

二维Burgers方程非线性多重网格法转移算子效率比较

疏凌云^{1,2*}, 刘盛琦^{1,2}

¹南京航空航天大学数学学院, 江苏 南京

²飞行器数学建模与高性能计算工信部重点实验室(南航), 江苏 南京

收稿日期: 2026年7月13日; 录用日期: 2026年8月5日; 发布日期: 2026年8月18日

摘要

本文研究二维无粘Burgers方程稳态求解中非线性多重网格转移算子的计算效率。空间离散过程中采用有限体积法和Rusanov数值通量, 时间离散采用伪时间迭代, 并比较不同转移算子组合下的收敛表现。数值实验说明了合适的转移算子组合能够明显减少迭代步数和计算时间, 其中双线性伴随限制与双线性延拓组合在二阶格式下表现最优。含激波算例进一步表明, 高阶转移算子能够加快光滑区的残差衰减, 同时保持激波附近的迭代稳定性和数值解质量。

关键词

Burgers方程, 非线性多重网格法, 限制算子, 延拓算子

Efficiency Comparison of Transfer Operators in Nonlinear Multigrid for the Two-Dimensional Burgers Equation

Lingyun Shu^{1,2*}, Shengqi Liu^{1,2}

¹School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

²Key Laboratory of Mathematical Modelling and High Performance Computing of Air Vehicles MIIT (NUAA), Nanjing Jiangsu

Received: July 13, 2026; accepted: August 5, 2026; published: August 18, 2026

Abstract

This paper investigates the computational efficiency of nonlinear multigrid-transfer operators for

*通讯作者。

文章引用: 疏凌云, 刘盛琦. 二维 Burgers 方程非线性多重网格法转移算子效率比较[J]. 应用数学进展, 2026, 15(8): 167-179. DOI: 10.12677/aam.2026.158343

the steady-state solution of the two-dimensional inviscid Burgers equation. In the spatial discretization, the finite volume method and the Rusanov numerical flux are employed, while pseudo-time iteration is used for temporal advancement. The convergence performance of different combinations of transfer operators is then compared. Numerical experiments show that an appropriate combination of transfer operators can significantly reduce both the number of iterations and the computational time. In particular, the combination of bilinear-adjoint restriction and bilinear prolongation exhibits the best performance for the second-order scheme. The shock-containing test case further shows that high-order transfer operators can accelerate residual decay in smooth regions while maintaining iterative stability and solution quality near the shock.

Keywords

Burgers Equation, Nonlinear Multigrid Method, Restriction Operator, Prolongation Operator

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Burgers 方程是非线性守恒律中的典型模型方程, 能够反映非线性对流、波传播以及间断形成等重要特征[1]。对于稳态问题, 通常需要在单层网格上进行迭代获得收敛解, 然而随着网格加密, 离散方程规模增大, 低频误差衰减较慢, 往往会导致迭代步数和计算时间明显增加。

多重网格方法是一类有效的加速技术[2][3], 其基本思想是在不同尺度的网格之间传递误差信息, 将细网格上的低频误差转化为粗网格上的高频误差, 从而加速误差衰减。对于 Burgers 方程这类非线性问题, 通常采用非线性多重网格方法[4][5], 在各层网格上直接构造并求解非线性离散方程。该方法的计算效率不仅取决于光滑器和粗网格求解过程, 也与网格转移算子的选取密切相关, 其中转移算子包括限制算子和延拓算子。

本文针对二维无粘 Burgers 方程的稳态求解, 采用有限体积法和 Rusanov 数值通量[6]进行空间离散, 并在非线性多重网格法框架下比较不同限制算子与延拓算子组合的收敛性能。通过一阶和二阶空间精度格式下的数值实验, 分析不同转移算子的组合对迭代步数和计算时间的影响, 从而说明合理选择限制与延拓算子对提高非线性多重网格收敛效率的重要作用。

2. 模型方程与有限体积离散

2.1. 模型方程

考虑二维无粘 Burgers 方程, 其守恒形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = \sin \frac{x+y}{\sqrt{2}} \cos \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad f(u) = g(u) = \frac{u^2}{2\sqrt{2}}, \quad (1)$$

其中, $u = u(x, y, t)$ 为待求守恒变量, $f(u)$ 和 $g(u)$ 分别表示 x 与 y 方向上的通量函数, 右端项为源项。计算区域取为 $(x, y) = [0, \pi/\sqrt{2}] \times [0, \pi/\sqrt{2}]$ 。本文中 Burgers 方程的相关设置具体参考论文[7]。边界条件由精确解给出

$$u(x, y) = \sin \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

初始条件取为精确解的扰动形式:

$$u(x, y, 0) = \beta \sin \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

其中, $\beta = 1.2$ 。该初值与稳态精确解存在一定偏差, 可以避免初始场过于接近收敛解, 从而更清楚地反映不同迭代方法和不同转移算子组合对收敛过程的影响。

2.2. 空间有限体积离散

在计算区域 (x, y) 上构造均匀矩形网格。设 N_x 、 N_y 分别为 x 方向和 y 方向上的网格单元数, $N_x = N_y$, 则空间步长定义为

$$h_x = h_y = \frac{\pi}{\sqrt{2}N_x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}N_y}。$$

记 $x_i = (i + 1/2)h_x$, $y_j = (j + 1/2)h_y$ 为单元中心点, $x_{i+\frac{1}{2}} = (i+1)h_x$, $y_{j+\frac{1}{2}} = (j+1)h_y$ 为单元边界点,

