

带有季节性繁殖的种群模型临界域大小研究

邢露露

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年7月15日; 录用日期: 2026年8月8日; 发布日期: 2026年8月21日

摘要

针对季节性繁殖物种在一维有界区域上的持续生存问题, 本文采用周期单调动力系统理论及周期抛物方程的主特征值理论, 研究了一类具有单调出生函数、齐次Dirichlet边界条件的常微分-偏微分混合模型, 给出了种群持久存在的临界域长度及计算公式, 确定了种群灭绝与持续生存的阈值动力学结果。研究表明, 区域长度小于该临界域时, 系统的零平衡态全局渐近稳定, 种群灭绝; 区域长度大于该临界域时, 系统存在唯一全局吸引的正平衡态, 种群可持续生存。数值模拟讨论了模型关键参数对临界域的影响, 并验证了理论结果的准确性。

关键词

季节性繁殖, Dirichlet边界条件, 临界域大小, 种群持久性

Research on Critical Domain Size for a Population Model with Seasonal Breeding

Lulu Xing

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: July 15, 2026; accepted: August 8, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

The persistence of species with seasonally breeding on a one-dimensional bounded domain is investigated. By employing the theory of periodic monotone dynamical systems and the principal eigenvalue theory for periodic parabolic equations, we study a hybrid ordinary differential equation-partial differential equation model with monotone birth functions and homogeneous Dirichlet boundary conditions. The critical domain size for population persistence is established and its explicit formula is derived. The threshold dynamics between population extinction and persistence is determined. The

results show that when the domain length is below the critical size, the zero equilibrium is globally asymptotically stable, and the population becomes extinct; when the domain length exceeds the critical size, there exists a unique globally attractive positive equilibrium, and the population is persistent. Numerical simulations are conducted to observe the effects of key model parameters on the critical domain size and also to verify the accuracy of the theoretical results.

Keywords

Seasonal Breeding, Dirichlet Boundary Conditions, Critical Domain Size, Population Persistence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

季节性繁殖是指生物为适应环境周期变化,将繁殖集中在每年特定时段发生,以提高后代存活率的一种进化策略。如自然界中的很多鱼类、昆虫及部分哺乳动物都具有明显的季节性繁殖特征,其繁殖活动通常集中在每年较短时间内完成,而扩散和死亡则在其余时间连续发生。因此,此类种群的演化在时间上具有明显的周期性特征。对于生活在有限区域中的物种,栖息地大小是决定种群是否能够长期存续的重要因素。在齐次 Dirichlet 边界条件下,模型假设在栖息地外部种群不具备生存条件,因此个体一旦迁出边界就会死亡。如果种群栖息地长度或面积较小,繁殖带来的数量补充不足以弥补扩散损失,种群最终会走向灭绝;而当栖息地大小达到一定规模后,种群的繁殖可以覆盖死亡和扩散造成的损失,种群便可能长期存续。这种决定种群灭绝与持久的最小空间尺度被定义为种群持久存在的临界域[1]。临界域的存在性及其计算公式是预测种群长时间动力学行为的重要依据,一直受到众多生态学家和应用数学家的关注。

由于周期环境导致种群的出生和死亡随时间发生变化,这给种群演化的数学建模及模型动力学分析带来一定的挑战。为了研究季节性繁殖物种的动力学,离散-连续混合脉冲常微分或偏微分方程模型被大量提出,参见文献[1]-[5]。特别地,在经典工作 Lewis 和 Li [1]中提出了如下具有离散繁殖脉冲与连续反应扩散的脉冲反应扩散方程模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \gamma u^2, & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq 1 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(N_n(x)) \\ N_{n+1}(x) = u(x, 1) \end{cases}$$

模型假设物种的生存环境是均匀的,即模型的参数是常数,且繁殖脉冲发生在时间 $t=0$ 处,这给模型的动力学分析带来很大的方便。该工作研究了系统在无界区域上传播速度和行波解的存在性,以及有界区域上种群持久存在的最小临界域问题,并给出了临界域的数学计算公式,其结果揭示了种群扩散能力、生长率和死亡率对种群扩散和持久性的影响。随后, Jin 等、Wu 和 Zhao [6]-[8]等学者进一步发展了脉冲反应扩散方程理论,并将其应用于两性种群、非局部扩散及气候变化背景下的种群持续性研究。近年来, Bai、Lou 和 Zhao [9]基于成年个体同步羽化现象建立了年龄结构脉冲反应扩散模型,证明了传播速度与临界域的存在性,并讨论了成熟延迟对种群扩散和持续生存的影响。尽管上述离散-连续混合模型的研究已取得重要进展,但由于模型假设种群的繁殖是瞬间离散发生的,即模型并没有对种群在繁

殖季的演化进行动力学建模。另外,受季节更替的影响,种群的生存环境应该是时间周期而非均匀的。为了更精准地刻画周期环境中季节性繁殖种群的动力学, Sun 和 Zhang [10] [11] 提出了常微分 - 偏微分混合建模框架,并在时间均匀环境下研究了系统在无界区域上的传播动力学和有界区域上系统关于临界区域的阈值动力学。但在时间周期环境下,作者只研究了系统在无界区域上的传播动力学,而系统在有界区域上持久存在的临界域问题还没有被解决。

在以上工作基础上,本文研究时间周期环境下季节性繁殖物种在有界域上持久存在的最小临界域及其计算公式。利用周期单调动力系统理论和周期线性抛物方程的主特征值理论,确定了决定种群灭绝或持久的临界域阈值,探究了模型关键参数对种群存续临界域的影响。研究结果为周期环境下季节性繁殖物种的栖息地阈值评估、种群持久性预测以及生物多样性保护政策制定提供了理论依据。

