

带参的非对称四重五点对偶插值型细分格式

王佳怡, 郝金双, 亓万锋*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年7月15日; 录用日期: 2026年8月8日; 发布日期: 2026年8月21日

摘要

对偶插值型细分是几何建模领域的研究热点, 现有相关格式多为对称掩模形式, 本文提出一个带参非对称四重五点对偶插值型细分格式, 构建含单参数的非对称掩模, 可灵活调控极限曲线的光滑性。理论分析表明, 该格式最高可达到 C^2 连续, 计算Hölder指数量化分数阶连续性; 同时, 通过数值实验可验证其插值性。

关键词

对偶插值型细分, 非对称, 四重五点, C^2 连续性

A Parametric Asymmetric Quaternary Five-Point Dual Interpolatory Subdivision Scheme

Jiayi Wang, Jinshuang Hao, Wanfeng Qi*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: July 15, 2026; accepted: August 8, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

Dual interpolatory subdivision schemes are a research hotspot in geometric modeling. Most existing related schemes adopt symmetric masks. This paper proposes a parametric asymmetric quaternary five-point dual interpolatory subdivision scheme with a single parameter, enabling flexible control over the smoothness of the limit curve. Theoretical analysis demonstrates that the scheme can achieve C^2 continuity, and the Hölder exponent is computed to quantify the fractional-order continuity. Meanwhile, the dual interpolation property is verified through numerical experiments.

*通讯作者。

文章引用: 王佳怡, 郝金双, 亓万锋. 带参的非对称四重五点对偶插值型细分格式[J]. 应用数学进展, 2026, 15(8): 180-192. DOI: 10.12677/aam.2026.158344

Keywords

Dual Interpolatory Subdivision, Asymmetric, Quaternary Five-Point, C^2 Continuity

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

细分本质上是一种迭代逼近算法,其核心思想是从一个粗糙的初始控制多边形或控制网格出发,按照规定的细分规则进行反复迭代,最终得到更为光滑的曲线或曲面。该技术在计算机辅助几何设计、计算机图形学等领域有广泛研究和应用。

在基本型细分[1]中,第 k 层的顶点在 $k+1$ 层仍被保留,原有顶点在 $k+1$ 层的位置由自身及其邻域上的顶点按照细分规则计算更新;同时,每条边或每个面会分别产生新的顶点。相比之下,对偶型细分格式[2]可视为顶点分裂过程,第 k 层的顶点在第 $k+1$ 层中不被保留,细分过程会在第 $k+1$ 层产生数量更多的新顶点,并由这些顶点按照特定规则连接形成更为精细的控制网格。这一过程等价于将顶点分裂为面,实现了网格拓扑的对偶变换。

Catmull-Clark [3]算法和 Loop [4]细分算法属于基本型细分。Catmull-Clark 算法中,在每次迭代后,原始网格被细分成更多的四边形面,逐步收敛到双三次 B 样条曲面。该方法能够处理任意拓扑结构的网格,同时保持原始网格的几何和拓扑特性。Loop 细分是典型的三角形网格基本型格式。它通过在每条边上插入新顶点,并将每个原始三角形分裂为 4 个更小的三角形,逐渐生成光滑、连续的曲面。Chaikin 算法[5]是细分领域中的标志性发展,该算法生成的极限曲线为一条光滑 B 样条曲线,在离散控制多边形与连续光滑曲线之间建立了重要联系。Chaikin 算法的割角过程中初始控制顶点不被保留,因此该算法是对偶型细分。Doo-Sabin 细分算法[6]也是一种对偶型细分,每次细分时,每个旧面独立地生成一组新顶点,这些新顶点根据旧面的顶点顺序、旧边的两侧邻接关系以及旧顶点的周围面顺序重新连接。这样构造出的新网格恰好是原网格的拓扑对偶。长期以来,对偶型细分格式通常被认为仅具有逼近性质。然而,近年来的研究打破了这一固有认知,学者们发现对偶型细分的极限曲线也可通过初始控制网格的顶点,达到插值效果,这使得对偶插值型细分成为几何建模领域的新兴热点。2019 年, Romani [7]开创性地提出了对偶插值型细分的构造方法,并给出具体实例。2022 年, Gemignani 等人[8]建立了求解对偶插值细分格式的代数框架,并将其表达为多项式 Bézout 方程的求解问题,给出了对任意 m 重($m \geq 3$)细分的系统构造方法。2023 年, Viscardi [9]探究了奇、偶重数对偶型细分格式插值性的差异。Han [10]指出了对偶型细分可以采用非整数移位 s_a 或多步策略构造对偶插值型格式。当前学者们提出的对偶插值型细分格式的掩模多为对称格式[11]。基于以上,本文提出了一个带参掩模非对称的四重五点对偶插值型细分格式,对比于相同支撑与求和规则下的对称格式,具有一个自由可调节参数。

2. 预备知识

设 $P^0 = \{P_j^0 \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ 为给定细分格式 S 的初始控制点集,第 k 次细分后的控制顶点集合为 $P^k = \{P_j^k \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ 。四重细分格式就是对一个控制多边形 $P^k = \{P_j^k \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ 逐步加细转化为一个更精细化的多边形 $P^{k+1} = \{P_j^{k+1} \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{Z}\}$,因此四重细分格式可表示为 $P_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-4j} P_j^k, i \in \mathbb{Z}$, 其中

$a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 被称为细分格式 S 的掩模。Laurent 多项式将掩模作为变量系数, 用公式表示为 $a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i$, 其也被称作格式 S 的生成函数或生成多项式。

因插值型细分格式在细分过程中需保证第 k 层控制多边形的顶点被保留到第 $k+1$ 层控制多边形上, 因此满足下方格式

$$\begin{cases} P_{4i}^{k+1} = P_i^k, \\ P_{4i+j}^{k+1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{4i+j-4l} P_l^k, j=1,2,3. \end{cases}$$

引理 2.1 [12] 若四重细分格式 S 一致收敛, 则其掩模 $a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 满足

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{4i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{4i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{4i+2} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{4i+3} = 1.$$

引理 2.2 [13] 若四重细分格式 S 的掩模 $a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 满足(2.1), 那么一定存在细分格式 S_1 (S 的一阶差分格式)满足

$$dP^k = S_1 dP^{k-1},$$

式中, $P^k = S^k P^0$, $dP^k = \{(dp^k)_i = 4^k (p_{i+1}^k - p_i^k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 。并且, 当且仅当对任意初始控制集有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{4} S_1 \right)^k \right\|_{\infty} = 0,$$