其中 $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$, $j = 0, 1, \dots, N_y - 1$ 。对应的单元控制体记为 $C_{i,j} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right]$ 。对(1)在控制体 $C_{i,j}$ 上积分, 有

$$\frac{d}{dt} \iint_{C_{i,j}} u \, dx \, dy + \iint_{C_{i,j}} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_{C_{i,j}} \sin \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx \, dy := S_{i,j}, \quad (2)$$

其中, $S_{i,j}$ 表示源项在控制体上的积分。有限体积方法以单元平均值作为未知量, 可以使离散格式在每个控制体上保持守恒结构。于是记 $U_{i,j} \approx (1/h_x h_y) \iint_{C_{i,j}} u(x, y, t) \, dx \, dy$ 。对(2)进行半离散化, 可得

$$\frac{dU_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{h_x} \left(F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{1}{h_y} \left(G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \frac{S_{i,j}}{h_x h_y} := N(U_{i,j}), \quad (3)$$

其中, $F_{i+\frac{1}{2},j}$ 与 $F_{i-\frac{1}{2},j}$ 分别表示控制体左右界面数值通量, $G_{i,j+\frac{1}{2}}$ 与 $G_{i,j-\frac{1}{2}}$ 分别表示控制体上下界面数值通量。

$N(U_{i,j})$ 表示空间离散后得到的半离散算子。为了稳定处理 Burgers 方程中的非线性对流项, 本文采用 Rusanov 数值通量。对于 x 方向界面, 有

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = \hat{f}(U_L, U_R), \quad \hat{f}(U_L, U_R) = \frac{f(U_L) + f(U_R)}{2} - \frac{\alpha_f}{2} (U_R - U_L), \quad \alpha_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \max(|U_L|, |U_R|)。$$

对于 y 方向界面, 有

$$G_{i,j+\frac{1}{2}} = \hat{g}(U_B, U_T), \quad \hat{g}(U_B, U_T) = \frac{g(U_B) + g(U_T)}{2} - \frac{\alpha_g}{2} (U_T - U_B), \quad \alpha_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \max(|U_B|, |U_T|),$$

其中, U_L, U_R 分别表示界面左右两侧的重构状态, U_B, U_T 分别表示界面上下两侧的重构状态, α_f, α_g 为局部数值耗散系数。Rusanov 通量形式简单, 鲁棒性较好, 能够为非线性双曲方程的稳态迭代提供必要的稳定性。

2.3. 空间离散精度

空间离散精度主要由单元界面两侧状态量的重构方式决定。在一阶空间精度格式下, 界面两侧的状态量直接取相邻单元的平均值。分别对于 x 方向界面上的 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 和 y 方向界面上的 $y_{j+\frac{1}{2}}$ 为例, 有

$$U_L = U_{i,j}, U_R = U_{i+1,j}, U_B = U_{i,j}, U_T = U_{i,j+1}。$$

二阶空间精度格式在每个控制体内部做线性重构[8]。对 x 方向界面 $x_{i+\frac{1}{2}}$, 左右两侧状态分别取为

$$U_L = U_{i,j} + \frac{h_x}{2} \sigma_{i,j}^x, U_R = U_{i+1,j} - \frac{h_x}{2} \sigma_{i+1,j}^x,$$

其中, $\sigma_{i,j}^x$ 和 $\sigma_{i+1,j}^x$ 分别表示单元 $C_{i,j}$ 和 $C_{i+1,j}$ 内沿 x 方向的斜率。内部单元采用中心差分计算斜率:

$$\sigma_{i,j}^x = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{x_{i+1} - x_{i-1}}。$$

对 y 方向界面 $y_{j+\frac{1}{2}}$ 同理:

$$U_B = U_{i,j} + \frac{h_y}{2} \sigma_{i,j}^y, U_T = U_{i,j+1} - \frac{h_y}{2} \sigma_{i,j+1}^y, \sigma_{i,j}^y = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}}。$$

对于靠近边界的单元, 由于中心差分模板可能涉及计算区域外的单元, 本文通过 Ghost 单元给定边界外侧的状态量。Ghost 单元的取值由精确边界条件给出, 从而保证边界附近的重构公式与内部单元保持一致。这样既可以统一处理各个方向上的界面通量, 又能避免在边界处降低空间离散格式的精度。

2.4. 时间离散

为了获得二维无粘 Burgers 方程的稳态数值解, 本文引入伪时间项, 将稳态问题转化为随伪时间演化的初值问题, 并通过迭代使离散残差逐步趋向于零, 即可认为获得了稳态解。空间离散后, 半离散方程可写为

$$U_t = N(U)。 \quad (4)$$

伪时间方向上采用一阶向前 Euler 格式, 设 U^n 为第 n 步迭代得到的数值解, 则从第 n 步到第 $n+1$ 步的更新公式为

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t N_h(U^n), \quad (5)$$

其中, $N_h(U^n)$ 表示在细网格尺度 h 上的离散残差算子, Δt 为伪时间步长。全局伪时间步长根据 CFL 稳定性条件确定, 即

$$\Delta t = \frac{CFL \min(h_x, h_y)}{\frac{2}{\sqrt{2}} \max_{i,j} |U_{i,j}|}。$$

3. 非线性多重网格法

多重网格方法是一类有效的迭代加速方法。相比于单层网格迭代, 多重网格方法在不同网格尺寸之间传递误差信息, 通过将低频误差传递给较粗网格, 使其在粗网格上表现为相对高频误差, 并通过粗网格求解加速误差收敛。由于本文所考虑的 Burgers 方程具有非线性, 采用非线性多重网格法(NMG)直接在各层网格上求解双曲方程。

