

# 基于图的Euler-Sombor指标的一些界

张伟鹏, 刘赛华\*

五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门

收稿日期: 2026年7月18日; 录用日期: 2026年8月11日; 发布日期: 2026年8月21日

## 摘 要

设  $G$  为一个简单图,  $V(G)$  表示图  $G$  的顶点集,  $E(G)$  表示图  $G$  的边集,  $d_v$  表示顶点  $v$  在图  $G$  中的度数。近年来, Euler-Sombor 指标作为一种新型的基于顶点度的拓扑指标被提出, 其被定义为  $Eu(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u d_v}$ 。本文研究了 Euler-Sombor 指标关于图的度序列和边的界, 并给出了该指标关于第一 Zagreb 指标  $M_1(G)$  的上界与下界。

## 关键词

顶点度, Euler-Sombor 指标, 第一 Zagreb 指标

# Some Bounds on the Euler-Sombor Index of Graphs

Weipeng Zhang, Saihua Liu\*

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: July 18, 2026; accepted: August 11, 2026; published: August 21, 2026

## Abstract

Let  $G$  be a simple graph, with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . For each vertex  $v$ , let  $d_v$  denote its degree in  $G$ . Recently, the Euler-Sombor index has been proposed as a novel vertex degree-based topological index, defined as  $Eu(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u d_v}$ . In this paper, we investigate bounds on the Euler-Sombor with respect to the degree sequence and the edges of a graph, and

\*通讯作者。

establish upper and lower bound relating this index to the first Zagreb index  $M_1(G)$ .

## Keywords

Vertex Degree, Euler-Sombor Index, The First Zagreb Index

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自拓扑指标诞生以来, 基于度的拓扑指标一直是化学图论领域研究中的重要工具, 并在各种化学问题的解决中持续发挥作用。如今, 已提出的基于度拓扑指标的数量已达数十种乃至上百种[1]。目前, 有关基于度拓扑指标的数学性质及其化学应用的研究依然十分活跃, 相关研究进展可参见文献[2]-[7]。这些拓扑指标之所以受到广泛研究, 其原因在于形式简单、计算便捷, 且在预测分子物理化学性质方面效果显著。从数学角度来看, 基于度的拓扑指标正被作为图的分支度及不规则性的度量加以研究[8]。在分子拓扑指标被使用的数十年间, 许多重要的基于度的拓扑指标相继被提出。在此, 仅提及那些将在后文中用到的指标。第一 Zagreb 指标[9]是最古老的基于度的拓扑指标之一。它于 1972 年被提出, 定义为:

$$M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} d_v^2 = \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v). \quad (1)$$

2024 年, Gutman [10]提出了一种新的分子拓扑指标, 称为图的 Euler-Sombor 指标, 该指标被定义为:

$$Eu(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u d_v}. \quad (2)$$

其中,  $d_u$  与  $d_v$  分别为图中顶点  $u$  与顶点  $v$  的度。

本文中, 我们主要研究 Euler-Sombor 指标关于图的度序列和边数的界, 及其关于第一 Zagreb 指标的界。

## 2. 基于度序列和边数的界

定理 2.1: 设图  $G$  为一个具有  $m$  条边, 度序列为  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 最大度为  $\Delta$ , 最小度为  $\delta$  的连通图, 其中  $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$ 。令  $p$  为度为  $\delta$  的顶点数,  $q$  为由这  $p$  个顶点导出的子图的边数, 则有:

$$\sqrt{3}q\delta + (p\delta - 2q)\sqrt{\delta^2 + d_{n-p}^2 + \delta \cdot d_{n-p}} + \sqrt{3}(m - p\delta + q)d_{n-p} \leq Eu(G),$$

以及

$$Eu(G) \leq \sqrt{3}q\delta + (p\delta - 2q)\sqrt{\delta^2 + \Delta^2 + \delta\Delta} + \sqrt{3}(m - p\delta + q)\Delta.$$

证明: 设  $H$  为由这  $p$  个度为  $\delta$  的顶点导出的子图。对于  $G$  中的任意边  $uv$ :  
若  $uv \in E(H)$ , 则

$$\sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u d_v} = \sqrt{3}\delta; \quad (3)$$

若  $uv \in E(G) - E(H)$ , 则

$$\sqrt{3}d_{n-p} \leq \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u d_v} \leq \sqrt{3}\Delta; \quad (4)$$