2. 研究问题

本文在时间周期环境下研究季节性繁殖物种在有界域 $\Omega = (0, l)$ 上持久的最小临界域问题。受文献 [10] [11] 的启发,对物种作以下生物学假设:物种在一年内具有繁殖与扩散两个阶段,且种群在有界域以外的环境是完全致死的,即种群模型满足齐次 Dirichlet 边界条件;繁殖季节从每年年初开始,持续时间较短,繁殖季内无成熟个体出现;每年成年个体只在繁殖期繁殖一次,扩散期不进行繁殖;扩散期所有个体有相同的自然死亡率和扩散率,且仅在扩散期出现密度依赖性死亡;所有新生个体在同一年内达到成熟;由于季节交替变化,模型假设种群的生存环境在时间上是周期的、空间上是均匀的。基于上述生物学特征建立模型如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = -\mu(t)u_n(x, t) + f\left(p(t)e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} N_n(x)\right) & 0 < t \leq L, x \in \Omega \\ \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} - \mu(t)u_n(x, t) - g(t, u_n(x, t))u_n(x, t) & L < t \leq 1, x \in \Omega \\ u_n(x, 0) = N_n(x) & n \in \mathbb{N} \\ N_{n+1}(x) = u_n(x, 1) \end{cases} \quad (1)$$

模型(1)中种群繁殖期在时间 $t \in [0, L]$ 内发生,扩散期在 $t \in (L, 1]$ 内发生。 $u_n(x, t)$ 表示第 n 年在位置 $x \in \Omega$ 和时间 $t \in [0, 1]$ 处的种群密度, $N_n(x)$ 表示在第 n 个繁殖阶段开始时在 x 处的繁殖种群密度。假设每年的繁殖期短于个体成熟期,因此在 $t \in [0, L]$ 内没有新生的个体成熟。所有个体在均在年末已成熟,这些成熟个体在下一年的繁殖阶段进行繁殖。项 $e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} N_n(x)$ 表示在位置 x 和时间 $t \in [0, L]$ 处的成熟个体总数。

$f\left(p(t)e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} N_n(x)\right)$ 表示繁殖阶段的出生函数,其中 $t \in [0, L]$ 且满足 $\int_0^L p(t) dt = 1$, 连续函数 $g(t, u)$

为扩散阶段的密度依赖死亡率,其中 $t \in [L, 1]$ 。常数 $D > 0$ 表示个体扩散率, $\mu(t) > 0$ 表示个体自然死亡率,其中 $t \in [0, 1]$ 。

模型(1)通过将一年时间划分为繁殖期和扩散期,建立了常微分 - 偏微分混合框架,该框架成功地描述了季节性繁殖物种的繁殖特征。为了在数学上简化处理,模型在生物学意义上进行限制,即物种的繁殖期和扩散期在时间上是严格分离的。然而自然界中部分物种的繁殖与扩散存在一定的重叠时期,同时模型(1)未考虑成熟延迟对种群动力学的影响。尽管存在上述简化,模型(1)对于具有高度同步性的脉冲式繁殖物种仍具备适配性与合理性。例如许多高纬度地区或温带地区的昆虫、大型迁徙鸟类及哺乳动物,这些物种通常集中在一年中特定窗口进行繁殖交配,随后成年个体死亡或停止繁殖,进入长期的生长和扩散。基于上述系统(1)的建模背景,结合模型实际意义,提出以下假设:

假设 1

- a) 函数 $\mu(t)$ 和 $p(t)$ 关于时间 $t \geq 0$ 以 1 年为周期;
 b) f 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上单调非减的局部利普希茨连续函数, 满足 $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, 且对所有 $N > 0$ 有 $f(N) > 0$, $f(N)/N$ 关于 N 非增;
 c) $g(t, u)$ 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上的局部利普希茨连续函数, 关于时间 t 以 1 年为周期, 满足 $g(t, 0) = 0$ 且对任意 $u \geq 0$ 有 $\partial_u g(t, u) > 0$ 。

为了研究齐次 Dirichlet 边界条件下系统(1)的动力学行为, 引入赋予 C^1 范数的 Banach 空间:

$$X := \{\phi \in C^1([0, l], \mathbb{R}) : \phi(0) = \phi(l) = 0\}$$

定义 X 中具有非空内部的正锥为 $X^+ := \{\phi \in X : \phi(x) \geq 0, \forall x \in [0, l]\}$, 则其内部集合如下:

$$\text{Int}(X^+) := \{\phi \in X : \phi(x) > 0, \forall x \in (0, l), \phi'(0) > 0, \phi'(l) < 0\}$$

根据文献[12]第三章第一节, 利用周期演化算子理论构造庞加莱映射, 可将连续系统转化为离散时间递推系统。因此, 对任意初值 $N_0 \in X$, 可将系统(1)转化为离散时间递推系统(2):

$$N_{n+1}(x) = \tilde{Q}_{1-L}[\tilde{Q}_L[N_n(\cdot)]](x) := \tilde{Q}[N_n](x), \forall x \in [0, l], n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

其中, $\tilde{Q}_L$ 表示系统(1)中第一个方程从时间 $t = 0$ 到 $t = L$ 时刻的解映射, $\tilde{Q}_{1-L}$ 是第二个方程从 $t = L$ 到 $t = 1$ 时刻带有齐次 Dirichlet 边界条件下的解映射。因此, 系统(1)从时刻 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的解映射可以表示为 $\tilde{Q} = \tilde{Q}_{1-L} \circ \tilde{Q}_L$ 。

现在考虑系统(2)在齐次 Dirichlet 边界条件下的全局动力学行为。重点关注最小临界域的存在性, 即当有界区域尺度超越该临界区域时, 种群能够持续生存, 否则种群灭绝。本文假设物种在繁殖季内的出生函数 f 为单调非减的。为了研究物种的持久性, 本文进一步作出如下合理的生物学假设[10][11], 其中假设 2 是种群拥有入侵能力的前提条件, 代表物种能够在低密度下进行自我补充。

假设 2 $e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) > 1$ 。

假设 3 存在实数 $M > 0, \sigma_f > 0, \nu_f > 1$, 使得 $f(N) \geq f'(0)N - MN^{\nu_f}$ 对所有的 $0 \leq N \leq \sigma_f$ 成立。