3.1. 非线性多重网格算法

下面分别用下标 h 和 H 表示与细网格和粗网格相关的算子和变量。设某一层细网格上的非线性方程为

$$N_h(U_h) = r_h, \quad (6)$$

$N_h(U_h)$ 是细网格上的非线性离散算子, U_h 为该细网格上的近似解, r_h 是右端项。细网格上的解是通过迭代方法来解决的, 该方法能够在几次迭代中快速抑制近似解的高频误差, 此过程称之为光滑。相应的迭代方法称为光滑器。本文使用的光滑器为 LU-SGS [9] [10]。在细网格经过 v_1 次前光滑后, 定义细网格非线性残差为

$$R_h = r_h - N_h(U_h)。$$

分别将当前细网格上的近似解和残差限制到粗网格上:

$$U_H^0 = I_h^H U_h, R_H = I_h^H R_h,$$

其中, I_h^H 为限制算子, 粗网格尺度满足 $H = 2h$ 。于是粗网格上的问题可以表示为

$$r_H := N_H(U_H^0) + R_H,$$

r_H 是粗网格上的右端项。因此, 粗网格上求解的仍是完整的非线性问题

$$N_H(U_H) = r_H, \quad (7)$$

这种构造保证了粗网格方程与细网格方程之间的一致性。粗网格方程经过 v_c 次光滑求解后, 定义粗网格校正量为 $e_H = U_H - U_H^0$, 将校正量延拓回细网格, 细网格解更新为

$$U_h^{new} = U_h + I_H^h e_H,$$

其中, I_H^h 为延拓算子。随后在细网格上进行 v_2 次后光滑, 以消除延拓操作可能重新引入的高频误差。

3.2. 网格转移算子

相邻两层网格在两个坐标方向上均按比例 2 进行粗化, 有 $H_x = 2h_x$, $H_y = 2h_y$ 。各网格层均采用与最细网格相同形式的有限体积离散形式。在多重网格法中, 网格转移算子负责在不同层级之间传递残差、解或者校正量, 其构造会直接影响粗网格校正的有效性与整体收敛性能。对于双曲型问题, 转移算子的精度通常需要满足如下匹配条件[11] [12]

$$m_p + m_r \geq m_{PDE} + p, \quad (8)$$

其中, m_p 是延拓算子的精度阶, m_r 是残差的限制算子的精度阶, m_{PDE} 是偏微分方程中最高导数的阶, p 是粗网格离散格式的精度阶。该条件清晰地表明了转移算子的选择应具有足够的精度以匹配相应的粗网格离散精度。

本文测试了几种经典的转移算子。粗网格校正返回细网格时, 主要采用注入延拓和双线性延拓两种方式。注入延拓是最简单的延拓方式, 它将一个粗网格单元上的校正量直接赋给其覆盖的四个细网格单元, 即 $(I_H^h e_H)_{2I+p, 2J+q} = e_{I,J}$, $p, q \in \{0, 1\}$ 。相比之下, 二阶双线性延拓算子[13]则根据粗网格单元中心的相对位置进行插值:

$$(I_H^h e_H)_k = \frac{\sum_{m \in S(k)} w_m e_m}{\sum_{m \in S(k)} w_m}。$$

图 1 展示了细网格中心 k 与粗网格中心 A, B, C, D 的相对位置关系, 其中 k 表示任意一个细网格单元, $S(k)$ 是所有与该细网格相关的粗网格单元的集合, e_m 为粗网格单元 m 上的校正值。权重 w_m 公式为

$$w_A = \frac{h_{BC} h_{CD}}{S_{ABCD}}, w_B = \frac{h_{AD} h_{CD}}{S_{ABCD}},$$

$$w_C = \frac{h_{AB}h_{AD}}{S_{ABCD}}, w_D = \frac{h_{BC}h_{AB}}{S_{ABCD}},$$

S_{ABCD} 为矩形 $ABCD$ 的面积。图 1 展现了 k 处于内部点时的情形, 更详细的边界处理可参考[13]。

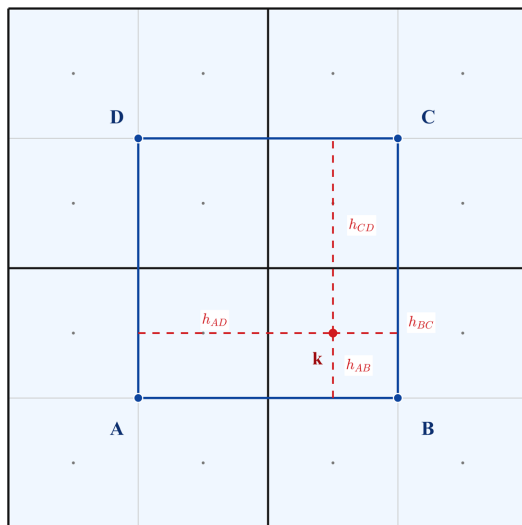


Figure 1. Relative positions of fine-grid and coarse-grid cell centers in the bilinear prolongation operator
图 1. 双线性延拓算子细网格中心与粗网格中心的相对位置关系

对于将细网格上的解和残差限制到粗网格的过程, 本文测试对解和残差分别使用不同的限制算子。由于离散未知量 $U_{i,j}$ 表示控制体上的单元平均值, 解的限制算子应保持守恒性, 所以将会一直使用加权平均限制。一个粗网格控制体覆盖四个细网格控制体, 其限制公式为

$$(I_h^H U_h)_{I,J} = \frac{1}{4} \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 U_{2I+p, 2J+q}, p, q \in \{0, 1\}.$$