即细分 $\frac{1}{4} S_1$ 一致收敛于零函数时, 细分 S 一致收敛。

一般地, 将 S 的 n 阶差分格式记为 S_n , S_n 的掩模记为 $a^{(n)} = \{a_i^{(n)} \mid i \in \mathbb{Z}\}$, 则 S_n 的生成多项式表示为

$$a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^{(n)} z^i = \left(\frac{4z^3}{1+z+z^2+z^3} \right)^n a(z).$$

引理 2.3 [13] 若四重细分格式 S 存在掩模 $a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 及差分格式 $S_j (j=1,2,\dots,n+1)$, 且存在 $L \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\left\| \left(\frac{1}{4} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} < 1$, 则四重细分格式是 C^n 连续的。其中,

$$\left\| \left(\frac{1}{4} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| a_{i+4^L j}^{[n+1,L]} \right|, i=0,1,\dots,4^L-1 \right\},$$

$$a^{[n+1,L]}(z) = \sum_{i,j} a_{i+4^L j}^{[n+1,L]} z^{i+4^L j} = \frac{1}{4^L} \prod_{j=0}^{L-1} a^{(n+1)}(z^{4^j}).$$

当 L 越大, 求得的参数范围往往越大。特别地, 当 $L=1$ 时,

$$\left\| \frac{1}{4} S_{n+1} \right\|_{\infty} = \frac{1}{4} \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| a_{i+4j}^{(n+1)} \right|, i=0,1,2,3 \right\} < 1.$$

引理 2.4 [14] 定义参数平移量为 $\tau = \frac{a'(1)}{m}$, 并引入第 k 层控制顶点 $P_i^k (i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0)$ 对应的参数值

$t_i^k = t_0^k + \frac{i}{m^k}$, $t_0^k = t_0^{k-1} - \frac{\tau}{m^k}$ 。在该参数体系下, 收敛细分格式 S_a 再生 d 次多项式的充要条件为

$$a^{(k)}(1) = m \prod_{l=0}^{k-1} (\tau - l), a^{(k)}(\zeta_m^j) = 0, k=0,\dots,d; j=1,\dots,m-1,$$

其中 $\zeta_m^j = \exp\left(\frac{2\pi I}{m} j\right)$, I 为虚数单位。

引理 2.5 [15] 收敛的四重细分格式是对偶插值型的当且仅当

$$\frac{1}{2} + \sum_{\gamma=0}^3 \Phi_{2,2\gamma+1}(z^4) = 4z^{-1} \sum_{\gamma=0}^3 (A_{2-\gamma}(z^2) + A_{4-\gamma}(z^2)) \Phi_{2,2\gamma+1}(z).$$

其中

$$\Phi_{T,n}(z) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(4k + \frac{n}{T}\right) z^{4Tk+n}, n \in \mathbb{Z}, T=2, \varphi \text{ 为极限基函数},$$

$$A_n(z) = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{4k+n} z^{4k+n}, n=0,1,2,3.$$

3. 新的带参非对称四重五点对偶插值细分格式

非对称四重五点细分格式的核心设计思路和推导过程:

(1) 收敛约束:

若一个四重细分格式 S 是收敛的, 则细分格式需满足 $a(1) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i = 4$ 。

(2) 收敛细分格式的通用必要代数条件约束:

$$\sum_{\gamma=0}^{4T-1} \Phi_{T,\gamma}(z^4) = 4z^{-\tau T} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\substack{\gamma=0 \\ \gamma+\beta T \equiv m \pmod{4T}}}^{4T-1} A_{\beta}(z^T) \Phi_{T,\gamma}(z),$$

其中,

$$\Phi_{T,n}(z) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(4k + \frac{n}{T}\right) z^{4Tk+n}, n \in \mathbb{Z}, \tau T \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \varphi \text{ 为极限基函数},$$

$$A_n(z) = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{4k+n} z^{4k+n}, n=0,1,2,3 \quad [15].$$

得到等式

$$A(z) = -\frac{1}{64z^9} (1+z)^4 (1+z^2)^4 (-z^7 - b_0 + z^7 b_0 - z b_1 + z^7 b_1 - z^2 b_2 + z^7 b_2 - z^3 b_3 + z^7 b_3 - z^4 b_4 + z^7 b_4 - z^5 b_5 + z^7 b_5 - z^6 b_6 + z^7 b_6).$$

(3) 对偶插值充要条件约束:

因为对偶插值型细分格式的对称中心为 $\frac{1}{2}$, 所以对(2)中约束取 $\tau = \frac{1}{2}$ 。又为使 τT 为最小正整数, 所以取 $T=2$ 。对收敛的四重对偶插值型细分格式有以下等式成立

$$\frac{1}{2} + \sum_{\gamma=0}^3 \Phi_{2,2\gamma+1}(z^4) = 4z^{-1} \sum_{\gamma=0}^3 (A_{2-\gamma}(z^2) + A_{4-\gamma}(z^2)) \Phi_{2,2\gamma+1}(z) \quad [15].$$

解得

$$b_1 = 5b_0, b_2 = -\frac{3}{640}(79 + 8320b_0), b_3 = \frac{1}{128}(-237 + 10880b_0),$$

$$b_4 = \frac{1}{64}(451 - 5540b_0), b_5 = \frac{3}{64}(-95 + 832b_0), b_6 = \frac{1}{128}(67 - 640b_0).$$

令 $b_0 = b$ ，将上述关系代入 $A(z)$ 解得一个掩模非对称的四重五点对偶插值型细分格式的生成多项式

$$a(z) = -\frac{1}{40960z^9}(1+z)^4(1+z^2)^4(-640b-3200bz+(24960b+237)z^2+(1185-54400b)z^3 \\ + (54400b-4510)z^4+(2850-24960b)z^5+(3200b-335)z^6+(640b-67)z^7).$$

对称的细分格式要求在加细过程中对相对应的顶点赋予相同的权值，而非对称格式可以针对不同顶点、不同方向赋予不同的权值，因此非对称的细分格式比在同等支撑及相同求和规则下的对称格式更加灵活。