若  $u \in V(H), v \in V(G) - V(H)$  或  $v \in V(H), u \in V(G) - V(H)$ , 则

$$\sqrt{\delta^2 + d_{n-p}^2 + \delta \cdot d_{n-p}} \leq \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u d_v} \leq \sqrt{\delta^2 + \Delta^2 + \delta\Delta}. \quad (5)$$

由于  $|E(H)| = q$ , 可知从  $H$  到  $G - V(H)$  的边数为  $p\delta - 2q$ , 且  $|E(G - V(H))| = m - p\delta + q$ 。显然有

$$Eu(G) \leq \sqrt{3}q\delta + (p\delta - 2q)\sqrt{\delta^2 + \Delta^2 + \delta\Delta} + \sqrt{3}(m - p\delta + q)\Delta, \quad (6)$$

以及

$$Eu(G) \geq \sqrt{3}q\delta + (p\delta - 2q)\sqrt{\delta^2 + d_{n-p}^2 + \delta \cdot d_{n-p}} + \sqrt{3}(m - p\delta + q)d_{n-p}. \quad (7)$$

对于定理 2.1 中的上界与下界, 在图  $G$  为非正则图时也可以取到等号, 如例 2.2 所示。

例 2.2: 对于路图  $P_n$ , 当  $n \geq 3$  时, 有

$$Eu(P_n) = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}(n-3).$$

例 2.2 给出了定理 2.1 中当  $G$  为非正则图时, 上界与下界取到等号的一个条件。此外, 定理 2.1 还可以推广如下:

推论 2.3: 若图  $G$  的每一个顶点, 或者拥有最大度  $\Delta$ , 或者拥有最小度  $\delta$ , 则有:

$$Eu(G) = \sqrt{3}q\delta + (p\delta - 2q)\sqrt{\delta^2 + \Delta^2 + \delta \cdot \Delta} + \sqrt{3}(m - p\delta + q)\Delta,$$

其中,  $p$  为度为  $\delta$  的顶点数,  $q$  为由这  $p$  个顶点导出的子图的边数。

对于星图、轮图和完全二部图这三类典型图类, 由于这三类图全部满足推论 2.3 中“或者拥有最大度  $\Delta$ , 或者拥有最小度  $\delta$ ”的图类, 因此, 定理 2.1 在星图、轮图以及完全二部图上同时达到上界与下界的精确值, 此时上界与下界的紧致性达到最优。

### 3. 基于第一 Zagreb 指标的界

#### 3.1. 界的计算

我们首先给出如下函数的性质。

引理 3.1: 当  $x \in (0, 1]$  时, 有

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x) - \frac{(1-x)^2}{4[1+(2\sqrt{3}-1)x]} \leq 0$$

恒成立。

证明: 通过移项, 原式等价于

$$\sqrt{1+x+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x) \leq \frac{(1-x)^2}{4[1+(2\sqrt{3}-1)x]}. \quad (8)$$

由于

$$\left[ \sqrt{1+x+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x) \right] \cdot \left[ \sqrt{1+x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x) \right] = \frac{(x-1)^2}{4}. \quad (9)$$

于是, (8)式等价于

$$\frac{(x-1)^2}{4\left[\sqrt{1+x+x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)\right]} \leq \frac{(1-x)^2}{4\left[1+(2\sqrt{3}-1)x\right]}. \quad (10)$$

因此, (8)式等价于

$$\sqrt{1+x+x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x) \geq (2\sqrt{3}-1)x+1. \quad (11)$$

此时, 令

$$g(x) = \sqrt{1+x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x) - (2\sqrt{3}-1)x - 1. \quad (12)$$

有

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (2\sqrt{3}-1). \quad (13)$$

进而可以得到

$$g''(x) = \frac{3}{4(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0. \quad (14)$$

于是有  $g'(x)$  在  $(0,1]$  上单调递增。由于  $g'(1) = 1 - \sqrt{3} < 0$ , 则  $g(x)$  在  $(0,1]$  上单调递减。又由于  $g(1) = 0$ , 于是有  $g(x) \geq 0$  在  $(0,1]$  上恒成立。故  $f(x) \leq 0$  在  $(0,1]$  上恒成立。