该方法实现简单, 能够平稳地将细网格信息传递到粗网格。

对于残差的限制算子, 除了加权平均限制外, 残差的限制算子一般是延拓算子的伴随[3]。然而, 对于双线性延拓而言, 加权平均限制与延拓算子并不严格满足伴随关系。于是对残差的限制算子使用双线性延拓的伴随限制。同时我们还测试了 Neumann 边界处理的双线性限制[11] [14], 以此来强调合适的限制延拓组合的重要性。

3.3. 伴随性质与 Neumann 边界处理的理论分析

设 $P = I_h^h$ 为粗网格到细网格的延拓算子, 若残差限制算子 $R = I_h^H$ 满足

$$\langle Pe_H, r_h \rangle_h = \langle e_H, Rr_h \rangle_H,$$

则称 R 与 P 在离散内积意义下互为伴随。其中, e_H 表示粗网格校正量, r_h 表示细网格残差。对均匀二倍粗化的二维网格, 双线性延拓的伴随限制可写为 $R = (1/4)P^T$ 。非线性多重网格法粗网格校正的目标是让粗网格方程接收细网格上尚未被光滑器消除的低频残差信息, 并将粗网格求得的校正量有效返回细网格。若限制和延拓不满足伴随关系, 则粗网格上被修正的残差分量与延拓回细网格的校正方向可能不一致, 导致粗网格校正不能有效降低误差。

在多重网格法中, 转移算子不仅需要在区域内保持较好的插值精度, 还需要在边界附近给出合理

的处理方式。对于双线性转移算子而言, 内部单元通常可以利用周围多个网格单元的信息构造插值权重; 但在靠近计算边界的位置, 标准插值模板会涉及计算区域外的 Ghost 单元, 因此必须引入额外的边界处理方式。Neumann 边界处理的双线性限制算子的出发点是边界附近缺少完整插值模板时, 利用边界法向导数条件补足或者修正边界附近的限制权重。Neumann 边界处理通常对应于零法向导数条件, 可近似满足

$$\frac{\partial e}{\partial n} = 0,$$

其中, e 表示粗网格校正量或者细网格误差信息, n 表示边界外法向方向。说明边界外侧的 Ghost 单元可以通过边界内侧的值进行镜像或外推。对于本文所考虑的二维无粘 Burgers 方程, 边界条件由精确解给出, 本质上属于 Dirichlet 型边界条件, 边界附近的数值误差和粗网格校正量并不一定满足零法向导数假设。如果采用 Neumann 型边界条件来处理转移算子边界处的模板, 就可能使限制后的粗网格残差信息与原问题的 Dirichlet 边界约束不一致, 限制效果受边界条件类型和误差分布影响较大。因此相比之下, 具有伴随结构的限制、延拓算子组合更能保持粗网格校正的一致性和稳定性。

4. 数值实验

本节数值实验考察了一阶、二阶空间离散格式下不同网格转移算子的收敛性能。网格规模依次取 $N_x = N_y = 64, 128, 256, 512$ 和 1024 。前后光滑数均取 $\nu_1 = \nu_2 = 2$, 最粗网格光滑次数取 $\nu_c = 4$, CFL 数取 5, 当相对残差下降至 10^{-8} 时认为收敛。实验主要比较非线性多重网格方法中不同限制算子与延拓算子的组合效果。实验中延拓算子采用注入延拓(inj), 双线性延拓(bil), 限制算子采用加权平均限制(avg), 双线性延拓的伴随限制(bila), Neumann 边界处理的双线性限制(neu)。通过不同组合的对比, 可以观察高阶网格转移算子是否能够在相同空间离散格式下进一步改善多重网格的计算效率。

4.1. 一阶空间精度

首先考察不同的转移算子在一阶空间精度下的表现。表 1 展示了一阶格式下不同限制延拓算子在不同网格尺寸下的计算效率比较。由表中结果可以看出, 相较于单层 LU-SGS 方法, 非线性多重网格方法能够显著降低迭代步数, 说明粗网格校正具有明显的低频误差消除能力。随着网格逐渐加密, bila + bil 相较 avg + inj 的迭代步数的改善效果并不稳定。这说明在一阶空间精度下, 高阶转移算子可以带来一定的加速效果, 但是这种改善并没有随着网格加密而持续增强。其原因在于, 一阶格式下低阶转移算子已经满足(8)的要求, 粗网格校正过程中由转移算子引入的误差尚未成为主导误差来源。

Table 1. Comparison of convergence performance for different grid-transfer operator combinations under first-order spatial accuracy

表 1. 一阶空间精度下不同网格转移算子组合的收敛性能比较

$N_x \times N_y$	迭代步数			下降率
	单层 LU-SGS	NMG (avg + inj)	NMG (bila + bil)	
64×64	534	42	41	2.4%
128×128	1166	35	62	-77.1%
256×256	2151	82	68	17.1%
512×512	4689	140	109	22.1%
1024×1024	7613	218	191	12.4%

图 2 进一步展示了不同网格尺寸下各转移算子组合的迭代步数和计算时间变化趋势。可以看到, 不同转移算子组合之间的差距总体较小。一阶格式本身的数值耗散较强, 低阶转移算子已经能够传递主要的低频误差信息, 高阶转移算子虽然可以改善粗网格校正的光滑性, 但其收益会被一阶离散误差和数值耗散部分掩盖, 因此不同转移算子组合的差距并没有很明显。

