

基于Scholtes松弛方法的收敛性研究

班路园

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年7月8日; 录用日期: 2026年8月2日; 发布日期: 2026年8月12日

摘 要

带有切换约束的数学规划问题(MPSC)在切换控制、MPEOC、具有半连续变量的投资组合优化问题等领域有着广泛的应用。MPSC带有可行域非凸非连通的特殊结构,因而在可行点处不满足大多数约束规范,往往难于求解。松弛方法被普遍视为解决MPSC问题的有效方法。本文基于Scholtes松弛方法以及非精确稳定点的概念,证明了在较弱的 ε -KKT点条件下能得到与KKT点条件相同的结果,即收敛到了MPSC的W-稳定点,如果增强假设条件,松弛问题的 ε -KKT点列可收敛到MPSC的S-稳定点。

关键词

带有切换约束的数学规划问题, 松弛方法, 约束规范, 稳定点

Convergence Research Based on Scholtes' Relaxation Method

Luyuan Ban

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: July 8, 2026; accepted: August 2, 2026; published: August 12, 2026

Abstract

Mathematical programming with switching constraints (MPSC) has broad applications in fields such as switching control, MPEOC, and portfolio optimization problems with semi-continuous variables. MPSC features a special structure where the feasible region is non-convex and non-connected, making it difficult to solve, as most constraint qualifications fail at feasible points. Relaxation methods are widely regarded as effective approaches for addressing MPSC problems. Based on Scholtes' relaxation method and the concept of inexact stationary points, this paper demonstrates that under weaker ε -KKT point conditions, results equivalent to those under KKT point conditions can be achieved, *i.e.*, convergence to W-stationary points of MPSC. With enhanced assumptions, sequences of ε -KKT points from the relaxed problem can converge to S-stationary points of MPSC.

Keywords

Mathematical Programmes with Switching Constraints, Relaxation Method, Constraint Qualifications, Stationary Point

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要研究带有切换约束的数学规划(Mathematical programmes with switching constraints, 简称 MPSC)问题, 其具体形式如下:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x)H_i(x) = 0, i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

其中 $f, g_i, h_i, G_i, H_i: R^n \rightarrow R$ 是连续可微函数。MPSC 问题在切换约束优化控制[1][2], 带有 either-or 约束的数学规划问题(Mathematical problems with either-or constraints, 简称 MPEOC)[3], 具有半连续变量的投资组合优化问题[4]等方面有着广泛的应用, 因此, 研究 MPSC 问题具有重要的理论价值和实际意义。

由于切换约束的存在, 其可行域是非凸的, 甚至是非连通的, 其在任何可行点处均不满足标准的 Mangasarian-Fromovitz 约束规范[3], 因此熟知的求解非线性规划问题的算法都不能直接用于求解 MPSC。Mehhlitz [3]在 2020 年引入了 MPSC 的弱(W-)、Mordukhovich (M-)、强(S-)稳定性概念, 并将 Linear Independence 约束规范(LICQ)、Mangasarian-Fromovitz 约束规范(MFCQ)、Abadie 约束规范(ACQ)、Guignard 约束规范(GCQ)拓展到了 MPSC 中。

近年来, 学者们对带有均衡约束的数学规划(Mathematical programmes with equilibrium constraints, 简称 MPEC)问题和带有消失约束的数学规划(Mathematical programmes with vanishing constraints, 简称 MPVC)问题的研究十分深入, 但对 MPSC 的研究较少。其中松弛思想是引进参数, 对问题进行松弛, 从而得到一个合适的近似, 使其可以通过一系列非线性规划求解。文献[5][6]中给出了求解 MPEC 和 MPVC 的几种松弛方法。Kanzow 等学者[7]在 2019 年将处理 MPEC 问题的几种熟知的松弛方法应用于求解 MPSC 中, 其中 Scholtes 的松弛方法[8]针对 MPSC 的处理得到了在 MPSC 的 Mangasarian-Fromovitz 约束规范下, 松弛问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker)点列可以收敛到 MPSC 的 W-稳定点。

然而在实际数值处理中, KKT 点很难满足终止准则, 于是 2015 年 Kanzow 等学者[9]在非精确的 KKT 点概念下, 检验了 MPEC 问题的几种松弛方法是否还具有原来的收敛性。