3. 最小临界域

为了确定种群在有界区域 $\Omega = (0, l)$ 上满足齐次 Dirichlet 边界条件时维持种群持久生存的临界域大小, 首先将系统(1)在零平衡态处进行线性化, 得到如下线性系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = -\mu(t)u_n(x, t) + f'(0)p(t)e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} N_n(x) & 0 < t \leq L, x \in \Omega \\ \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} - \mu(t)u_n(x, t) & L < t \leq 1, x \in \Omega \\ u_n(x, 0) = N_n(x) & n \in \mathbb{N} \\ u_n(0, t) = u_n(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ N_{n+1}(x) = u_n(x, 1) \end{cases} \quad (3)$$

当 $t \in [0, L]$ 时, 求解系统(3)的第一个方程得:

$$u_n(x, t) = e^{-\int_0^t \mu(s) ds} \left(1 + f'(0) \int_0^t p(v) dv \right) N_n(x)$$

上式中令 $t = L$ 得:

$$u_n(x, L) = e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) N_n(x)$$

令 $V(t, s), 0 \leq s \leq t \leq 1$ 是 X^+ 上线性抛物方程(4)的演化算子:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \mu(t)u(x, t) & x \in [0, l] \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

则有

$$V(t, s)[\phi](x) = \int_0^l G(x, t; y, s)\phi(y)dy$$

其中 $G(x, t; y, s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(t-s) - \int_s^t \mu(\tau) d\tau}$ 是方程(4)的格林函数。因此, 系统(3)的 $N_n(x)$ 满足如下离散时间迭代系统:

$$N_{n+1}(x) = V(1, L) \circ \left[e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) N_n(\cdot) \right](x) = \tilde{T}[N_n(\cdot)](x), \forall x \in [0, l], n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

其中 $\tilde{T} := V(1, L) \circ e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0))$ 是线性系统(3)的庞加莱映射, 则 $\tilde{Q}$ 在零点的弗雷歇导数满足 $D\tilde{Q}(0) = \tilde{T}$ 。根据文献[13]第二章和第三章, $\tilde{T}$ 在空间 X 上是紧且强正的。令 $r := r(\tilde{T})$ 是 $\tilde{T}$ 的谱半径, 根据文献[13]中 Krein-Rutman 定理可知 $r > 0$, 并且 r 是算子 $\tilde{T}$ 唯一的主特征值, 其对应一个强正的特征函数 $\hat{\phi} \in \text{int}(X^+)$ 。令 $\hat{\phi} = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \in \text{int}(X^+)$, 通过计算可得

$$\begin{aligned} \tilde{T}[\hat{\phi}](x) &= V(1, L) \circ e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) [\hat{\phi}](x) \\ &= \int_0^l \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(1-L) - \int_L^1 \mu(s) ds} \circ e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) \cdot \left(\sin \frac{\pi y}{l} \right) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(1-L) - \int_L^1 \mu(s) ds} \circ e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) \int_0^l \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{\pi y}{l} dy \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D(1-L)} \circ e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) \hat{\phi}(x) \end{aligned}$$

由此可知 $\hat{\phi} \in \text{int}(X^+)$ 是算子 $\tilde{T}$ 的一个强正特征函数, 由主特征值的唯一性可知

$r := r(l) = e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D(1-L)} \circ e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0))$ 。主特征值 $r(l)$ 代表种群在经历繁殖和扩散这两个发展阶段结束后平均能够存活下来的个体。当主特征值 $r(l) > 1$ 时种群增长; $r(l) < 1$ 时种群走向灭绝; $r(l) = 1$ 时种群处于临界平衡。

容易看出谱半径 $r(l)$ 关于区域长度 l 是严格单调递增的, 且有 $r(0^+) = 0$, $r(+\infty) = e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0))$ 。结合假设 2 可知, 存在唯一的 $l^* > 0$ 使得 $r(l^*) = 1$ 。当 $l < l^*$ 时 $r(l) < 1$, 当 $l > l^*$ 时 $r(l) > 1$ 。令 $r(l) = 1$, 求解得到临界区域大小为

$$l^* = \pi \sqrt{\frac{D(1-L)}{\ln(1 + f'(0)) - \int_0^L \mu(s) ds}} \quad (6)$$

为了建立系统(2)的动力学阈值结果, 首先给出以下引理:

引理 1 若假设 1 成立, 则庞加莱映射 $\tilde{Q}: X^+ \rightarrow X^+$ 是强单调且严格次齐次的。

证明 任取 $\phi_1 > \phi_2$, $\phi_1, \phi_2 \in \text{int}(X^+)$, 由 $\tilde{Q}_L[\phi](x) = e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \phi(x) + \int_0^L e^{-\int_s^L \mu(\tau) d\tau} f\left(p(s) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \phi(x)\right) ds$,

结合假设 1 中 f 的单调性知 $\tilde{Q}_L[\phi](x) \geq \tilde{Q}_L[\phi_2](x)$, 即 $\tilde{Q}_L$ 是单调的。令 $u_i(x, t), i=1, 2$ 是抛物方程(7)的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \mu(t)u(x, t) - g(t, u(x, t))u(x, t), & x \in [0, l], t \in [0, 1] \\ u_i(x, L) = \tilde{Q}_L[\phi_i] \end{cases} \quad (7)$$

定义 $\omega(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, 则 ω 满足 $\omega_t = D \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) - \mu(t)(u_1 - u_2) - (g(t, u_1)u_1 - g(t, u_2)u_2)$, 令

$h(t, u) = g(t, u)u$, 根据假设 1 中 g 的单调性和连续性可知 $g(t, u) \geq 0$, $\partial_u g(t, u)u > 0$, 则 $\partial_u h(t, u) = g(t, u) + \partial_u g(t, u)u > 0$ 。对于固定的 $t \in [L, 1]$, $h(\cdot, u)$ 关于 u 是单调递增且连续的。由中值定理可得 $h(t, u_1) - h(t, u_2) = h(t, \xi)(u_1 - u_2)$, ξ 位于 u_1 与 u_2 之间。此时 ω 满足 $\omega_t = D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \mu(t)\omega - h(t, \xi)\omega$ 。