基于引理 3.1, 我们可以得到 Euler-Sombor 指标的界。

定理 3.2: 令  $G$  为一个具有  $m$  条边, 最大度为  $\Delta$ , 最小度为  $\delta$  的连通图, 则有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}M_1(G) \leq Eu(G) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}M_1(G) + \frac{m(\Delta-\delta)^2}{4[\Delta+(2\sqrt{3}-1)\delta]}.$$

上界与下界在  $G$  取正则图时等号成立。

证明: 由于

$$d_u^2 + d_v^2 + d_u \cdot d_v = \frac{3}{4}(d_u + d_v)^2 + \frac{1}{4}(d_u - d_v)^2 \geq \frac{3}{4}(d_u + d_v)^2, \quad (15)$$

则有

$$\sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u \cdot d_v} \geq \sqrt{\frac{3}{4}(d_u + d_v)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(d_u + d_v). \quad (16)$$

于是

$$Eu(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u \cdot d_v} \geq \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{3}}{2}(d_u + d_v) = \frac{\sqrt{3}}{2}M_1(G). \quad (17)$$

在  $r$ -正则图中, 显然有

$$Eu(G) = \sqrt{3}mr = \frac{\sqrt{3}}{2}M_1(G). \quad (18)$$

定义

$$f(d_u, d_v) = \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u \cdot d_v} - \frac{\sqrt{3}}{2}(d_u + d_v). \quad (19)$$

设  $d_u \geq d_v$ , 并令  $x = d_u, y = d_v$ , 则有  $\delta \leq y \leq x \leq \Delta$ , 且得到

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + xy} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y). \quad (20)$$

令  $r = y/x$ , 则有  $r \in (0, 1]$ , 并得到

$$f(x, y) = x \left[ \sqrt{1 + r + r^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + r) \right] = xg(r). \quad (21)$$

以及

$$\frac{(x - y)^2}{4[x + (2\sqrt{3} - 1)y]} = x \frac{(1 - r)^2}{4[1 + (2\sqrt{3} - 1)r]}. \quad (22)$$

由引理 3.1, 可以得到当  $\delta \leq y \leq x \leq \Delta$  时, 有

$$f(x, y) \leq \frac{(x - y)^2}{4[x + (2\sqrt{3} - 1)y]}. \quad (23)$$

特别地, 当  $y = \delta, x = \Delta$  时, 有

$$f(\Delta, \delta) \leq \frac{(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]}. \quad (24)$$

对于  $g(r)$ , 由于

$$g'(r) = \frac{1 + 2r}{2\sqrt{1 + r + r^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0. \quad (25)$$

其中,  $r \in (0, 1]$ , 于是可以得到  $g(r)$  在  $(0, 1]$  上单调递减. 又由于  $f(x, y) = xg(r)$ , 则成立

$$f(x, y) \leq f(\Delta, \delta) \leq \frac{(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]}. \quad (26)$$

于是有

$$f(d_u, d_v) = \sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u \cdot d_v} - \frac{\sqrt{3}}{2}(d_u + d_v) \leq \frac{(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]}. \quad (27)$$

即

$$\sqrt{d_u^2 + d_v^2 + d_u \cdot d_v} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(d_u + d_v) + \frac{(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]}. \quad (28)$$

对所有边求和, 有

$$Eu(G) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}M_1(G) + \frac{m(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]}. \quad (29)$$

由于在正则图中, 有  $\Delta = \delta$ , 于是有

$$\frac{m(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]} = 0. \quad (30)$$

因此, 当  $G$  为正则图时, 等号成立。

### 3.2. 界的紧致性评估

定理 3.2 给出了适用于任意连通图的统一上下界。为客观评估该界的紧致性, 本节选取三类具有显著结构差异的重要图类——星图、轮图和完全二部图, 分别计算其 Euler-Sombor 指标的精确值, 并与定理 3.2 给出的界进行比较。此外, 本节还将定理 3.2 所给的界与已有的 Euler-Sombor 指标的界进行对比。

#### 3.2.1. 星图

星图  $S_n$  ( $n \geq 2$ ) 由一个中心顶点和  $n-1$  个叶子顶点构成, 其参数为边数  $m = n-1$ , 最大度  $\Delta = n-1$ , 最小度  $\delta = 1$ 。星图中所有边均为中心顶点与叶子顶点之间所连接的边, 最小度顶点为所有叶子顶点, 数量为  $n-1$ 。非最小度顶点为中心顶点, 其度数为最大度  $\Delta = n-1$ 。因此, 可以得到

$$Eu(S_n) = (n-1)\sqrt{(n-1)^2 + 1 + (n-1)} = (n-1)\sqrt{n^2 - n + 1}. \quad (31)$$