新的非对称四重五点对偶插值型细分格式如下

$$\begin{cases} P_{4i}^{k+1} = a_8 P_{i-2}^k + a_4 P_{i-1}^k + a_0 P_i^k + a_{-4} P_{i+1}^k + a_{-8} P_{i+2}^k, \\ P_{4i+1}^{k+1} = a_9 P_{i-2}^k + a_5 P_{i-1}^k + a_1 P_i^k + a_{-3} P_{i+1}^k + a_{-7} P_{i+2}^k, \\ P_{4i+2}^{k+1} = a_{10} P_{i-2}^k + a_6 P_{i-1}^k + a_2 P_i^k + a_{-2} P_{i+1}^k + a_{-6} P_{i+2}^k, \\ P_{4i+3}^{k+1} = a_7 P_{i-1}^k + a_3 P_i^k + a_{-1} P_{i+1}^k + a_{-5} P_{i+2}^k + a_{-9} P_{i+3}^k, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 a_{-9} 到 a_{10} 依次为

$$\frac{b}{64}, \frac{9b}{64}, -\frac{237}{40960} - \frac{9b}{64}, -\frac{2133}{40960} - \frac{b}{64}, -\frac{65}{1024} - \frac{b}{16}, -\frac{35}{1024} - \frac{9b}{16}, \frac{747}{10240} + \frac{9b}{16}, \\ \frac{4223}{10240} + \frac{b}{16}, \frac{715}{1024} + \frac{3b}{32}, \frac{945}{1024} + \frac{27b}{32}, \frac{20709}{20480} - \frac{27b}{32}, \frac{14501}{20480} - \frac{3b}{32}, \frac{429}{1024} - \frac{b}{16}, \frac{135}{1024} - \frac{9b}{16}, \\ -\frac{953}{10240} + \frac{9b}{16}, -\frac{717}{10240} + \frac{b}{16}, -\frac{55}{1024} + \frac{b}{64}, -\frac{21}{1024} + \frac{9b}{64}, \frac{603}{40960} - \frac{9b}{64}, \frac{67}{40960} - \frac{b}{64}.$$

该四重非对称格式具有一个参数 b ，而对称格式因需要满足掩模的对称性，增加约束条件

$$a_{-9} = a_{10}, a_{-8} = a_9, a_{-7} = a_8, a_{-6} = a_7, a_{-5} = a_6, \\ a_{-4} = a_5, a_{-3} = a_4, a_{-2} = a_3, a_{-1} = a_2, a_0 = a_1,$$

解得掩模中参数 $b = \frac{67}{1280}$ 。因此在同等支撑及相同的求和规则下，该非对称的细分格式退化成的对称格式如下

$$\begin{cases} P_{4i}^{k+1} = \frac{1077}{81920} P_{i-2}^k + \frac{2097}{20480} P_{i-1}^k + \frac{39609}{40960} P_i^k + \frac{1303}{20480} P_{i+1}^k + \frac{603}{81920} P_{i+2}^k, \\ P_{4i+1}^{k+1} = \frac{603}{81920} P_{i-2}^k + \frac{1303}{20480} P_{i-1}^k + \frac{39609}{40960} P_i^k + \frac{2097}{20480} P_{i+1}^k + \frac{1077}{81920} P_{i+2}^k, \\ P_{4i+2}^{k+1} = \frac{67}{81920} P_{i-2}^k + \frac{1367}{20480} P_{i-1}^k + \frac{28801}{40960} P_i^k + \frac{8513}{20480} P_{i+1}^k + \frac{4333}{81920} P_{i+2}^k, \\ P_{4i+3}^{k+1} = \frac{4333}{81920} P_{i-1}^k + \frac{8513}{20480} P_i^k + \frac{28801}{40960} P_{i+1}^k + \frac{1367}{20480} P_{i+2}^k + \frac{67}{81920} P_{i+3}^k, \end{cases}$$

其对应的生成函数为

$$b(z) = \frac{(1+z)^5(1+z^2)^4(67+268z-3355z^2+6680z^3-3355z^4+268z^5+67z^6)}{81920z^9}.$$

上述两个细分格式的求和规则都为 4，极限基函数的支撑区间为 $\left[-3, \frac{10}{3}\right]$ 。但对称格式为无参数形式，

因此其灵活性不如带有一个可调节参数的非对称格式。

3.1. 连续性分析

根据引理 2.3 可知连续性 C^n 受参数取值的影响, 下面定理给出细分格式(3.1)的整数阶连续性。

定理 3.1 当 $-0.392101 < b < 0.496788$ 时, 细分格式(2)是 C^0 连续的; 当 $-0.006971 < b < 0.110757$ 时, 细分格式(2)是 C^1 连续的; 当 $0.0459619 < b < 0.0587256$ 时, 细分格式(2)是 C^2 连续的。

证明: 对细分格式(3.1)的一阶差分细分序列进行分组求和,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{4} S_1 \right\|_{\infty} = & \max \left\{ \left| \frac{67-640b}{40960} + \frac{1}{64}|b| + \left| -\frac{3(1185-54400b)}{10240} + \frac{33b}{64} - \frac{33(-67+640b)}{40960} + \frac{15(-95+832b)}{2048} \right. \right. \\ & - \frac{3(-451+5440b)}{1024} - \frac{3(79+8320b)}{4096} \left. \right| + \left| -\frac{3(1185-54400b)}{40960} + \frac{451-54400b}{4096} + \frac{31b}{32} - \frac{9(79+8320b)}{20480} \right| \\ & + \left| -\frac{31(-67+640b)}{20480} + \frac{9(-95+832b)}{2048} - \frac{3(-451+5440b)}{4096} + \frac{-1185+54400b}{40960} \right|, \frac{1}{8}|b| + \left| \frac{451-5440b}{4096} \right. \\ & + \frac{67-640b}{1024} + \frac{9(-95+832b)}{4096} \left. \right| + \left| \frac{3(1185-54400b)}{20480} + \frac{9b}{8} + \frac{3(-95+832b)}{4096} - \frac{3(-451+5440b)}{4096} \right. \\ & - \frac{3(79+8320b)}{4096} \left. \right| + \left| \frac{b}{4} - \frac{7(-67+64b)}{5120} + \frac{9(-95+832b)}{1024} - \frac{3(-451+5440b)}{1024} - \frac{9(79+8320b)}{20480} \right. \\ & + \frac{-1185+54400b}{4096} - \frac{21(-67+640b)}{40960} \left. \right|, \left| -\frac{21(-67+640b)}{40960} + \frac{3(-95+832b)}{4096} \right| + \left| \frac{3(1185-54400b)}{20480} \right. \\ & + \frac{5b}{64} - \frac{7(-67+640b)}{4096} + \frac{9(-95+832b)}{1024} - \frac{5(-451+5440b)}{2048} - \frac{9(79+8320b)}{40960} \left. \right| + \left| \frac{21b}{64} \right. \\ & + \frac{3(79+8320b)}{40960} \left. \right| + \left| \frac{67-640b}{8192} + \frac{35b}{32} + \frac{9(-95+832b)}{4096} - \frac{3(-451+5440b)}{2048} - \frac{9(79+8320b)}{10240} \right. \\ & + \frac{-1185+54400b}{4096} \left. \right|, \frac{67-640b}{5120} + \left| -\frac{3(1185-54400b)}{10240} + \frac{67-640b}{2560} + \frac{7b}{8} + \frac{9(-95+832b)}{2048} \right. \\ & - \frac{5(-451+5440b)}{2048} - \frac{9(79+8320b)}{10240} \left. \right| + \left| -\frac{3(1185-54400b)}{40960} - \frac{9(-67+640b)}{5120} + \frac{15(-95+832b)}{2048} \right. \\ & \left. - \frac{3(-451+5440b)}{2048} - \frac{3(79+8320b)}{40960} \right| + \left| \frac{5b}{8} - \frac{9(79+8320b)}{40960} + \frac{-1185+54400b}{40960} \right| \}. \end{aligned}$$