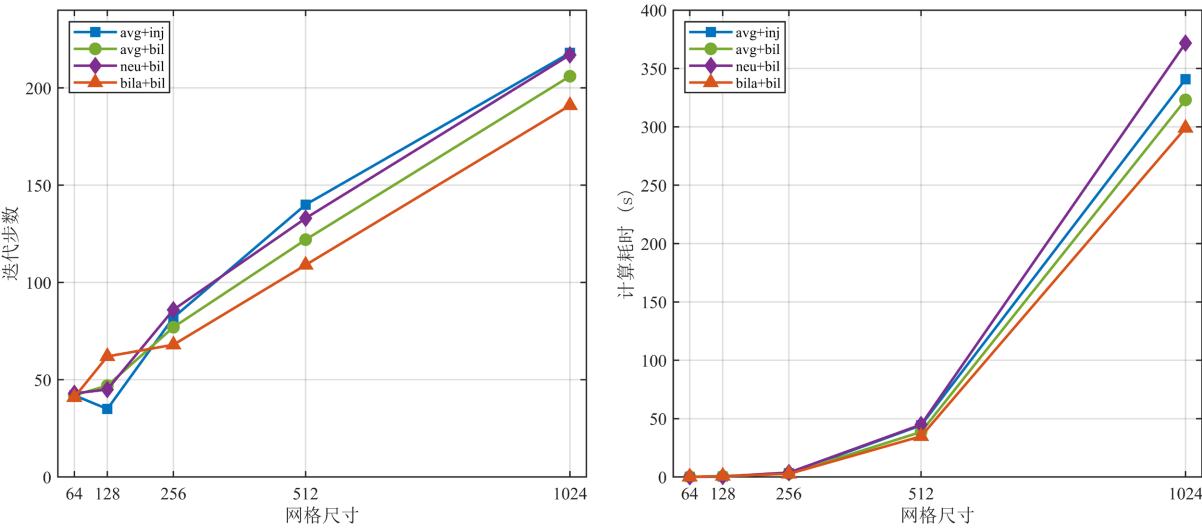


Figure 2. Comparison of iteration counts and computational time with grid size for different grid-transfer operator combinations under first-order spatial accuracy
图 2. 一阶空间精度下不同网格转移算子组合的迭代步数、计算时间随网格尺寸的变化比较

4.2. 二阶空间精度

为进一步考察转移算子精度与离散格式精度之间的关系, 下面将空间离散格式提高到二阶, 并在相同的多重网格框架下比较不同限制、延拓算子组合的收敛表现。表 2 给出了不同网格尺寸下各方法达到相同收敛标准所需的迭代步数。可以看到在二阶格式下, 多重网格法依然有着很好的计算效率。同时在 1024×1024 网格下, 双线性限制延拓的组合能比低阶转移算子的迭代步数下降率近 38.8%。这表明在二阶空间精度条件下, 合适的限制、延拓算子组合能够有效地改善多重网格的收敛性能, 其加速效果明显强于一阶空间离散情形。

Table 2. Comparison of convergence performance for different grid-transfer operator combinations under second-order spatial accuracy
表 2. 二阶空间精度下不同网格转移算子组合的收敛性能比较

$N_x \times N_y$	迭代步数			下降率
	单层 LU-SGS	NMG (avg + inj)	NMG (bila + bil)	
64×64	285	37	28	24.3%
128×128	485	58	45	22.4%
256×256	840	111	74	33.3%
512×512	1460	209	130	37.8%
1024×1024	2555	392	240	38.8%

图 3 进一步展示了不同网格转移算子组合在迭代步数和计算时间方面的变化趋势。随着网格尺寸的增大, 低阶转移算子和高阶转移算子之间的差异逐渐扩大。其中, 双线性限制延拓算子的组合始终具有较少的迭代步数和较低的计算时间, 说明该组合能够更准确地完成粗细网格之间的信息传递, 从而提高粗网格校正的有效性, 更加直观地展现了高阶转移算子的优势。同时还可以看到, 不同高阶算子组合之间的表现并不完全一致, 仅提高算子精度并不一定能够获得最佳效果, Neumann 边界处理的限制与双线性延拓之间的结构不匹配, 所以此时甚至会削弱多重网格校正的效果。