由定理 3.2, 此时的下界  $A_1$  与上界  $B_1$  分别为

$$A_1(S_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(S_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} (n-1)[(n-1) + 1] = \frac{\sqrt{3}}{2} n(n-1), \quad (32)$$

$$B_1(S_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(S_n) + \frac{m(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]} = \frac{\sqrt{3}}{2} n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)^2}{4(n+2\sqrt{3}-2)}. \quad (33)$$

将精确值分别与上下界作比, 并约去公因子, 得到

$$f_1(n) = \frac{Eu(S_n)}{A_1(S_n)} = \frac{2\sqrt{n^2 - n + 1}}{\sqrt{3}n}, \quad (34)$$

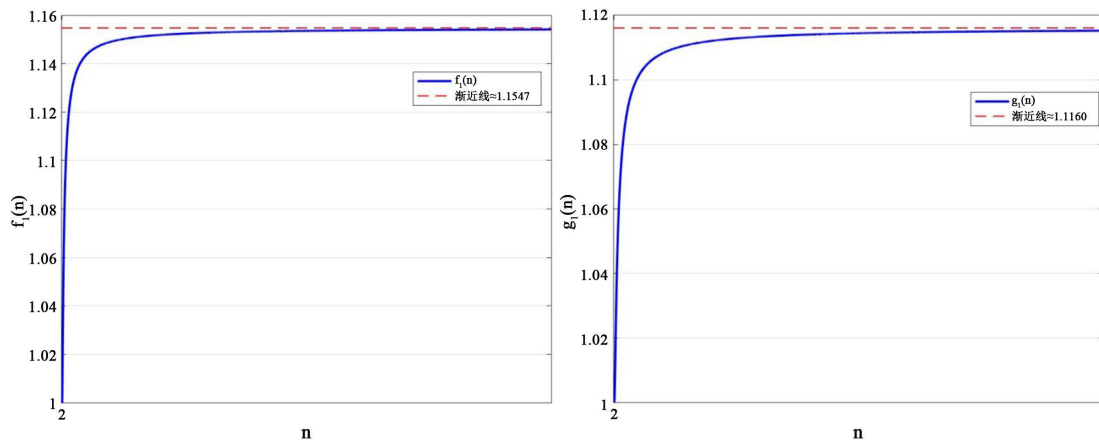
$$g_1(n) = \frac{B_1(S_n)}{Eu(S_n)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}n + \frac{(n-2)^2}{4(n+2\sqrt{3}-2)}}{\sqrt{n^2 - n + 1}}. \quad (35)$$

当  $n \rightarrow +\infty$  时, 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n^2 - n + 1}}{\sqrt{3}n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547, \quad (36)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_1(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}n + \frac{(n-2)^2}{4(n+2\sqrt{3}-2)}}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \approx 1.1160. \quad (37)$$

其中,  $f_1(n)$  与  $g_1(n)$  的函数图像如图 1 所示。



**Figure 1.** The graph of the function  $f_1(n)$  (left) and the graph of the function  $g_1(n)$  (right)

**图 1.** 函数  $f_1(n)$  的图像(左)与函数  $g_1(n)$  的图像(右)

由图像可知,  $f_1(n)$  与  $g_1(n)$  均在  $n \geq 2$  时单调递增, 且渐近线分别约为 1.1547 与 1.1160。于是得到该上界与下界对精确值的偏离程度约为 15.47% 与 11.6%。因此, 定理 3.2 的界在星图上具有稳定的良好紧致性。

### 3.2.2. 轮图

轮图  $W_n$  ( $n \geq 4$ ) 由一个中心顶点连接  $n-1$  个圈上顶点构成, 其边数  $m = 2(n-1)$ , 最大度  $\Delta = n-1$ , 最小度  $\delta = 3$ 。最小度顶点为圈上顶点, 数量为  $n-1$ 。中心顶点度数为最大度  $\Delta = n-1$ 。因此可得

$$Eu(S_n) = (n-1) \left[ \sqrt{(n-1)^2 + 3^2} + 3(n-1) + \sqrt{3^2 + 3^2 + 9} \right] = (n-1) \left[ \sqrt{n^2 + n + 7} + \sqrt{27} \right]. \quad (38)$$