根据引理 2.3, 求解不等式 $\left\| \frac{1}{4} S_1 \right\|_{\infty} \leq 1$, 解得 $-0.392101 < b < 0.496788$, 此时细分格式(3.1)是 C^0 连续的。

对细分格式(3.1)的二阶差分细分序列进行分组求和,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{4} S_2 \right\|_{\infty} = & \max \left\{ \left| \frac{1}{16}|b| + \frac{7(-67+640b)}{10240} + \left| \frac{451-5440b}{1024} + \frac{23b}{16} - \frac{9(79+8320b)}{10240} + \frac{-1185+54400b}{5120} \right| \right. \\ & + \left| -\frac{17(-67+640b)}{10240} + \frac{3}{256}(-95+832b) - \frac{3(-451+5440b)}{1024} - \frac{3(79+8320b)}{10240} + \frac{-1185+54400b}{5120} \right|, \\ & \left| \frac{67-640b}{10240} + \frac{7}{16}|b| + \left| \frac{3(1185-54400b)}{10240} + \frac{1}{512}(451-5440b) + \frac{3(-95+832b)}{1024} - \frac{3(79+8320b)}{2560} \right. \right. \\ & \left. + \frac{17b}{16} \right| + \left| \frac{1}{512}(451-5440b) - \frac{23(-67+640b)}{10240} + \frac{9(-95+832b)}{1024} + \frac{-1185+54400b}{10240} \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{451-5440b}{1024} - \frac{19(-67+640b)}{10240} + \frac{3}{512}(-95+832b) \right| + \left| \frac{13b}{16} - \frac{3(79+8320b)}{10240} \right| \\
& + \left| \frac{67-640b}{2048} + \frac{11b}{16} + \frac{3}{512}(-95+832b) - \frac{3(-451+5440b)}{1024} - \frac{9(79+8320b)}{10240} + \frac{-1185+54400b}{2560} \right|, \\
& \left| -\frac{13(-67+640b)}{10240} + \frac{3(-95+832b)}{1024} \right| + \left| \frac{3(1185-54400b)}{10240} + \frac{1}{256}(451-5440b) + \frac{5b}{16} \right. \\
& \left. - \frac{11(-67+640b)}{10240} + \frac{9(-95+832b)}{1024} - \frac{3(79+8320b)}{5120} \right| + \left| -\frac{13(-67+640b)}{10240} + \frac{3(-95+832b)}{1024} \right| \\
& + \left| -\frac{3(1185-54400b)}{10240} + \frac{451-5440b}{256} + \frac{5b}{16} - \frac{11(640b-67)}{10240} + \frac{9(832b-95)}{1024} - \frac{3(79+8320b)}{5120} \right| \\
& + \left| \frac{19b}{16} - \frac{3(79+8320b)}{5120} + \frac{-1185+54400b}{10240} \right|.
\end{aligned}$$

根据引理 2.3, 求解不等式 $\left\| \frac{1}{4}S_2 \right\|_{\infty} \leq 1$, 解得 $-0.006971 < b < 0.110757$, 此时细分格式(3.1)是 C^1 连续的。

根据引理 2.3, 对细分格式(3.1)的三阶差分细分序列进行分组求和, 当 $L=1,2$ 时, 不等式 $\left\| \frac{1}{4}S_3 \right\|_{\infty} \leq 1$ 与 $\left\| \left(\frac{1}{4}S_3 \right)^2 \right\|_{\infty} \leq 1$ 无解, 当 $L=3$ 时, 求解不等式 $\left\| \left(\frac{1}{4}S_3 \right)^3 \right\|_{\infty} \leq 1$, 解得 $0.0459619 < b < 0.0587256$, 此时细分格式(3.1)是 C^2 连续的。

经典插值型细分格式[2]在细分过程中保留所有旧点, 并在每两个相邻点之间插入一个新点。新点的位置由其左右各两个邻近点的加权平均决定。当 $|w| < \frac{1}{4}$ 时, 极限曲线为 C^0 连续; 当 $0 < w < \frac{1}{8}$ 时, 极限曲线为 C^0 连续。相对于格式[2]本文提出的细分格式具有更高的连续性, 生成的极限曲线更为平滑。

3.2. Hölder 指数

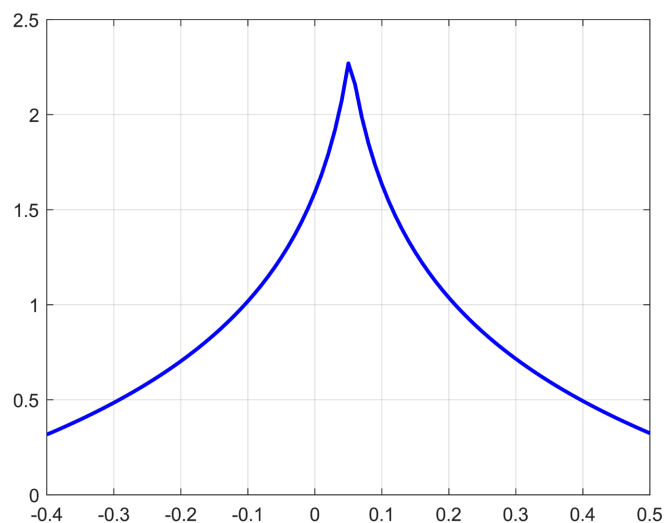


Figure 1. The Hölder exponent curve of the subdivision scheme (3.1)

