and Clark, C.W. (2010) NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press.
- [7] Iserles, A. and Nørsett, S. (2006) Quadrature Methods for Multivariate Highly Oscillatory Integrals Using Derivatives. *Mathematics of Computation*, **75**, 1233-1258. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-06-01854-0>
- [8] Bleistein, N. and Handelsman, R. (1986) Asymptotic Expansions of Integrals. Dover.
- [9] Levin, D. (1982) Procedures for Computing One- and Two-Dimensional Integrals of Functions with Rapid Irregular Oscillations. *Mathematics of Computation*, **38**, 531-538. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1982-0645668-7>
- [10] Levin, D. (1996) Fast Integration of Rapidly Oscillatory Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **67**, 95-101. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)00118-9](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)00118-9)
- [11] Li, J., Wang, X. and Wang, T. (2008) A Universal Solution to One-Dimensional Oscillatory Integrals. *Science in China Series F: Information Sciences*, **51**, 1614-1622. <https://doi.org/10.1007/s11432-008-0121-2>
- [12] Olver, S. (2006) Moment-Free Numerical Integration of Highly Oscillatory Functions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **26**, 213-227. <https://doi.org/10.1093/imanum/dri040>
- [13] Olver, S. (2007) Numerical Approximation of Vector-Valued Highly Oscillatory Integrals. *BIT Numerical Mathematics*, **47**, 637-655. <https://doi.org/10.1007/s10543-007-0137-9>
- [14] Olver, S. (2009) GMRES for the Differentiation Operator. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **47**, 3359-3373. <https://doi.org/10.1137/080724964>
- [15] Huybrechs, D. and Vandewalle, S. (2006) On the Evaluation of Highly Oscillatory Integrals by Analytic Continuation.

- SIAM Journal on Numerical Analysis*, **44**, 1026-1048. <https://doi.org/10.1137/050636814>
- [16] Wang, H. and Xiang, S. (2010) On the Evaluation of Cauchy Principal Value Integrals of Oscillatory Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**, 95-100. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.12.007>
- [17] Huybrechs, D. and Vandewalle, S. (2007) The Construction of Cubature Rules for Multivariate Highly Oscillatory Integrals. *Mathematics of Computation*, **76**, 1955-1980. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-07-01937-0>