由定理 3.2, 此时的下界  $A_2$  与上界  $B_2$  分别为

$$A_2(W_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(W_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} (n-1) [(n+2) + 6] = \frac{\sqrt{3}}{2} (n-1)(n+8), \quad (39)$$

$$B_2(W_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(W_n) + \frac{m(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]} = \frac{\sqrt{3}}{2} (n-1)(n+8) + \frac{(n-1)(n-4)^2}{2(n+6\sqrt{3}-4)}. \quad (40)$$

将精确值分别与上下界作比, 并约去公因子, 得到

$$f_2(n) = \frac{Eu(W_n)}{A_2(W_n)} = \frac{2(\sqrt{n^2 + n + 7} + \sqrt{27})}{\sqrt{3}(n+8)}, \quad (41)$$

$$g_2(n) = \frac{B_2(W_n)}{Eu(W_n)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(n+8) + \frac{(n-4)^2}{2(n+6\sqrt{3}-4)}}{\sqrt{n^2 + n + 7} + \sqrt{27}}. \quad (42)$$

当  $n \rightarrow +\infty$  时, 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{n^2 + n + 7} + \sqrt{27})}{\sqrt{3}(n+8)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547, \quad (43)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_2(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(n+8) + \frac{(n-4)^2}{2(n+6\sqrt{3}-4)}}{\sqrt{n^2+n+7} + \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \approx 1.3660. \quad (44)$$

其中,  $f_2(n)$  与  $g_2(n)$  的函数图像如图 2 所示。

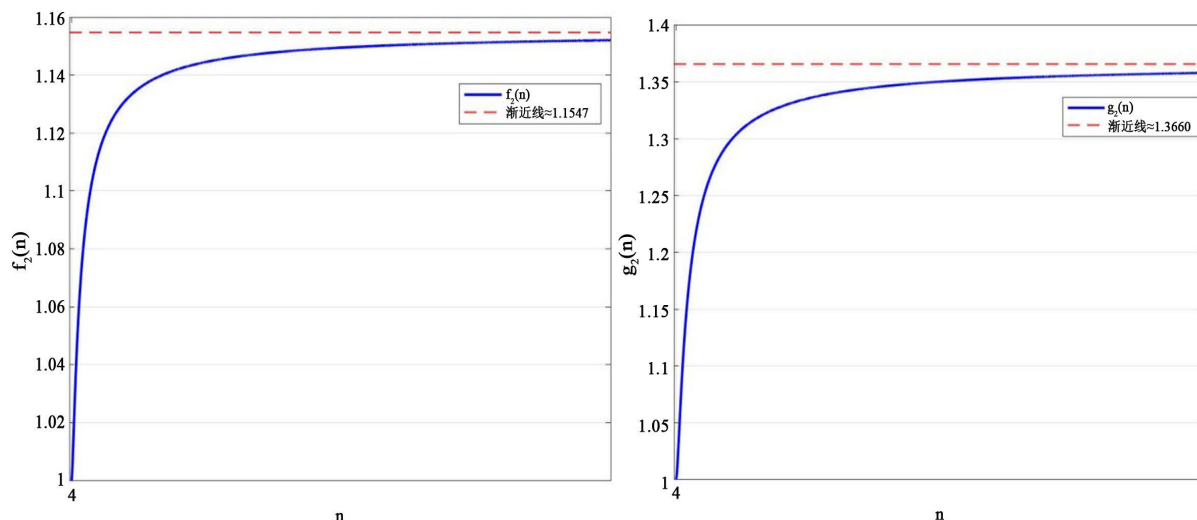


Figure 2. The graph of the function  $f_2(n)$  (left) and the graph of the function  $g_2(n)$  (right)

图 2. 函数  $f_2(n)$  的图像(左)与函数  $g_2(n)$  的图像(右)

由图像可知,  $f_2(n)$  与  $g_2(n)$  均在  $n \geq 4$  时单调递增, 且渐近线分别约为 1.1547 与 1.3660。于是得到该上界与下界对精确值的偏离程度约为 15.47% 与 36.6%。因此, 定理 3.2 的下界在轮图上具有稳定的良好紧致性, 上界在轮图上具有稳定的中等紧致性。