图 1. 细分格式(3.1)的 Hölder 指数图像

图 1 为细分格式(3.1)在参数区间-0.4 至 0.5 内, 以 0.01 为步长的 Hölder 指数图像。从图像中可以看出 Hölder 指数随参数 b 的增大先增大后减小。Hölder 指数可显示出细分格式的分阶连续性。当参数 $b = 0.052344$ 时细分格式(3.1)取得最大 Hölder 指数, 此时的分阶连续性为 2.290652。

3.3. 多项式再生性分析

定理 3.2 细分格式(3.1)的多项式再生次数为 3 次。

证明:

$$\begin{aligned} a'(z) &= -\frac{1}{40960z^{10}}(1+z)^3(1+z^2)^3(640b(-1+z)^4(9+81z+18z^2+12z^3+19z^4+91z^5+10z^6) \\ &\quad -z^2(1659+7821z-20417z^2+3335z^3+5415z^4+20371z^5-20991z^6+3417z^7+670z^8)), \\ a''(z) &= -\frac{1}{20480z^{11}}(1+z+z^2+z^3)^2(1920b(-1+z)^3(15+123z+39z^2+32z^3+42z^4+138z^5+42z^6 \\ &\quad +32z^7+39z^8+123z^9+15z^{10})-z^2(-6636-31521z+43950z^2+19207z^3-6344z^4-62222z^5 \\ &\quad +33076z^6+31890z^7+22548z^8-63921z^9+15678z^{10}+3015z^{11})), \\ a'''(z) &= -\frac{3}{5120z^{12}}(z^2(-4977-29862z-22750z^2-7000z^3+7470z^4+16892z^5+7150z^6-4290z^{10} \\ &\quad -5400z^{11}+9530z^{12}+14340z^{13}+19250z^{14}+11760z^{15}-12663z^{16}-2010z^{17})+160b(165 \\ &\quad +1080z-756z^2-56z^3-140z^4-720z^5+360z^6+16z^7+6z^8+4z^{12}+144z^{13}-360z^{14}-80z^{15} \\ &\quad -35z^{16}-504z^{17}+756z^{18}+120z^{19})), \\ a^{(4)} &= -\frac{3}{2560z^{13}}(z^2(24885+134379z+91000z^2+24500z^3-22410z^4-42230z^5-14300z^6-2700z^{11} \\ &\quad +9530z^{12}+21510z^{13}+38500z^{14}+29400z^{15}-37989z^{16}-7035z^{17})+320b(-495-2970z+1890z^2 \\ &\quad +126z^3+280z^4+1260z^5-540z^6-20z^7-6z^8+36z^{13}+126z^3+280z^4+1260z^5-540z^6-20z^7 \\ &\quad -6z^8+36z^{13}-180z^{14}-60z^{15}-35z^{16}-630z^{17}+1134z^{18}+210z^{19})), \end{aligned}$$

经计算得

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{a'(1)}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}a'(1) = \frac{1}{2} = \tau, \quad \frac{1}{4}a''(1) = -\frac{1}{4} = \tau(\tau-1), \\ \frac{1}{4}a'''(1) &= \frac{3}{8} = \tau(\tau-1)(\tau-2), \quad \frac{1}{4}a^{(4)}(1) = -\frac{579}{8} \neq \tau(\tau-1)(\tau-2)(\tau-3) \end{aligned}$$

根据引理 2.4 知细分格式(3.1)的多项式再生次数为 3 次。

3.4. 基函数

图 2 为细分格式(3.1)的参数 b 在 C^0 区间内取值的基函数图像, 图中可见当 $b = 0.05$ 时图像最光滑, $b = 0.01$ 时的图像光滑度高于 $b = -0.02$ 。结合 Hölder 指数图像可知当 $b = 0.05$ 时细分格式(3.1)的连续性大于 $b = 0.01$ 时、大于 $b = -0.02$ 时, 因此从基函数图像的光滑程度也可很好地反映出细分格式的连续性。

细分格式(3.1)的极限基函数的支撑区间为 $\left[\frac{-9,10}{4-1}\right] = \left[-3, \frac{10}{3}\right]$, 取参数化 $t_0^0 = \frac{\tau}{m-1} = \frac{1/2}{4-1} = \frac{1}{6}$, 记基函数为 $\varphi(x)$, 从图像中可见 $\varphi(t_0^0) = 1$, 说明格式(3.1)是对偶插值型。

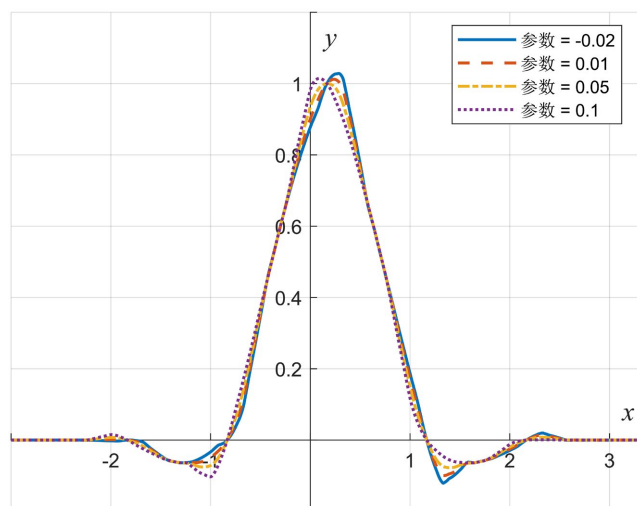


Figure 2. The basis limit function of the subdivision scheme (3.1) when $b = -0.02, 0.01, 0.5, 0.1$

图 2. 当 $b = -0.02, 0.01, 0.5, 0.1$ 时细分格式(3.1)的基函数

3.5. 收敛性分析

对任意 m 重对偶型细分格式 $a(z)$, 设 $\tau = \frac{a'(1)}{m} = \frac{1}{2}$, 其 L 次细分等价于 m^L 重细分 $a^L(z)$ 的一次细分。