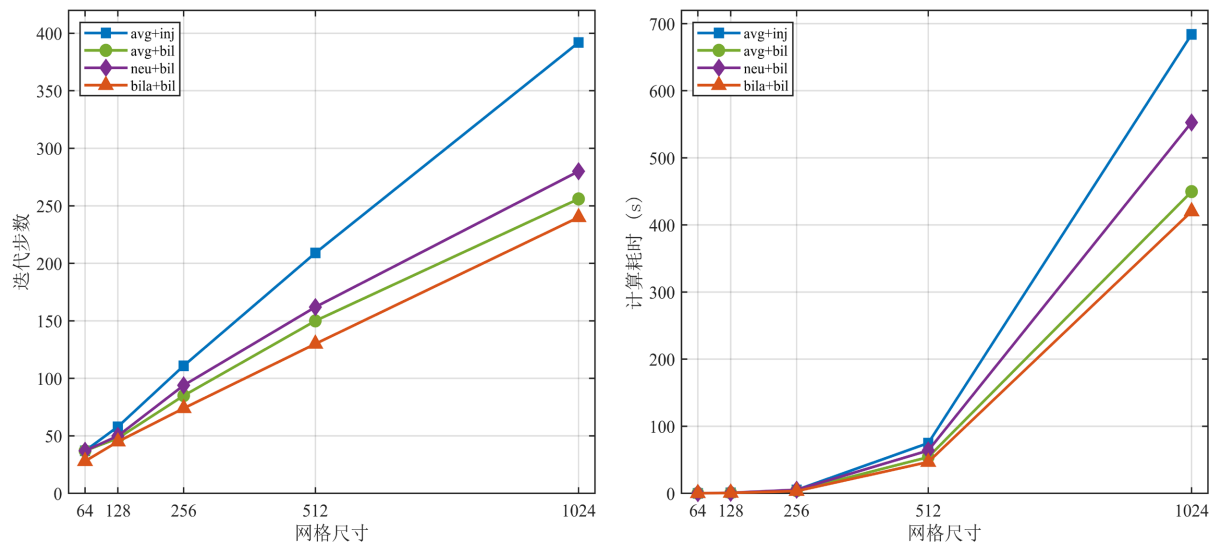


Figure 3. Comparison of iteration counts and computational time with grid size for different grid-transfer operator combinations under second-order spatial accuracy

图 3. 二阶空间精度下不同网格转移算子组合的迭代步数、计算时间随网格尺寸的变化比较

表 3 中展示了不同算子组合的精度阶及其对匹配条件(8)的满足情况。本文 Burgers 方程的最高阶 $m_{PDE} = 1$ 。对于一阶空间离散, (8)要求 $m_R + m_p \geq 2$ 。avg + inj 的算子组合达到一阶格式所需的匹配要求。同时由于一阶离散本身具有较强的数值耗散, 转移算子通常不是限制整体收敛效率的主要因素, 因而不同组合之间的性能差异相对有限。而对于二阶空间离散, (8)要求 $m_R + m_p \geq 3$, 粗网格校正对转移算子的精度和结构匹配更敏感。此时 avg + inj 的总阶数刚好达到最低精度边界, 缺少进一步的精度余量, 导致粗网格校正效率下滑; 而 bila + bil 组合既具有较高的插值精度, 又保持残差限制与校正量延拓之间的伴随关系, 因此在二阶格式下表现出更明显的加速效果。

Table 3. Accuracy-order matching of different grid-transfer operator combinations

表 3. 不同网格转移算子组合的精度阶匹配情况

转移组合	m_R	m_p	$p=1$	$p=2$
avg + inj	2	1	满足	达到临界
avg + bil	2	2	满足	满足
bila + bil	2	2	满足	满足
neu + bil	2	2	满足	满足

5. 含激波的二维扩展 Riemann 问题

对于 Burgers 方程这类非线性双曲守恒方程而言, 数值解中会出现激波等间断结构。本节构造一维 Riemann 问题在二维区域上的扩展算例, 进一步比较在二阶空间精度下不同网格转移算子在光滑区和激波区的收敛历史及最终解质量。

本节采用前文相同的数值通量和离散方法, 考虑如下无源项的二维 Burgers 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0, \quad f(u) = g(u) = \frac{u^2}{2\sqrt{2}}, \quad (9)$$

计算区域为 $(x, y) = [0, \pi/\sqrt{2}] \times [0, \pi/\sqrt{2}]$, 采用 512×512 均匀网格。为抑制二阶重构在间断附近出现的非物理振荡, 斜率采用 minmod 限制器。其余计算参数设置与前文保持一致。将一维 Riemann 初值沿 y 方向作常值延拓, 左右状态分别取 $u_L = 1$, $u_R = -1$, 并将间断置于区域中点 $x_s = L/2 = \pi/(2\sqrt{2})$ 。由 RH 条件[1]可得激波传播速度

$$s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = 0。$$

因此该问题的激波保持在 $x = x_s$ 处, 对应的稳态解为

$$u^*(x, y) = \begin{cases} 1, & x < x_s \\ -1, & x > x_s \end{cases}。$$

边界条件取为 $u(0, y) = 1$, $u(L, y) = -1$, 以及

$$u(x, 0) = u(x, L) = \begin{cases} 1, & x < x_s \\ -1, & x > x_s \end{cases},$$

使边界值与二维扩展的 Riemann 解保持一致。初值采用具有有限过渡宽度的初始场

$$u_0(x, y) = -\tanh\left(\frac{x - x_s}{\varepsilon_0}\right), \quad \varepsilon_0 = 8h,$$

其中, $h = L/512 = \pi/(512\sqrt{2})$ 。为了区分光滑区误差和间断区误差, 将激波附近区域定义为

$$\Omega_s = \{(x, y) \in \Omega : |x - x_s| \leq 4h\},$$

其余部分记为光滑区 $\Omega_r = \Omega \setminus \Omega_s$ 。光滑区和激波区的残差均采用离散 L_2 范数统计, 并以初始全局 L_2 残差归一化得到相对残差。

5.1. 光滑区与激波区的收敛历史

图 4 给出了不同转移算子组合在光滑区的相对残差收敛历史。可以看出, 与 avg + inj 组合相比, 高阶算子组合在多数迭代阶段具有较低的光滑区残差, 并较早达到收敛状态。这是因为双线性算子能够将粗网格校正量更平滑地分配到细网格, 从而提高光滑误差分量在粗细网格之间的传递效率。高阶转移算子在远离间断的区域保持了良好的粗网格校正效果。

图 5 展示了不同转移算子组合在激波区的相对残差收敛过程。与图 4 相比, 激波区残差的幅值明显更大, 且衰减过程持续更长, 说明全局收敛后期主要受到间断附近误差的控制。其余三种高阶算子组合在跨越间断时保持了稳定连续的残差下降过程, 未出现残差发散或持续振荡。高阶转移算子虽然在间断主导区域的加速作用受到限制, 但并未因较宽的插值模板而损害多重网格迭代的稳定性, 这反映了高阶算子在激波附近保持较好的稳定性和鲁棒性。