基于[7][9], 本文将继续探讨 Scholtes 松弛方法应用于 MPSC 的收敛结果, 在比 KKT 点更弱的 ε -KKT 点下, 证明松弛问题的非精确稳定点列依然可以收敛到 MPSC 的 W-稳定点。并证明如果增强假设条件, 可收敛到 MPSC 问题的 S-稳定点。

2. 基础知识

本节给出文中将要用到的一些基本概念和指标集。

定义 2.1 对任何给定的向量 $x \in R^n$, 欧几里得范数(ℓ_2 范数)定义为:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

无穷范数定义为:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

定义 2.2 对任何给定的向量 $x \in R^n$, 定义指标集:

$$\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} | x_i \neq 0\},$$

称为向量 x 的支撑集。

定义 2.3 向量族 $\{a_i \in R^n | i \in I\} \cup \{b_j \in R^n | j \in J\}$ 叫作正线性相关的, 如果存在不全为 0 的数 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, $\{\beta_j\}_{j \in J}$, $\alpha_i \geq 0 (\forall i \in I)$, 满足 $\sum_{i \in I} \alpha_i a_i + \sum_{j \in J} \beta_j b_j = 0$, 否则叫作正线性无关。

回顾非线性规划(Nonlinear programming, 简称 NLP)问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

其中 $f, g_i, h_i : R^n \rightarrow R$ 是连续可微的, 设 x^* 是 NLP 问题的可行点, 定义 $I^g(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} | g_i(x^*) = 0\}$ 。

定理 2.1 (一阶最优性条件) 设 x^* 是 NLP 问题的一个局部极小解, 且在 x^* 处满足某种约束规范, 则存在向量 $\lambda \in R^m, \mu \in R^p$, 使得

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) &= 0, \\ g_i(x^*) &\leq 0, \forall i = 1, \dots, m, \\ h_i(x^*) &= 0, \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i &\geq 0, \lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

此时称 x^* 是 NLP 的 KKT 点, 上述条件称为 KKT 条件, λ, μ 称为 Lagrange 乘子, (x^*, λ, μ) 称为 KKT 点对。

定义 2.4 [9] 给定 $x^* \in R^n, \varepsilon > 0$, 称 x^* 是 NLP 问题的 ε -KKT 点(epsilon-stationary point), 如果存在向量 $\lambda \in R^m, \mu \in R^p$, 使得

$$\begin{aligned} \left\| \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) \right\|_\infty &\leq \varepsilon, \\ g_i(x^*) &\leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m, \\ |h_i(x^*)| &\leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i &\geq -\varepsilon, \forall i = 1, \dots, m, \\ |\lambda_i g_i(x^*)| &\leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

为了研究 MPSC 问题的稳定性概念和约束规范, 引入下列指标集:

$$I^G(x^*) = \{i \in \{1, \dots, q\} | G_i(x^*) = 0, H_i(x^*) \neq 0\},$$

$$I^H(x^*) = \{i \in \{1, \dots, q\} \mid G_i(x^*) \neq 0, H_i(x^*) = 0\},$$

$$I^{GH}(x^*) = \{i \in \{1, \dots, q\} \mid G_i(x^*) = 0, H_i(x^*) = 0\}.$$

其中 x^* 是 MPSC 的可行点, $I^G(x^*), I^H(x^*), I^{GH}(x^*)$ 将 $\{1, \dots, q\}$ 划分成了互不相交的三部分。

定义 2.5 [3] 设 x^* 是 MPSC 的一个可行点。

1) 称 x^* 是 MPSC 问题的 W-稳定(Weakly stationary)点, 如果存在 $\lambda \in R^m, \mu \in R^p, \gamma, \nu \in R^q$, 使得 x^* 满足

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^q [\gamma_i \nabla G_i(x^*) + \nu_i \nabla H_i(x^*)] &= 0, \\ \lambda_i &\geq 0, \lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i = 1, \dots, m, \\ \gamma_i &= 0, \forall i \in I^H(x^*), \\ \nu_i &= 0, \forall i \in I^G(x^*). \end{aligned}$$

2) 称 x^* 是 MPSC 问题的 M-稳定(Mordukhovich stationary)点, 如果 x^* 是 W-稳定点, 且同时满足当 $i \in I^{GH}(x^*)$ 时, $\gamma_i \nu_i = 0$ 。

3) 称 x^* 是 MPSC 问题的 S-稳定(Strongly stationary)点, 如果 x^* 是 W-稳定点, 同时满足 $i \in I^{GH}(x^*)$ 时, $\gamma_i = 0, \nu_i = 0$ 。