根据 $\tilde{Q}_L[\phi](x) \geq \tilde{Q}_L[\phi_2](x)$, 有 $\omega(x, L) \geq 0$ 。根据文献[13]第二章中抛物型方程强极大值原理, 当 $x \in [0, l], t \in [L, 1]$ 时, 有 $\omega(x, t) > 0$, 令 $t=1$, 有 $\tilde{Q}[\phi](x) - \tilde{Q}[\phi_2](x) > 0$ 。进一步, 根据文献[13]第二章中 Hopf 边界引理, 有 $\omega_x(0, 1) > 0$, $\omega_x(l, 1) < 0$ 。因此, $\tilde{Q}[\phi] - \tilde{Q}[\phi_2] = \omega(\cdot, 1) \in \text{int}(X^+)$, 这表明 $\tilde{Q}[\phi] \gg \tilde{Q}[\phi_2]$, 即 $\tilde{Q}$ 是强单调的。

取 $\alpha \in (0, 1)$, $\phi \in \text{int}(X^+)$, $x \in [0, l]$, 有

$$\tilde{Q}_L[\alpha\phi](x) = e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \alpha\phi(x) + \int_0^L e^{-\int_s^L \mu(\tau) d\tau} f\left(p(s)e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \alpha\phi(x)\right) ds$$

$$\alpha\tilde{Q}_L[\phi](x) = \alpha e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \phi(x) + \alpha \int_0^L e^{-\int_s^L \mu(\tau) d\tau} f\left(p(s)e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \phi(x)\right) ds$$

根据假设 1 中 $N > 0$ 时 $f(N)/N$ 关于 N 非增。故对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, 有 $\frac{f(\alpha N)}{\alpha N} \geq \frac{f(N)}{N}$, 即

$f(\alpha N) > \alpha N$ 。因此, $\tilde{Q}_L[\alpha\phi](x) \geq \alpha\tilde{Q}_L[\phi](x)$, 即 $\tilde{Q}_L$ 是次齐次的。令 $u(x, t)$ 是方程

$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu(t)u - g(t, u)u$ 在初值为 $u(x, L) = \tilde{Q}_L[\phi](x)$ 的解。定义 $z(x, t) = \alpha u(x, t)$, 则 $z(x, t)$ 满足微分方程 $\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \mu(t)z - \alpha g(t, u)u$ 。由 $\alpha < 1$, 结合 g 的单调性, 有 $g(t, u) > g(t, \alpha u) = g(t, z)$, $\alpha g(t, u)u = g(t, u)z > g(t, z)z$, 从而 $\frac{\partial z}{\partial t} < D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \mu(t)z - g(t, z)z$ 。根据边界条件 $u(0, t) = z(0, t) = 0$, $u(l, t) = z(l, t) = 0$, 初始条件 $u(0, t) = z(0, t) = 0, u(l, t) = z(l, t) = 0$, 结合文献[14]第五章第二节中比较原理, 对所有的 $t \in (L, 1], x \in (0, l)$ 必有 $u(x, t) > z(x, t) = \alpha u(x, t)$ 。令 $t=1$ 可得 $u(x, 1) > \alpha u(x, 1)$, 和上述证明强单调性类似, 差值函数 $u(x, t) - z(x, t)$ 在边界上满足 Hopf 引理, 则有 $u(\cdot, 1) - z(\cdot, 1) = \tilde{Q}[\alpha\phi] - \alpha\tilde{Q}[\phi] \in \text{int}(X^+)$ 。由于 $\tilde{Q} = \tilde{Q}_{L-L} \circ \tilde{Q}_L$, 故 $\tilde{Q}[\alpha\phi] \gg \alpha\tilde{Q}[\phi]$, $\tilde{Q}$ 在空间 X^+ 上是严格次齐次的。

下面, 证明系统关于临界域 l^* 具有如下的阈值动力学结果:

定理 2 若假设 1~3 均满足, 出生函数 f 为单调非减函数, 那么以下结论对于系统(2)成立:
(1) 如果 $l < l^*$, 则系统(2)的零平衡态在 X^+ 上全局渐近稳定。
(2) 如果 $l > l^*$, 则系统(2)存在唯一的正不动点 $N_* \in \text{int}(X^+)$, 且 N_* 具有全局吸引性, 即当 $x \in [0, l]$ 时, 对任意初值 $N_0 \in X^+ \setminus \{0\}$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(x) = N_*(x)$ 成立。

下面, 证明系统关于临界域 l^* 具有如下的阈值动力学结果:

定理 2 若假设 1~3 均满足, 出生函数 f 为单调非减函数, 那么以下结论对于系统(2)成立:

- (1) 如果 $l < l^*$, 则系统(2)的零平衡态在 X^+ 上全局渐近稳定。
- (2) 如果 $l > l^*$, 则系统(2)存在唯一的正不动点 $N_* \in \text{int}(X^+)$, 且 N_* 具有全局吸引性, 即当 $x \in [0, l]$

时, 对任意初值 $N_0 \in X^+ \setminus \{0\}$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(x) = N_*(x)$ 成立。

证明 (1) 当 $l < l^*$ 时, $r(l) = e^{-D(1-L)\frac{\pi^2}{l^2}} e^{-\int_0^l \mu(s) ds} (1 + f'(0)) < 1$, 由于 $r(l)$ 为最大特征值, 故系统(2)的零

解局部稳定。

下面证零解在 X^+ 上全局吸引。令 θ 为一大于 0 的常数, 定义

$$I_n(x) = \theta \left[e^{-D(1-L)\frac{\pi^2}{l^2}} \cdot e^{-\int_0^L \mu(s)ds} (1+f'(0)) \right]^n \hat{\phi}(x), \forall n \geq 0$$

下面验证 $I_n(x)$ 满足线性抛物型方程(8):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} - \mu(t)u_n(x,t), & x \in (0,l), \quad t \in (L,1] \\ u_n(x,L) = e^{-\int_0^L \mu(s)ds} (1+f'(0)) I_n(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ I_{n+1}(x) = u_n(x,1) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

当 $u(x,L) = \theta e^{-\int_0^L \mu(s)ds} (1+f'(0)) \hat{\phi}(x)$ 时, $u(x,t) = \theta \left[e^{-D(t-L)\frac{\pi^2}{l^2}} \cdot e^{-\int_0^L \mu(s)ds} (1+f'(0)) \right] \hat{\phi}(x)$ 为线性抛物型方程(9)