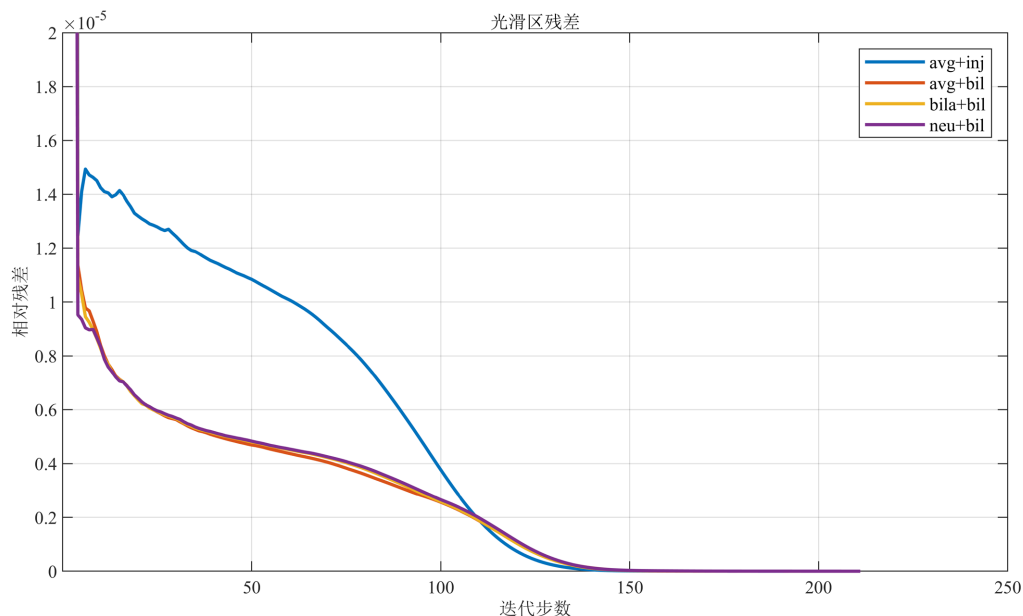


Figure 4. Relative residual convergence histories in the smooth region for different grid-transfer operator combinations
图 4. 不同网格转移算子组合的光滑区相对残差收敛历史

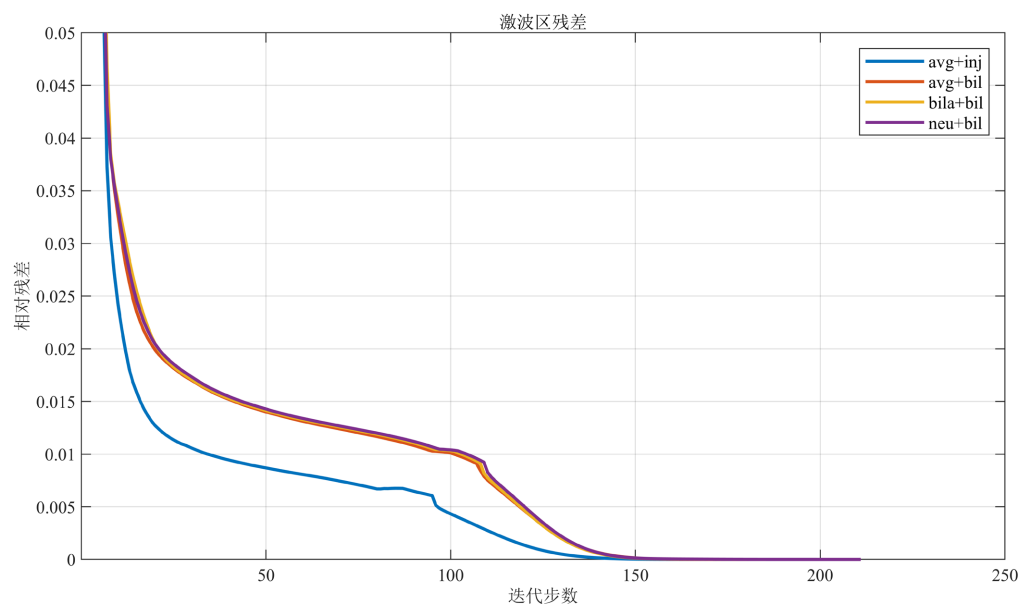


Figure 5. Relative residual convergence histories in the shock region for different grid-transfer operator combinations
图 5. 不同网格转移算子组合的激波区相对残差收敛历史

5.2. 解的质量

图 6 比较了不同转移算子组合在区域中心线 $y = L/2$ 处的最终数值解。可以看出四条数值曲线与位于 $x = x_s = \pi/(2\sqrt{2})$ 的精确解几乎完全重合。数值结果能够正确地捕捉激波的位置。采用双线性延拓的高阶算子组合没有因较宽的插值模板而降低最终解的质量, 未在激波附近引入剧烈的非物理振荡。因此, 高阶网格转移算子既能改善光滑区粗网格校正质量的同时, 又能保持含激波问题中的最终数值解的稳定性和激波捕捉能力。