以上稳定性强弱关系如下:

$$\text{S-稳定性} \Rightarrow \text{M-稳定性} \Rightarrow \text{W-稳定性}$$

并且 S-稳定点是 MPSC 的 KKT 点。 $i \in I^{GH}(x^*)$ 时, W-、M-、S-稳定性对 γ_i, ν_i 的要求见图 1。

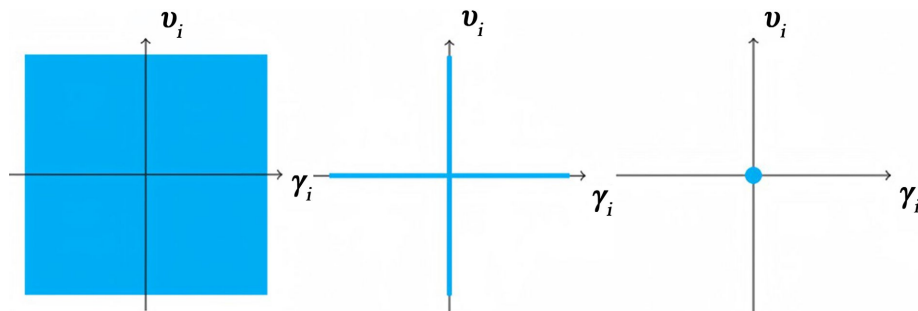


Figure 1. Geometric illustration of W-, M-, and S-stationarity for an index $i \in I^{GH}(x^*)$

图 1. $i \in I^{GH}(x^*)$ 时, W-、M-、S-稳定性的直观表示

定义 2.6 [3][10] 设 x^* 是 MPSC 的可行点, 称 MPSC 的 Mangasarian-Fromovitz 约束规范(简称 MPSC-MFCQ)在 x^* 处成立, 如果梯度向量组

$$\begin{aligned} &\{\nabla g_i(x^*) \mid i \in I^g(x^*)\} \cup \{\nabla h_i(x^*) \mid i = 1, \dots, p\} \\ &\cup \{\nabla G_i(x^*) \mid i \in I^G(x^*) \cup I^{GH}(x^*)\} \\ &\cup \{\nabla H_i(x^*) \mid i \in I^H(x^*) \cup I^{GH}(x^*)\} \end{aligned}$$

是正线性无关的。

3. Scholtes 的松弛方法

Scholtes 松弛方法[8]对 MPSC 的切换约束松弛得到了新的松弛问题[7], 本节基于新的松弛问题进行收敛性分析。在 MPSC-MFCQ 下证明松弛问题的 ε -KKT 点列收敛到 MPSC 的 W-稳定点。如果增强假设条件, 则可收敛到 MPSC 的 S-稳定点。

基于文献[7], MPSC 的切换约束 $G_i(x)H_i(x)=0$ 可松弛为 $-t \leq G_i(x)H_i(x) \leq t$, 从而得到 MPSC 的如下形式的松弛问题, 记为 $NLP_S(t)$:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.t. } & g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, i=1, \dots, p, \\ & -t \leq G_i(x)H_i(x) \leq t, i=1, \dots, q. \end{aligned}$$

其中 $t \geq 0$ 是引入的松弛参数, 记 $NLP_S(t)$ 的可行集为 $X_S(t)$, 切换约束的可行集如图 2 所示。

接下来给出的引理证明了 $NLP_S(t)$ 确实是对 MPSC 的松弛。

引理 3.1 [11] 记 MPSC 的可行集为 X , 以下陈述成立:

- 1) $X_S(0) = X$,
- 2) $0 \leq t_1 \leq t_2 \Rightarrow X_S(t_1) \subseteq X_S(t_2)$,
- 3) $\bigcap_{t>0} X_S(t) = X$ 。

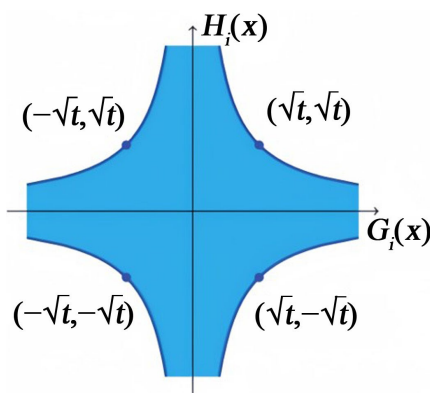


Figure 2. Geometric interpretation of the relaxed feasible set $X_S(t)$

图 2. 松弛后的可行集 $X_S(t)$ 的直观表示

定理 3.1 [7] $\{t_k\} \downarrow 0, x^k \in X_S(t_k)$ 是 $NLP_S(t_k)$ 的 KKT 点, 且 $x^k \rightarrow x^*$, 假设 MPSC-MFCQ 在 x^* 处成立, 则 x^* 是 MPSC 的 W-稳定点。