的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu(t)u(x,t), & t \in [L,1] \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

当 $t=1$ 时, 有 $u(x,1) = \theta \left[e^{-D(1-L)\frac{\pi^2}{l^2}} \cdot e^{-\int_0^L \mu(s)ds} (1+f'(0)) \right] \hat{\phi}(x) = I_1(x)$ 。通过归纳法可知 $I_n(x)$ 满足线性抛物方程(8)。故 $r(l) < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 0$ 对 $x \in [0,l]$ 一致成立。

对于系统(2)的任一初值 $N_0 \in X^+$, 选取足够大的 θ , 使得 $N_0(x) \leq I_0(x)$ 对于一切 $x \in [0,l]$ 成立。根据假设 1 (b)可知, 线性系统(3)的解是系统(1)的一个上解, 通过比较原理和归纳法可知, 对于 $n \geq 0$, 均有 $N_n(x) \leq I_n(x)$ 对于一切 $x \in [0,l]$ 成立。故 $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(x) = 0$ 对 $x \in [0,l]$ 一致成立。

(2) 当 $l > l^*$ 时, $r(l) = e^{-D(1-L)\frac{\pi^2}{l^2}} e^{-\int_0^L \mu(s)ds} (1+f'(0)) > 1$, 此时系统(2)的零解是不稳定的。根据引理 1, $\tilde{Q}$ 在空间 X^+ 上是强单调且严格次齐次的, 则庞加莱映射 $\tilde{Q}$ 在空间 X^+ 上至多有一个强正的不动点。假设算子 $\tilde{Q}$ 有两个不动点分别为 $\varphi_1 \in \text{int}(X^+)$ 和 $\varphi_2 \in \text{int}(X^+)$, 根据文献[12]中引理 2.3.1 可知, 存在一个常数 $\rho \in (0,1]$ 使得 $\varphi_1 = \rho\varphi_2$ 。如果 $\rho \in (0,1)$, 则

$$\varphi_1 = \tilde{Q}(\varphi_1) = \tilde{Q}(\rho\varphi_2) \gg \rho\tilde{Q}(\varphi_2) = \rho\varphi_2 = \varphi_1$$

这是矛盾的, 因此 $\rho=1$, 即 $\varphi_1 = \varphi_2$ 。

考虑如下带有 Dirichlet 边界条件的特征值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mu(t)\phi = \lambda\phi, & x \in (0,l) \\ \phi(0,t) = \phi(l,t) = 0 \end{cases}$$

其中 $\phi(x,t)$ 关于 t 是 1 周期的。通过求解, 得主特征值为 $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2} D + \int_0^1 \mu(s)ds$, 与之对应的特征函数为

$$\hat{\phi}(x, t) = e^{-\lambda_1 t} e^{\frac{\pi^2}{l^2} D t + \int_0^t \mu(s) ds} \sin \frac{\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

$$\text{由于 } r(l) = e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D(1-L)} \cdot e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) = e^{-\lambda_1 + \frac{\pi^2}{l^2} DL + \int_0^L \mu(s) ds} \cdot e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0)) > 1, \text{ 取 } \hat{\lambda} > \lambda_1,$$

$\eta < e^{-\int_0^L \mu(s) ds} (1 + f'(0))$ 使得 $e^{-\hat{\lambda} + \frac{\pi^2}{l^2} DL + \int_0^L \mu(s) ds} \cdot \eta > 1$ 成立。根据假设 3, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, $\hat{\phi} \in \text{int}(X^+)$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_L[\varepsilon \hat{\phi}] &= e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \varepsilon \hat{\phi} + \int_0^L e^{-\int_s^L \mu(\tau) d\tau} f\left(p(s) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \varepsilon \hat{\phi}\right) ds \\ &\geq e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \varepsilon \hat{\phi} + \int_0^L e^{-\int_s^L \mu(\tau) d\tau} \left[f'(0) p(s) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \varepsilon \hat{\phi} - M \left(p(s) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \varepsilon \hat{\phi} \right)^{\nu_f} \right] ds \\ &= e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \left(\varepsilon \hat{\phi} + f'(0) \varepsilon \hat{\phi} \right) - M \int_0^L e^{-\int_s^L \mu(\tau) d\tau} \left(p(s) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} \varepsilon \hat{\phi} \right)^{\nu_f} ds \\ &\geq e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \left(\varepsilon \hat{\phi} + f'(0) \varepsilon \hat{\phi} \right) - M \int_0^L e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \left(p(s) \varepsilon \hat{\phi} \right)^{\nu_f} ds \\ &= e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} \left(\varepsilon \hat{\phi} + f'(0) \varepsilon \hat{\phi} - M \left(\varepsilon \hat{\phi} \right)^{\nu_f} \right) \\ &= \left(\eta + \left[e^{-\int_0^L \mu(\tau) d\tau} (1 + f'(0)) - \eta \right] - M \left(\varepsilon \hat{\phi} \right)^{\nu_f - 1} \right) \cdot \varepsilon \hat{\phi} \\ &\geq \eta \varepsilon \hat{\phi}. \end{aligned}$$

定义 $\hat{u}(x, t) = \varepsilon \eta e^{-\hat{\lambda} t} \hat{\phi}(x, t)$, 其中 $x \in [0, l]$ 。当 $t \in (L, 1]$ 时, 根据假设 1 中 g 的单调性可知

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} + \mu(t) \hat{u}(x, t) + g(t, \hat{u}(x, t)) \hat{u}(x, t) \\ &= \varepsilon \eta e^{-\hat{\lambda} t} \left[-\hat{\lambda} \hat{\phi}(x, t) + \frac{\partial \hat{\phi}(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \hat{\phi}(x, t)}{\partial x^2} + \mu(t) \hat{\phi}(x, t) \right] + g(t, \varepsilon \eta e^{-\hat{\lambda} t} \hat{\phi}(x, t)) \varepsilon \eta e^{-\hat{\lambda} t} \hat{\phi}(x, t) \\ &\leq \varepsilon \eta e^{-\hat{\lambda} t} \left[\left(-\hat{\lambda} \hat{\phi}(x, t) + \frac{\partial \hat{\phi}(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \hat{\phi}(x, t)}{\partial x^2} + \mu(t) \hat{\phi}(x, t) \right) + g(t, \varepsilon \eta \hat{\phi}(x, t)) \right] \hat{\phi}(x, t) \\ &\leq \varepsilon \eta e^{-\hat{\lambda} t} \left[(\lambda_1 - \hat{\lambda}) + g(t, \varepsilon \eta) \right] \hat{\phi}(x, t) \leq 0 \end{aligned}$$