### 3.2.3. 完全二部图

设  $K_{p,q}$  为完全二部图, 其中  $p \geq q \geq 1$ , 其两部分顶点数分别为  $p$  和  $q$ , 参数为边数  $m = pq$ , 最大度  $\Delta = p$ , 最小度  $\delta = q$ 。第一部的每个顶点度为最小度  $q = \delta$ , 第二部的每个顶点度为最大度  $p = \Delta$ 。因此, 可以得到

$$Eu(K_{p,q}) = pq\sqrt{p^2 + q^2 + pq}. \quad (45)$$

由定理 3.2, 此时的下界  $A_3$  与上界  $B_3$  分别为

$$A_3(K_{p,q}) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(K_{p,q}) = \frac{\sqrt{3}}{2} pq(p+q), \quad (46)$$

$$B_3(K_{p,q}) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(K_{p,q}) + \frac{m(\Delta - \delta)^2}{4[\Delta + (2\sqrt{3} - 1)\delta]} = \frac{\sqrt{3}}{2} pq(p+q) + \frac{pq(p-q)^2}{4[p + (2\sqrt{3} - 1)q]}. \quad (47)$$

将精确值分别与上下界作比, 并约去公因子, 得到

$$f_3(p, q) = \frac{Eu(K_{p,q})}{A_3(K_{p,q})} = \frac{2\sqrt{p^2 + q^2 + pq}}{\sqrt{3}(p+q)}, \quad (48)$$



$$g_3(p, q) = \frac{B_1(K_{p,q})}{Eu(K_{p,q})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(p+q) + \frac{(p-q)^2}{4[p+(2\sqrt{3}-1)q]}}{\sqrt{p^2 + q^2 + pq}}. \quad (49)$$

令两部大小之比  $k = \frac{p}{q} \geq 1$ , 代入(48)式与(49)式得

$$f_3(k) = \frac{2\sqrt{k^2 + k + 1}}{\sqrt{3}(k+1)}, \quad (50)$$

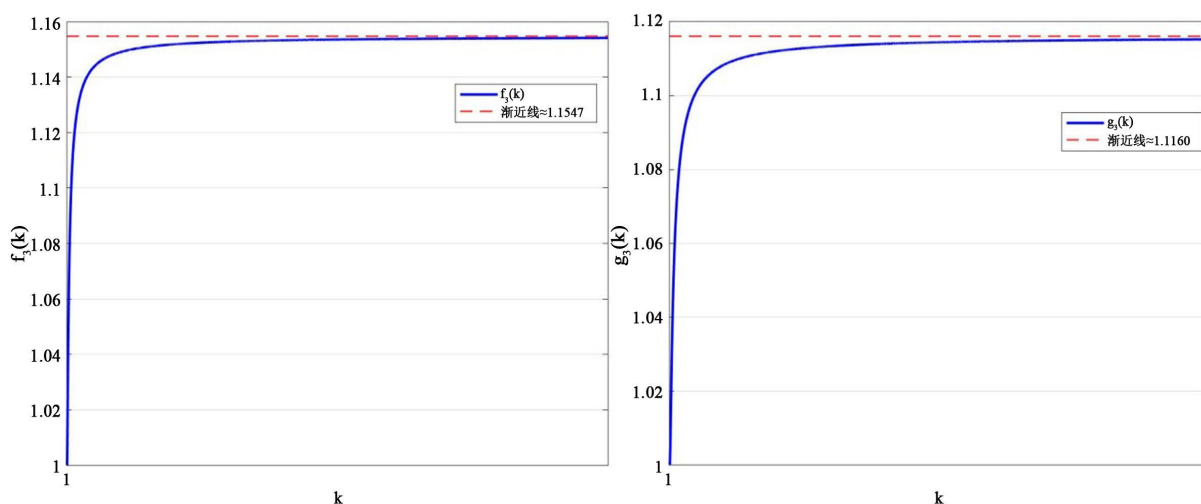
$$g_3(k) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(k+1) + \frac{(k-1)^2}{4(k+2\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{k^2 + k + 1}}. \quad (51)$$

当  $k \rightarrow +\infty$  时, 可以得到

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_3(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{k^2 + k + 1}}{\sqrt{3}(k+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547, \quad (52)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g_3(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(k+1) + \frac{(k-1)^2}{4(k+2\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{k^2 + k + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \approx 1.1160. \quad (53)$$