接下来我们考虑在将定理 3.1 条件中的 KKT 点换为更弱的 ε -KKT 点对收敛结果的影响。以下定理可以证明, 若 $\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$, 其依然可以收敛到 MPSC 的 W-稳定点。

定理 3.2 $\{t_k\} \downarrow 0, \{\varepsilon_k\} \downarrow 0, x^k$ 是 $NLP_S(t_k)$ 的 ε_k -KKT 点, 且 $x^k \rightarrow x^*$, 假设 MPSC-MFCQ 在 x^* 处成立, 则 x^* 是 MPSC 的 W-稳定点。

证明: 由于对 $\forall k \in N, x^k$ 是 $NLP_S(t_k)$ 的 ε_k -KKT 点, 则存在向量 $\lambda \in R^m, \mu \in R^p, \xi_i^{k,+}, \xi_i^{k,-} \in R^q$ 使得

$$\left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^q (\xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-}) [H_i(x^k) \nabla G_i(x^k) + G_i(x^k) \nabla H_i(x^k)] \right\|_{\infty} \leq \varepsilon_k, \quad (3.1)$$

$$g_i(x^k) \leq \varepsilon_k, \lambda_i^k \geq -\varepsilon_k, |\lambda_i^k g_i(x^k)| \leq \varepsilon_k, \forall i=1, \dots, m, |h_i(x^k)| \leq \varepsilon_k, \forall i=1, \dots, p, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} G_i(x^k)H_i(x^k) - t_k &\leq \varepsilon_k, \xi_i^{k,+} \geq -\varepsilon_k, \left| \xi_i^{k,+} [G_i(x^k)H_i(x^k) - t_k] \right| \leq \varepsilon_k, \\ G_i(x^k)H_i(x^k) + t_k &\geq -\varepsilon_k, \xi_i^{k,-} \geq -\varepsilon_k, \left| \xi_i^{k,-} [G_i(x^k)H_i(x^k) + t_k] \right| \leq \varepsilon_k, \forall i=1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.3)$$

考虑到 g_i, h_i, G_i, H_i 的连续性以及 $t_k \rightarrow 0, \varepsilon_k \rightarrow 0$, 可得

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0, \forall i=1, \dots, m, \\ h_i(x^*) &= 0, \forall i=1, \dots, p, \\ G_i(x^*)H_i(x^*) &= 0, \forall i=1, \dots, q. \end{aligned}$$

即 x^* 是 MPSC 的可行点。

定义新乘子:

$$\begin{aligned} \gamma_i^k &= \begin{cases} (\xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-}) \cdot H_i(x^k), & i \in I^G(x^*) \cup I^{GH}(x^*), \\ 0, & i \in I^H(x^*), \end{cases} \\ \nu_i^k &= \begin{cases} (\xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-}) \cdot G_i(x^k), & i \in I^H(x^*) \cup I^{GH}(x^*), \\ 0, & i \in I^G(x^*). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

设 $\xi_i^k = \xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-}$, 于是(3.1)式可改写成如下形式:

$$\left\| \begin{aligned} &\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^q \gamma_i^k \nabla G_i(x^k) + \sum_{i=1}^q \nu_i^k \nabla H_i(x^k) \\ &+ \sum_{i \in I^H(x^*)} \xi_i^k H_i(x^k) \nabla G_i(x^k) + \sum_{i \in I^G(x^*)} \xi_i^k G_i(x^k) \nabla H_i(x^k) \end{aligned} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon_k. \quad (3.5)$$

下面证明乘子序列 $\{(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, \nu^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k)\}$ 有界。

反证法 若 $\{(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, \nu^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k)\}$ 无界, 不妨设

$$\frac{(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, \nu^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k)}{\|(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, \nu^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k)\|_2} \rightarrow (\lambda, \mu, \gamma, \nu, \xi_{I^G \cup I^H}) \neq 0.$$

对(3.5)式两边同除以 $\|(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, \nu^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k)\|_2$, 并取极限, 同时考虑到 f, g_i, h_i, G_i, H_i 都是连续可微的, 得到