对 $a^L(z)$ 作适当平移变换后, 其生成函数表达式为

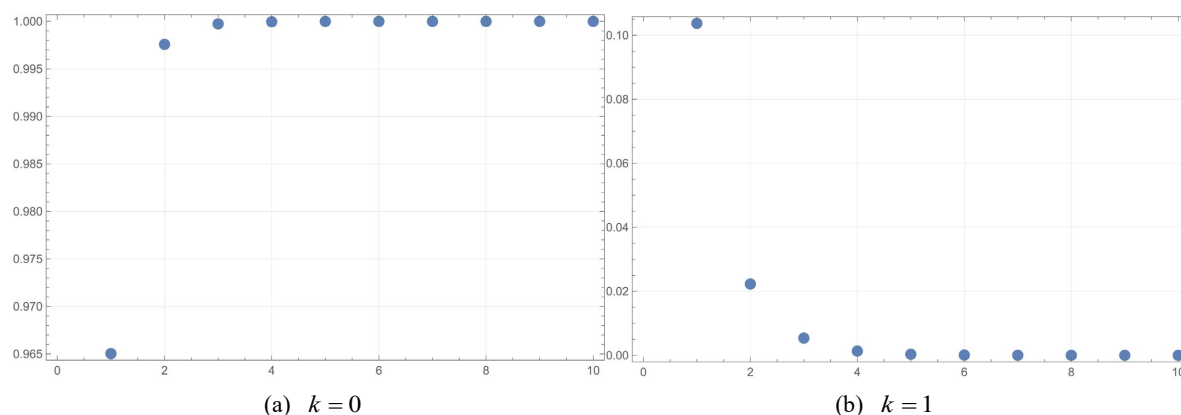
$$a^L(z) = \sum_j a_j^L z^j = z^{\frac{-m-m^2-\dots-m^{L-1}}{2}} a(z) a(z^m) a(z^{m^2}) \cdots a(z^{m^{L-1}}).$$

此时, $a^L(z)$ 对应的 $\tau = \frac{(a^L(z))'|_{z=1}}{m} = \frac{1}{2}$ 。若 m^L 重细分格式的掩模满足

$$\begin{cases} a_0^L = 1, \\ a_{k \cdot m^L}^L = 0, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \end{cases}$$

L 为细分次数, 则该格式是插值的。

图 3 为四重对偶型细分格式(3.1)在 $a_0^L, a_{4^L}^L, a_{2 \cdot 4^L}^L, a_{3 \cdot 4^L}^L$ 处的收敛到插值型细分的收敛速度, 横坐标表示的是细分次数 L 。随着细分次数 L 的增大, a_0^L 趋于 1, $a_{4^L}^L, a_{2 \cdot 4^L}^L, a_{3 \cdot 4^L}^L$ 趋于 0。



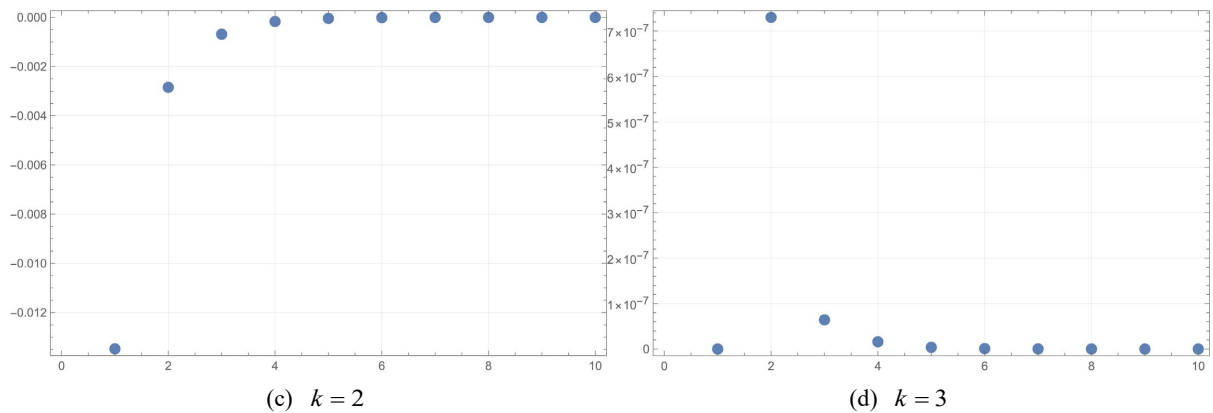
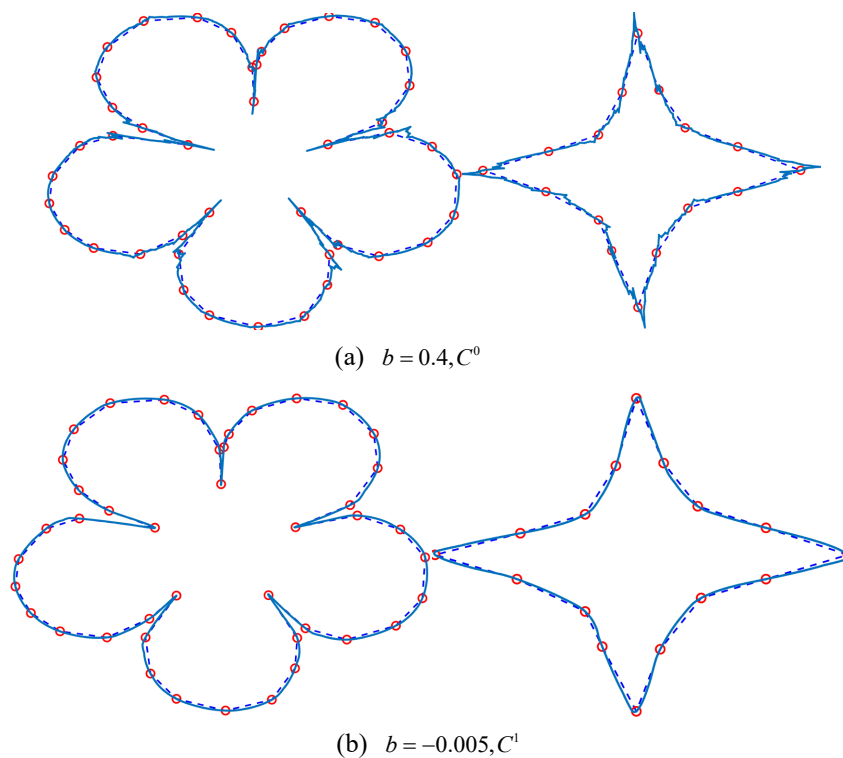