当 ε 充分小时, 根据 g 的连续性可知 $g(t, \varepsilon \eta) \rightarrow 0$ 。这表明 $\hat{u}(x, t)$ 是系统(1)第二个方程的一个下解。选取充分小的 $\varepsilon^* < \min(\sigma_f, \beta)$, 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, 上述两式同时成立, 则有

$$\tilde{Q}(\varepsilon \hat{\phi})(x) = \tilde{Q}_{1-L}[\tilde{Q}_L(\varepsilon \hat{\phi})](x) \geq \tilde{Q}_{1-L}[\eta \varepsilon \hat{\phi}](x) \geq \hat{u}(x, 1) \geq \varepsilon \hat{\phi}(x)$$

根据 $\tilde{Q}$ 的单调性, 当 $x \in [0, l]$ 时有

$$\beta \geq \tilde{Q}^{n+1}(\varepsilon \hat{\phi})(x) \geq \tilde{Q}^n(\varepsilon \hat{\phi})(x), n \geq 0$$

注意到 $\varepsilon \hat{\phi} \in \text{int}(X^+)$, 则离散轨道 $\{\tilde{Q}^n[\varepsilon \hat{\phi}], n \in \mathbb{N}\} \subset \text{int}(X^+)$ 单调递增且有界, 故存在一个 $N_* \in \text{int}(X^+)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}^n(\varepsilon \hat{\phi})(x) = N_*(x)$ 对 $x \in [0, l]$ 一致成立, 且满足 $\tilde{Q}[N_*] = N_*$ 。

最后, 对任意初值 $\tilde{Q}[N_*] = N_*$, 根据文献[14]第七章推论 4.2 中强保序性结论可知 $N_1 \in \text{int}(X^+)$ 。结合庞加莱映射 $\tilde{Q}$ 是强单调且严格次齐次的, 根据文献[12]中定理 2.3.2 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}^{n+1}(N_0)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}^n(N_1)(x) = N_*(x) \text{ 对于 } x \in [0, l] \text{ 一致成立。}$$

4. 数值模拟

本节利用 matlab 软件模拟模型关键参数对种群临界域长度 l^* 的影响。在假设 1 的条件下, 除特别说明外, 选取参数如下: 自然死亡率 $\mu(t) = 0.2(1 + 0.7\sin(2\pi t))$, 密度依赖死亡率函数设置为 $g(t, u) = (1 + 0.5\sin(2\pi t))u$, Beverton-Holt 型函数 $f(N) = mN/c + N$, 其中 $m = 6$, $c = 0.2$, 扩散系数 $D = 1$, 繁殖期长度 $L = 0.1$, 初始条件选取定义域为 $[-10, 10]$ 上具有紧支撑 $[-5, 5]$ 的正弦函数 $N_0(x) = 0.5\sin(\pi x/10)$ 。图 1~4 分别展示了最小临界域 l^* 大小与扩散系数 D 、平均死亡率 $\bar{\mu}$ 、繁殖期长度 L 及出生率 $f'(0)$ 这四个模型关键参数的关系。容易观察到, 最小临界域与扩散系数和死亡率系数呈正相关的关系, 与繁殖期长度和出生率呈现负相关关系。在图 1~4 中图像上方的区域, 表示种群能够持续生存, 图像下方区域种群将会灭绝。

图 5 展示了扩散系数 D 和出生率 $f'(0)$ 的协同作用对最小临界域 l^* 大小的影响。结果表明: 在点 $(D=1, f'(0)=30)$ 处, 通过计算可得到维持种群存续的最小临界区域大小为 $l^* = 0.6864$, 随着种群扩散, l^* 呈现出明显的扩张趋势, 可以看到当扩散率 D 升至 3 时, 系统进入灭绝区, 即图中白色区域, 此时无论区域多大, 种群均无法存活。但当出生率 $f'(0)$ 提高时可有效抵消边缘流失效应。等高线向右上方倾斜揭示了较高扩散率环境下种群需要更高的繁殖力来维持种群存续。图 6 为最小临界域 l^* 大小与平均死亡率 $\bar{\mu}$ 和繁殖期长度 L 二维等高线图。结果显示: 随着平均死亡率的升高, l^* 平缓增大; 然而当繁殖期长度 L 缩短时, 等高线密度呈现快速增加趋势。这表明临界区域大小对短期繁殖具有较高的敏感性。

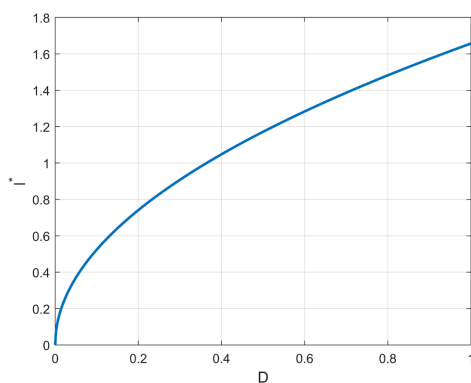


Figure 1. The relationship between critical domain size l^* and diffusion coefficient D

图 1. 临界域大小 l^* 与扩散系数 D 的关系

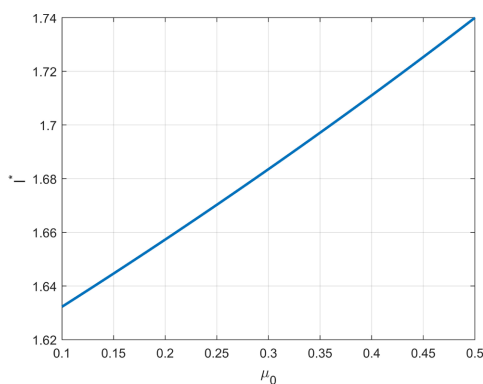


Figure 2. The relationship between critical domain size l^* and average mortality rate $\bar{\mu}$