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^q \gamma_i \nabla G_i(x^*) + \sum_{i=1}^q \nu_i \nabla H_i(x^*) = 0.$$

据式(3.2)可知, 对任意的 $k, \lambda_i^k \geq -\varepsilon_k$, 故 $\lambda_i \geq 0, \forall i=1, \dots, m$ 。若 $\lambda_i > 0$, 则对于充分大的 k , 存在常数 $b > 0$, 使得 $\lambda_i^k > b > 0$, 又因为 $|\lambda_i^k g_i(x^k)| \leq \varepsilon_k$, 则 $|g_i(x^k)| \leq \frac{\varepsilon_k}{\lambda_i^k} < \frac{\varepsilon_k}{b} \rightarrow 0$, 即 $g_i(x^*) = 0$, 得到

$\text{supp}(\lambda) \subseteq I^g(x^*)$ 。根据 γ_i^k 的定义, 对于所有的 $i \in I^H(x^*)$, 有 $\gamma_i^k = 0$, 显然 $\gamma_i = 0$, 即

$\text{supp}(\gamma) \subseteq I^G(x^*) \cup I^{GH}(x^*)$ 。同理可得 $\text{supp}(\nu) \subseteq I^H(x^*) \cup I^{GH}(x^*)$ 。

因为 MPSC-MFCQ 在 x^* 处成立, 所以 $\lambda = 0, \mu = 0, \gamma = 0, \nu = 0$, 而 $(\lambda, \mu, \gamma, \nu, \xi_{I^G \cup I^H})$ 是非零向量, 故存

在 $i \in I^G(x^*) \cup I^H(x^*)$, 使得 $\xi_i \neq 0$, 不妨设 $i \in I^G(x^*)$, 由(3.4)

$$\gamma_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i^k}{\left\| \left(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, v^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k \right) \right\|_2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_i^k H_i(x^k)}{\left\| \left(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, v^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k \right) \right\|_2} = \xi_i H_i(x^*) = 0,$$

得出 $\xi_i = 0$, 这与 $\xi_i \neq 0$ 矛盾, 因此乘子序列 $\left\{ \left(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, v^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k \right) \right\}$ 有界。

不失一般性, 假设乘子序列 $\left\{ \left(\lambda^k, \mu^k, \gamma^k, v^k, \xi_{I^G \cup I^H}^k \right) \right\}$ 收敛到 $\left\{ \left(\lambda^*, \mu^*, \gamma^*, v^*, \xi_{I^G \cup I^H}^* \right) \right\}$, 对(3.5)式两边取极限, 得到

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^q \gamma_i^* \nabla G_i(x^*) + \sum_{i=1}^q v_i^* \nabla H_i(x^*) = 0.$$

按照上述论证, 依然可得

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &\geq 0, \forall i = 1, \dots, m, \\ \text{supp}(\lambda^*) &\subseteq I^g(x^*), \\ \text{supp}(\gamma^*) &\subseteq I^G(x^*) \cup I^{GH}(x^*), \\ \text{supp}(v^*) &\subseteq I^H(x^*) \cup I^{GH}(x^*). \end{aligned}$$

即 x^* 是 MPSC 的 W-稳定点。

定理 3.3 在定理 3.2 的基础上进一步假设 $\varepsilon_k = o(t_k)$, 常数 $c > 0$, 若对于 $\forall i \in I^{GH}(x^*)$ 及充分大的 k , 有:

$$\left(G_i(x^k), H_i(x^k) \right) \notin \{(a, b) \in R^2 : (1-c)t_k < |ab| < (1+c)t_k\},$$