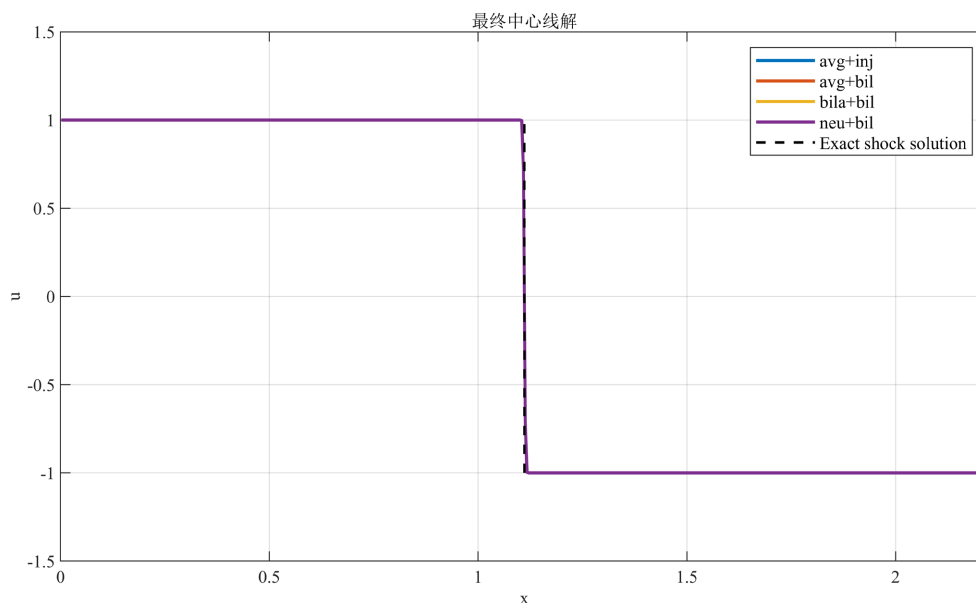


Figure 6. Final centerline solutions obtained with different grid-transfer operator combinations
图 6. 不同网格转移算子组合得到的最终中心线解

6. 总结

本文针对二维无粘 Burgers 方程的稳态求解, 比较了非线性多重网格法中不同转移算子组合的计算效率。数值结果表明, 相比于单层 LU-SGS 方法, 非线性多重网格法能够明显减少迭代步数和计算时间, 说明粗网格校正可以有效加速低频误差衰减。在二阶空间离散精度下, 合适的限制、延拓算子组合能够更加准确地传递粗细网格之间的信息, 使迭代步数最多减少约 30%~40%, 且随着网格尺寸增大, 优势更加明显。含激波算例中, 高阶转移算子在加快光滑区收敛的同时, 未引入明显的非物理振荡, 能够保持间断附近的稳定性和数值解质量。后续工作可进一步考察非均匀网格以及更高阶重构方法下转移算子的鲁棒性。

参考文献

- [1] LeVeque, R.J. (2002) Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511791253>
- [2] Hackbusch, W. (1985) Multi-Grid Methods and Applications. Springer.
- [3] Wesseling, P. (1995) Introduction to Multigrid Methods. Institute for Computer Applications in Science and Engineering.
- [4] Zanatta, D.C., Araki, L.K., Villela Pinto, M.A. and Moro, D.F. (2020) Performance of Geometric Multigrid Method Fortwo-Dimensional Burgers' Equations with Non-Orthogonal, Structured Curvilinear Grids. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **125**, 1061-1081. <https://doi.org/10.32604/cmescs.2020.012634>
- [5] Bai, H.R. and Wei, Y.L. (2023) Multigrid Method for Time Fractional Burgers Equation Based on Fifth-Order WENO Scheme. *Advances in Applied Mathematics*, **12**, 873-878. <https://doi.org/10.12677/aam.2023.123089>
- [6] Rusanov, V.V. and Vasil'evich, V. (1962) The Calculation of the Interaction of Non-Stationary Shock Waves and Obstacles. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **1**, 304-320. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(62\)90062-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(62)90062-9)
- [7] 林建芳. 定常问题的高阶残差分布数值方法研究[D]: [博士学位论文]. 厦门: 厦门大学, 2020.
- [8] Hu, Z.C. and Li, G.H. (2023) An Efficient Nonlinear Multigrid Solver for the Simulation of Rarefied Gas Cavity Flow. *Communications in Computational Physics*, **34**, 357-391. <https://doi.org/10.4208/cicp.oa-2022-0271>
- [9] Yoon, S. and Jameson, A. (1988) Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations. *AIAA Journal*, **26**, 1025-1026. <https://doi.org/10.2514/3.10007>

-
- [10] Dwight, R.P. (2006) Time-Accurate Navier-Stokes Calculations with Approximately Factored Implicit Schemes. In: Groth, C. and Zingg, D.W., Eds., *Computational Fluid Dynamics 2004*, Springer, 211-217. https://doi.org/10.1007/3-540-31801-1_27
- [11] Mohr, M. and Wienands, R. (2004) Cell-Centred Multigrid Revisited. *Computing and Visualization in Science*, **7**, 129-140. <https://doi.org/10.1007/s00791-004-0137-0>
- [12] Hemker, P.W. (1990) On the Order of Prolongations and Restrictions in Multigrid Procedures. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **32**, 423-429. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(90\)90047-4](https://doi.org/10.1016/0377-0427(90)90047-4)
- [13] Zhu, Y., Zhong, C. and Xu, K. (2017) Unified Gas-Kinetic Scheme with Multigrid Convergence for Rarefied Flow Study. *Physics of Fluids*, **29**, Article 096102. <https://doi.org/10.1063/1.4994020>
- [14] Kifonidis, K. and Müller, E. (2012) On Multigrid Solution of the Implicit Equations of Hydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, **544**, A47. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116979>