图 2. 临界域大小 l^* 与平均死亡率 $\bar{\mu}$ 的关系

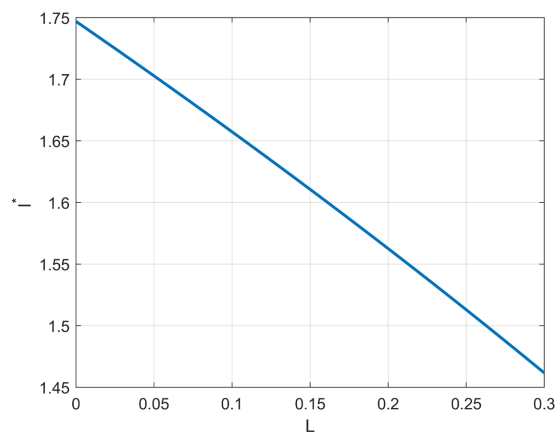


Figure 3. The relationship between critical domain size l^* and length of the breeding period L

图 3. 临界域大小 l^* 与繁殖期长度 L 的关系

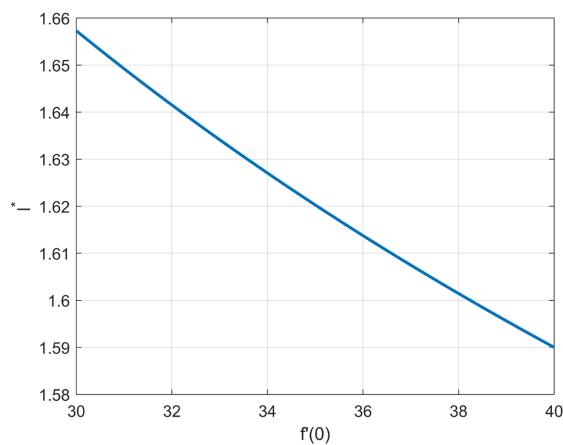


Figure 4. The relationship between critical domain size l^* and birth rate $f'(0)$

图 4. 临界域大小 l^* 与出生率 $f'(0)$ 的关系

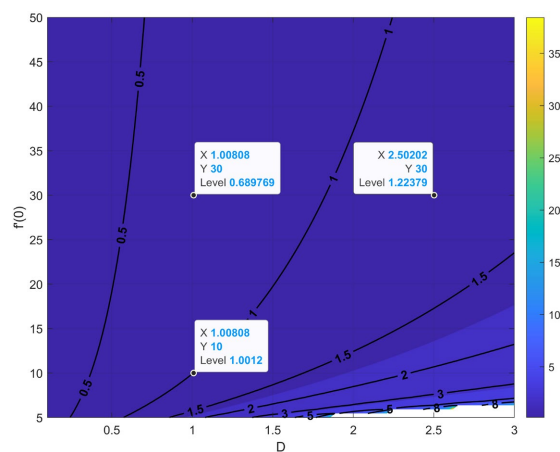


Figure 5. Sensitivity heatmap of the critical domain size l^* to $(D, f'(0))$

图 5. 临界域大小 l^* 与 $(D, f'(0))$ 的敏感性热力图

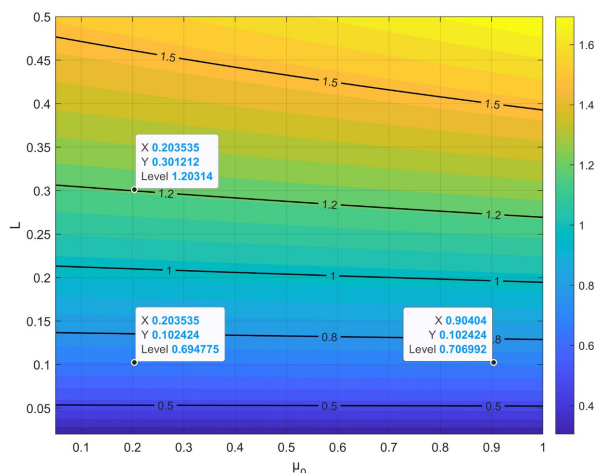


Figure 6. Sensitivity heatmap of the critical domain size l^* to (μ_0, L)

图 6. 临界域大小 l^* 与 (μ_0, L) 的敏感性热力图

文献[10]中的研究表明, 当概率函数 $p(t)$ 为均匀分布时, 物种的繁殖策略最优, 故下面选取概率密度函数为 $p(t)=1/L$, $t \in [0, L]$, 图 7 和图 8 分别模拟了平均死亡率为 $\bar{\mu}=0.1$ 和 $\bar{\mu}=1$ 时, 系统(1)在有界区域 $\Omega=[0,10]$ 上种群密度随时间和空间位置的动态演化过程。容易看出当平均死亡率较低时, 种群密度在整个时间轴上表现得较稳定, 从第一年到第十年的演化过程中, 种群密度的峰值和整体波动幅度没有出现剧烈的上升或骤降, 随着时间的推移, 种群密度呈现出较为规律的周期性波动; 而当平均死亡率升高到 1 时, 种群在初始阶段经历了剧烈的跨度变化, 在第一年, 种群密度有一个较高的初始峰值, 但随后快速下降。相同的是, 两种不同平均死亡率下种群密度最终都趋于一个稳定的值, 通过计算, 当 $\mu_0=0.1$ 时种群临界域 $l^*=1.6323$ ($l>l^*$); 当 $\mu_0=1$ 时种群临界域大小为 $l^*=1.9103$ ($l>l^*$), 这表明种群可以持续生存且最终收敛到了非零的正周期平衡态, 这与定理 1 (2)吻合: 当 $l>l^*$ 时, 系统存在一个正的周期吸引子 $N_*(x)$ 。比较两幅图可以看出在平均死亡率较低的情况下, 种群在空间中部 ($x=5$) 存活能力较强; 而当平均死亡率增大时, 存活能力下降。