则 x^* 是 MPSC 的一个 S-稳定点。

证明: 据(3.4), $i \in I^{GH}(x^*)$ 时, $\gamma_i^k = (\xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-}) \cdot H_i(x^k)$, $v_i^k = (\xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-}) \cdot G_i(x^k)$, 因为 $\varepsilon_k = o(t_k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k}{t_k} = 0$, 故对于任意的 $c > 0$ 和充分大的 k , 有 $\left| \frac{\varepsilon_k}{t_k} \right| < c, \varepsilon_k < ct_k$ 。注意到(3.3)式中有 $|G_i(x^k)H_i(x^k)| \leq t_k + \varepsilon_k$, 再结合定理 3.3 的禁止区域, 不难得到 k 充分大时, $|G_i(x^k)H_i(x^k)| \leq (1-c)t_k$, 即 $t_k - G_i(x^k)H_i(x^k) \geq ct_k > 0$, $t_k + G_i(x^k)H_i(x^k) \geq ct_k > 0$ 。由(3.3)式中 $\left| \xi_i^{k,+} [G_i(x^k)H_i(x^k) - t_k] \right| \leq \varepsilon_k$, 可知 k 充分大时, $\left| \xi_i^{k,+} \right| \leq \frac{\varepsilon_k}{t_k - G_i(x^k)H_i(x^k)} \leq \frac{\varepsilon_k}{ct_k} \rightarrow 0, \xi_i^{k,+} \rightarrow 0$, 同理由 $\left| \xi_i^{k,-} [G_i(x^k)H_i(x^k) + t_k] \right| \leq \varepsilon_k$ 可得 $\xi_i^{k,-} \rightarrow 0$, 故 $\xi_i^{k,+} - \xi_i^{k,-} \rightarrow 0$, 即 $\gamma_i^k \rightarrow 0, v_i^k \rightarrow 0, \gamma_i = v_i = 0$, 证得 x^* 是 MPSC 的 S-稳定点。

4. 总结

本文主要研究了 MPSC 问题在 Scholtes 松弛方法下的收敛性, 区别于已有文献仅针对精确 KKT 点开展收敛分析, 本文立足数值求解的实际需要以及非精确稳定点的概念, 证明了在较弱的 ε -KKT 点条件下能得到与 KKT 点条件相同的结果, 即收敛到了 MPSC 的 W-稳定点, 并进一步证明如果增强假设条件, 松弛问题的 ε -KKT 点列可收敛到 MPSC 的强稳定点, 完善了 Scholtes 松弛框架下非精确稳定点的收敛理论, 为面向切换控制、投资组合优化等实际场景设计可靠的数值求解算法提供了理论支撑, 具有重要的理论价值与实践指导意义。

参考文献

- [1] Clason, C., Rund, A. and Kunisch, K. (2017) Nonconvex Penalization of Switching Control of Partial Differential Equations. *Systems & Control Letters*, **106**, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.05.006>
- [2] Hante, F.M. and Sager, S. (2013) Relaxation Methods for Mixed-Integer Optimal Control of Partial Differential Equations. *Computational Optimization and Applications*, **55**, 197-225. <https://doi.org/10.1007/s10589-012-9518-3>
- [3] Mehrlitz, P. (2020) Stationarity Conditions and Constraint Qualifications for Mathematical Programs with Switching Constraints. *Mathematical Programming*, **181**, 149-186. <https://doi.org/10.1007/s10107-019-01380-5>
- [4] Frangioni, A. and Gentile, C. (2007) SDP Diagonalizations and Perspective Cuts for a Class of Nonseparable MIQP. *Operations Research Letters*, **35**, 181-185. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2006.03.008>
- [5] Hoheisel, T., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2011) Theoretical and Numerical Comparison of Relaxation Methods for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *Mathematical Programming*, **137**, 257-288. <https://doi.org/10.1007/s10107-011-0488-5>
- [6] Hoheisel, T., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2012) Convergence of a Local Regularization Approach for Mathematical Programmes with Complementarity or Vanishing Constraints. *Optimization Methods and Software*, **27**, 483-512. <https://doi.org/10.1080/10556788.2010.535170>
- [7] Kanzow, C., Mehrlitz, P. and Steck, D. (2019) Relaxation Schemes for Mathematical Programmes with Switching Constraints. *Optimization Methods and Software*, **36**, 1223-1258. <https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1663425>
- [8] Scholtes, S. (2001) Convergence Properties of a Regularization Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **11**, 918-936. <https://doi.org/10.1137/s1052623499361233>
- [9] Kanzow, C. and Schwartz, A. (2015) The Price of Inexactness: Convergence Properties of Relaxation Methods for Mathematical Programs with Complementarity Constraints Revisited. *Mathematics of Operations Research*, **40**, 253-275. <https://doi.org/10.1287/moor.2014.0667>
- [10] Li, G. and Guo, L. (2022) Mordukhovich Stationarity for Mathematical Programs with Switching Constraints under Weak Constraint Qualifications. *Optimization*, **72**, 1817-1838. <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2038151>
- [11] Kanzow, C. and Schwartz, A. (2010) A New Regularization Method for Mathematical Programs with Complementarity Constraints with Strong Convergence Properties. *Institute of Mathematics*, 8-14.