其中,  $f_3(k)$  与  $g_3(k)$  的函数图像如图 3 所示。



**Figure 3.** The graph of the function  $f_3(k)$  (left) and the graph of the function  $g_3(k)$  (right)

**图 3.** 函数  $f_3(k)$  的图像(左)与函数  $g_3(k)$  的图像(右)

由图像可知,  $f_3(k)$  与  $g_3(k)$  均在  $k \geq 1$  时单调递增, 且渐近线分别约为 1.1547 与 1.1160。于是得到该上界与下界对精确值的偏离程度约为 15.47% 与 11.6%。因此, 定理 3.2 的下界与上界在完全二部图上具有稳定的良好紧致性。

### 3.2.4. 与已有 Euler-Sombor 指标的界的比较

2021 年, Gutman [11] 提出了一类新的基于顶点度的拓扑指标, 称为图的 Sombor 指标, 该指标被定义为:

$$SO(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2} \quad (54)$$

其中,  $d_u$  与  $d_v$  分别为图中顶点  $u$  与顶点  $v$  的度。

Gutman [10] 在提出 Euler-Sombor 指标的同时, 还给出了该指标基于 Sombor 指标的上界与下界。

引理 3.3: 设  $G$  为一个连通图, 则

$$SO(G) < EU(G) \leq \sqrt{\frac{3}{2}} SO(G). \quad (55)$$

当且仅当  $G$  为正则图时等号成立。

引理 3.3 所提出的界形式简洁, 便于计算, 是 Euler-Sombor 指标研究中一个重要结果, 由于  $SO(G)$  与  $Eu(G)$  在定义上具有相似性, 因此该不等式在理论分析中具有很强的适用性与推广能力。

相比而言, 本文所给出的定理 3.2 的优势在于, 其给出的上界与下界均在正则图上成立, 且以经典拓扑指标  $M_1(G)$  作为媒介, 将 Euler-Sombor 指标与已知的大量第一 Zagreb 指标的相关理论相衔接, 便于根据已有结论进行相关计算与推导。

## 基金项目

国家自然科学基金青年项目(No. 12201471)。

## 参考文献

- [1] Gutman, I. (2013) Degree-Based Topological Indices. *Croatica Chemica Acta*, **86**, 351-361. <https://doi.org/10.5562/cca2294>
- [2] Aouchiche, M. and Ganesan, V. (2020) Adjusting Geometric-Arithmetic Index to Estimate Boiling Point. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **84**, 483-497.
- [3] Carballosa, W., Pestana, D., Sigarreta, J.M. and Touris, E. (2020) Relations between the General Sum Connectivity Index and the Line Graph. *Journal of Mathematical Chemistry*, **58**, 2273-2290. <https://doi.org/10.1007/s10910-020-01180-9>
- [4] Cruz, R., Santamaria-Galvis, A.D. and Rada, J. (2020) Extremal Values of Vertex-Degree-Based Topological Indices of Coronoid Systems. *International Journal of Quantum Chemistry*, **121**, e26536. <https://doi.org/10.1002/qua.26536>
- [5] Lin, W., Dimitrov, D. and Škrekovski, R. (2020) Complete Characterization of Trees with Maximal Augmented Zagreb Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **83**, 167-178.
- [6] Li, F., Li, X. and Broersma, H. (2020) Spectral Properties of Inverse Sum Indeg Index of Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **58**, 2108-2139. <https://doi.org/10.1007/s10910-020-01170-x>
- [7] Zheng, R., Liu, J., Chen, J. and Liu, B. (2020) Bounds on the General Atom-Bond Connectivity Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **83**, 143-166.
- [8] Abdo, H., Dimitrov, D. and Gutman, I. (2019) Graph Irregularity and Its Measures. *Applied Mathematics and Computation*, **357**, 317-324. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.013>
- [9] Gutman, I. and Trinajstić, N. (1972) Graph Theory and Molecular Orbitals. Total  $\Phi$ -Electron Energy of Alternant Hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*, **17**, 535-538. [https://doi.org/10.1016/0009-2614\(72\)85099-1](https://doi.org/10.1016/0009-2614(72)85099-1)
- [10] Gutman, I. (2024) Relating Sombor and Euler Indices. *Vojnotehnicki Glasnik*, **72**, 1-12. <https://doi.org/10.5937/vojtehg72-48818>
- [11] Gutman, I. (2021) Geometric Approach to Degree-Based Topological Indices: Sombor Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **86**, 11-16.