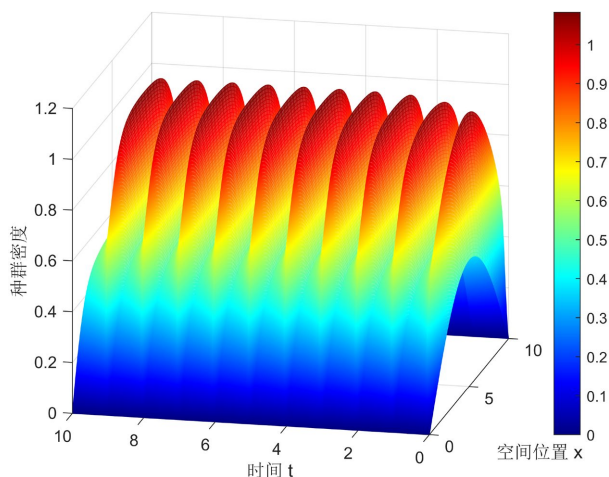


Figure 7. The evolution of the population ($\mu_0 = 0.1$)

图 7. 种群的演化 ($\mu_0 = 0.1$)

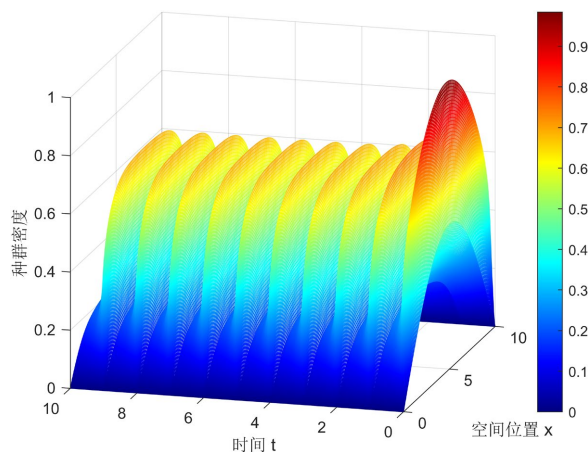


Figure 8. The evolution of the population ($\mu_0 = 1$)

图 8. 种群的演化($\mu_0 = 1$)

5. 结语

本文考虑了具有短期繁殖和扩散阶段的季节性繁殖物种在齐次 Dirichlet 边界条件下的空间动力学行为。利用周期单调系统演化理论,通过求解主特征值问题找到了种群可持续生存的最小临界区域并给出了计算表达式。研究表明,出生函数为单调函数的情况下,当 $l < l^*$ 时种群走向灭绝,当 $l < l^*$ 时种群存在一个正的周期吸引子。数值模拟阐明了模型关键参数对种群生存阈值的影响,验证了理论结果的准确性。然而,本文还存在值得深入探讨的问题。首先,本文只考虑在 Dirichlet 边界条件下种群在有界区域的动力学行为,而实际生态环境中栖息地边界往往并非完全致死,可进一步研究 Neumann 边界条件、Robin 边界条件下模型的动力学行为;此外,本文引入了时间周期系数,而自然界栖息地普遍存在资源、地形等空间异质结构,可进一步研究空间异质环境对种群的持续生存或灭绝的影响;最后,可引入年龄结构,考虑年龄差异对种群演化的影响。

基金项目

天津职业技术师范大学科研启动项目(KYQD202324)。

参考文献

- [1] Lewis, M.A. and Li, B. (2012) Spreading Speed, Traveling Waves, and Minimal Domain Size in Impulsive Reaction-Diffusion Models. *Bulletin of Mathematical Biology*, **74**, 2383-2402. <https://doi.org/10.1007/s11538-012-9757-6>
- [2] Kierstead, H. and Slobodkin, L.B. (1953) The Size of Water Masses Containing Plankton Blooms. *Journal of Marine Research*, **12**, 141-147.
- [3] Pachepsky, E., Lutscher, F., Nisbet, R.M. and Lewis, M.A. (2005) Persistence, Spread and the Drift Paradox. *Theoretical Population Biology*, **67**, 61-73. <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2004.09.001>
- [4] Singh, A. and Nisbet, R.M. (2007) Semi-Discrete Host-Parasitoid Models. *Journal of Theoretical Biology*, **247**, 733-742. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2007.04.004>
- [5] Pachepsky, E., Nisbet, R.M. and Murdoch, W.W. (2008) Between Discrete and Continuous: Consumer-Resource Dynamics with Synchronized Reproduction. *Ecology*, **89**, 280-288. <https://doi.org/10.1890/07-0641.1>
- [6] Jin, W., Smith, H.L. and Thieme, H.R. (2016) Persistence and Critical Domain Size for Diffusing Populations with Two Sexes and Short Reproductive Season. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **28**, 689-705. <https://doi.org/10.1007/s10884-015-9434-1>
- [7] Jin, W. and Thieme, H.R. (2014) Persistence and Extinction of Diffusing Populations with Two Sexes and Short Reproductive Season. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **19**, 3209-3218.

-
- <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.3209>
- [8] Wu, R. and Zhao, X. (2019) Spatial Invasion of a Birth Pulse Population with Nonlocal Dispersal. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **79**, 1075-1097. <https://doi.org/10.1137/18m1209805>
 - [9] Bai, Z., Lou, Y. and Zhao, X. (2022) Spatial Dynamics of Species with Annually Synchronized Emergence of Adults. *Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article No. 78. <https://doi.org/10.1007/s00332-022-09836-3>
 - [10] Sun, Y. and Zhang, Y. (2025) Spatial Dynamics of a Hybrid ODE-PDE Model for Species with Annually Short Breeding Season. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **76**, Article No. 122. <https://doi.org/10.1007/s00033-025-02506-w>
 - [11] 孙岩妹, 张玉香. 季节性繁殖物种在年周期环境中的传播动力学[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 645-659.
 - [12] Zhao, X.Q. (2017) *Dynamical Systems in Population Biology*. 2nd Edition, Springer.
 - [13] Hess, P. (1991) *Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*. Longman Scientific & Technical.
 - [14] Smith, H.L. (1995) *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*. Mathematical Society.