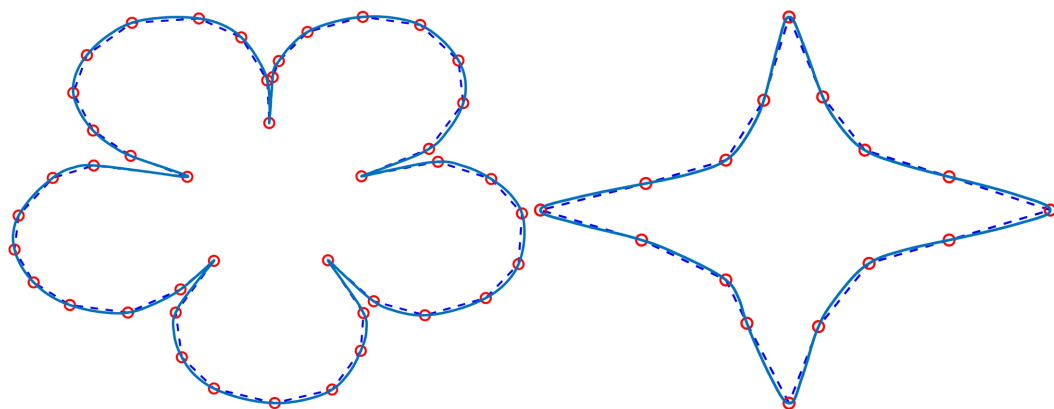
Figure 3. The convergence speed of subdivision scheme (3.1) at point a_{k-4}^L when $k=0,1,2,3$

图 3. 当 $k=0,1,2,3$ 时细分格式(3.1)在 a_{k-4}^L 处收敛到插值型细分的速度

3.6. 数值实验

图 4 给出了单参数非对称四重点细分格式(3.1)在不同参数取值下生成的极限曲线，虚线为初始控制网格，实线为加细后的极限曲线。格式(3.1)的光滑度随参数变化呈现出明显的阶梯差异，其中子图(a)对应的是参数 $b=0.4$ 时的情形，此时细分格式(3.1)的极限曲线是 C^0 连续的，极限曲线在部分控制顶点处存在明显的折角；子图(b)对应的是参数 $b=-0.005$ 时的情形，此时细分格式(3.1)的极限曲线是 C^1 连续的，极限曲线折角消失，视觉上更为平滑；子图(c)对应的是参数 $b=0.05$ 时的情形，此时细分格式(3.1)的极限曲线是 C^2 连续的，极限曲线的形态最为光滑。对比三组结果可以发现，随着参数的调整，该细分格式生成的极限曲线的光滑性从仅连续提升至一阶、二阶连续，直接体现了参数对极限曲线光滑性的调控作用。

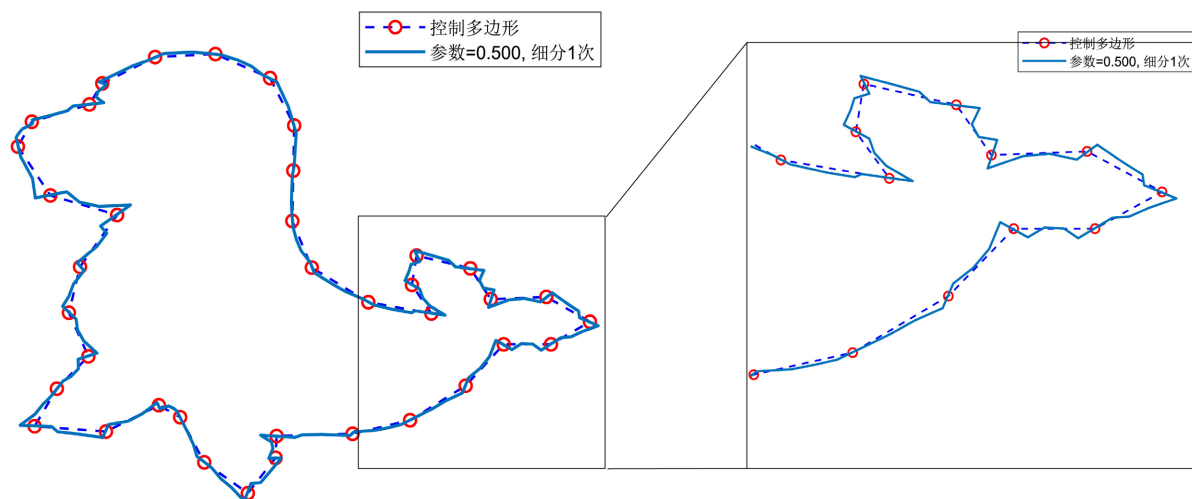




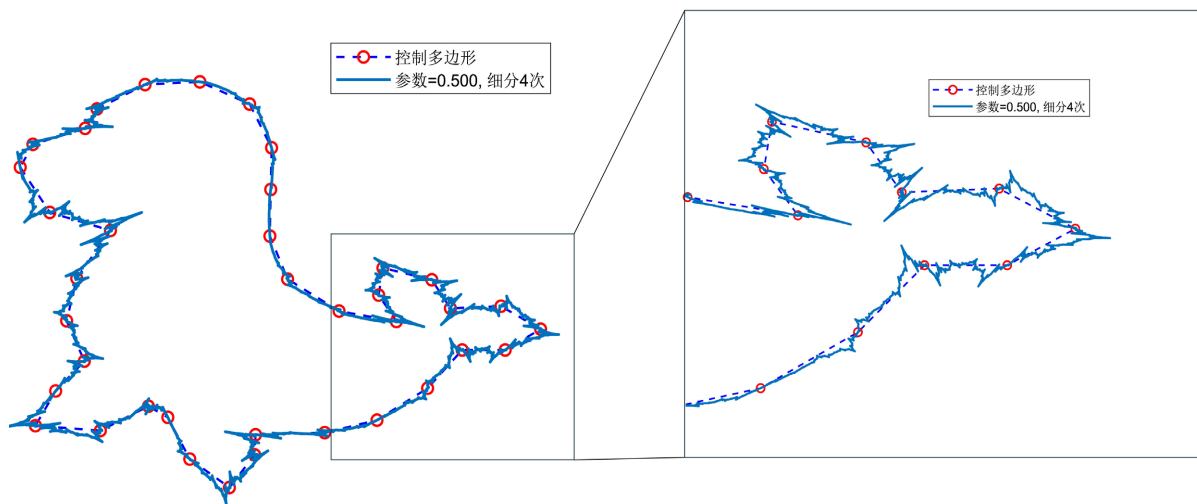
(c) $b = 0.05, C^2$

Figure 4. Subdivision scheme (3.1) generates some C^0, C^1 and C^2 continuity limit curves

图 4. 细分格式(3.1)生成的 C^0, C^1 和 C^2 连续的极限曲线



(a) 细分一次后的控制网格($b = 0.500$)



(b) 细分四次后的控制网格($b = 0.500$)

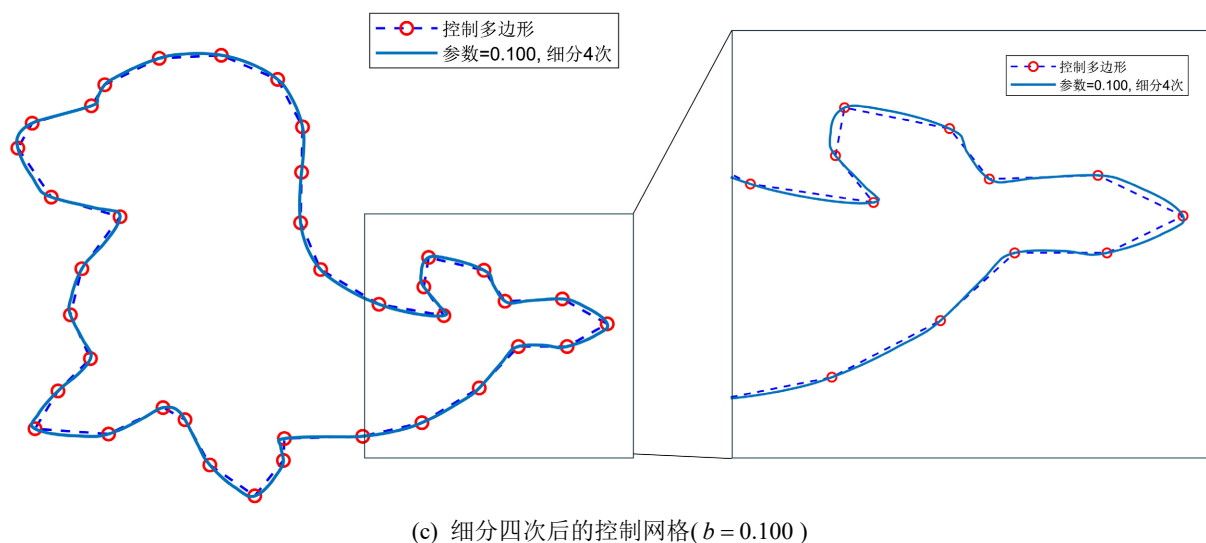


Figure 5. Subdivision effect diagrams of the subdivision scheme (3.1)

图 5. 细分格式(3.1)的细分效果图

从图 5 中(a)、(b)可以看出经四次加细后控制顶点总数显著增多,相较于一次加细,经四次加细后的极限曲线更贴合初始控制多边形形状;从(b)、(c)可见细分格式(3.1)经四次细分后的极限曲线能够经过所有红色初始控制顶点,具备良好插值效果,且通过调整参数的取值可以获得更光滑的极限曲线。

参考文献

- [1] Kobbelt, L. (1996) Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology. *Computer Graphics Forum*, **15**, 409-420. <https://doi.org/10.1111/1467-8659.1530409>
- [2] Dyn, N., Levin, D. and Gregory, J.A. (1987) A 4-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design. *Computer Aided Geometric Design*, **4**, 257-268. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(87\)90001-x](https://doi.org/10.1016/0167-8396(87)90001-x)
- [3] Catmull, E. and Clark, J. (1978) Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer-Aided Design*, **10**, 350-355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)
- [4] Loop, C. (1987) Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles. Ph.D. Thesis, University of Utah.
- [5] Chaikin, G.M. (1974) An Algorithm for High-Speed Curve Generation. *Computer Graphics and Image Processing*, **3**, 346-349. [https://doi.org/10.1016/0146-664x\(74\)90028-8](https://doi.org/10.1016/0146-664x(74)90028-8)
- [6] Doo, D. and Sabin, M. (1978) Behaviour of Recursive Division Surfaces near Extraordinary Points. *Computer-Aided Design*, **10**, 356-360. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90111-2](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90111-2)
- [7] Romani, L. (2019) Interpolating M-Refinable Functions with Compact Support: The Second Generation Class. *Applied Mathematics and Computation*, **361**, 735-746. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.018>
- [8] Gemignani, L., Romani, L. and Viscardi, A. (2022) Bezout-Like Polynomial Equations Associated with Dual Univariate Interpolating Subdivision Schemes. *Advances in Computational Mathematics*, **48**, Article No. 4. <https://doi.org/10.1007/s10444-021-09912-4>
- [9] Viscardi, A. (2023) Optimized Dual Interpolating Subdivision Schemes. *Applied Mathematics and Computation*, **458**, Article ID: 128215. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128215>
- [10] Han, B. (2024) Interpolating Refinable Functions and n_s -Step Interpolatory Subdivision Schemes. *Advances in Computational Mathematics*, **50**, Article No. 98. <https://doi.org/10.1007/s10444-024-10192-x>
- [11] 元万锋, 曹宏, 何月, 刘月. 一个带参数的对偶插值型细分[J]. *理论数学*, 2024, 14(2): 661-668.
- [12] Dyn, N. (1992) Subdivision Schemes in Computer-Aided Geometric Design. In: Light, W., Ed., *Advances in Numerical Analysis*, Oxford University Press, 36-104. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198534396.003.0002>
- [13] Aspert, N. (2003) Non-Linear Subdivision of Univariate Signals and Discrete Surfaces. Ph.D. Thesis, EPFL.
- [14] Conti, C. and Hormann, K. (2011) Polynomial Reproduction for Univariate Subdivision Schemes of Any Arity. *Journal*

- of Approximation Theory*, **163**, 413-437. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2010.11.002>
- [15] Romani, L. and Viscardi, A. (2020) Dual Univariate Interpolatory Subdivision of Every Arity: Algebraic Characterization and Construction. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **484**, Article ID: 123713. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123713>