

一道全国大学生数学竞赛决赛试题的多种解法

沈子芸, 郑佳龙*

国防科技大学外国语学院, 江苏 南京

收稿日期: 2026年7月21日; 录用日期: 2026年8月14日; 发布日期: 2026年8月27日

摘 要

本文以第七届全国大学生数学竞赛决赛(非数学类)第二大题为例, 从六个不同角度给出证明方法。这些方法包括偏导数链式法则法、隐函数定理法、参数方程法、几何直观法、向量分析法以及微分形式法。通过不同方法之间的比较分析, 揭示了它们虽路径迥异却思想同源的深层联系——均植根于多元微分学的链式法则与隐函数存在定理, 是同一数学本质在不同视角下的呈现。在此基础上, 本文进一步探讨了竞赛数学中一题多解对学生空间想象能力、逻辑推理能力和创新思维培养的教育价值。

关键词

全国大学生数学竞赛, 切平面, 一题多解, 隐函数定理, 链式法则

Multiple Solutions to a Final-Round Problem from the National College Students Mathematics Competition

Ziyun Shen, Jialong Zheng*

College of International Studies, National University of Defense Technology, Nanjing Jiangsu

Received: July 21, 2026; accepted: August 14, 2026; published: August 27, 2026

Abstract

This paper focuses on the second question (a typical problem concerning tangent planes) from the final round of the 7th National College Students Mathematics Competition (non-mathematics category) and presents proofs from six different perspectives. These approaches include the partial-derivative chain rule method, the implicit function theorem method, the parametric equation method, the

*通讯作者。

文章引用: 沈子芸, 郑佳龙. 一道全国大学生数学竞赛决赛试题的多种解法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(8): 370-378.
DOI: 10.12677/aam.2026.158360

geometric intuition method, the vector analysis method, and the differential forms method. Through a comparative analysis of these methods, the paper reveals their deep underlying connection: although they follow different routes, they are rooted in the same mathematical ideas, namely the chain rule in multivariable calculus and the existence theorem for implicit functions. In essence, they represent the same mathematical nature from different viewpoints. On this basis, the paper further discusses the educational value of multiple solutions to a single problem in competition mathematics, particularly in cultivating students' spatial imagination, logical reasoning ability, and innovative thinking.

Keywords

National College Students Mathematics Competition, Tangent Plane, Multiple Solutions to a Single Problem, Implicit Function Theorem, Chain Rule

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

全国大学生数学竞赛自 2009 年创办以来, 已成为国内规模最大、影响力最广的大学生数学学科竞赛之一。竞赛试题往往兼具基础性与综合性, 既考查学生对基本概念和基本方法的掌握程度, 又考验学生的数学思维能力和创新意识。在历届竞赛中, 解析几何与多元微分学的综合题经常出现, 这类题目通常需要学生将代数方法、几何直观与分析技巧有机结合。第七届全国大学生数学竞赛决赛(非数学类)第二大题是一道颇具代表性的题目。该题以空间解析几何为背景, 要求学生证明一个曲面的所有切平面共点。题目本身叙述简洁, 但蕴含的数学思想极为丰富——它涉及隐函数存在定理、多元复合函数求导、空间曲面的切平面方程、向量运算等多个核心知识点[1]。更值得注意的是, 这道题可以从纯代数、几何直观、向量分析、微分形式等多个角度切入, 每一种解法都对应着不同的数学思维方式。鉴于此, 本文以这道竞赛题研究对象, 从六个不同角度给出证明方法, 并对这些方法进行系统的比较分析, 旨在揭示一题多解在教学与思维培养中的深层价值。

2. 题目呈现

题目(第七届全国大学生数学竞赛决赛非数学类第二大题, 2016 年):

设函数 $f(u, v)$ 在全平面上有连续的偏导数, 曲面 S 由方程 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 确定。证明: 该曲面的所有切平面都交于点 (a, b, c) 。

初步分析: 本题的几何含义非常清晰, 只要证明曲面上任意一点处的切平面都经 (a, b, c) 过同一个定点 $P_0(a, b, c)$ 。从代数角度看, 只需证明在曲面上任意一点 (x_0, y_0, z_0) 处, 切平面方程代入定点 P_0 后恒成立。题目的结构特征值得注意: 方程中出现了 $\frac{x-a}{z-c}$ 和 $\frac{y-b}{z-c}$ 两个分式, 这强烈暗示了点 (a, b, c) 的特殊地位——它正是两个分式的“公共零点”处被除数为零的点(尽管 $z=c$ 时分式无意义)。这种结构提示我们, 曲面 S 可能是某个以 P_0 为中心的“锥面”或“投影曲面”。

下面从六个不同角度给出证明。

3. 多种解法

3.1. 解法一：偏导数链式法则法(标准解法)

这是竞赛参考解答通常采用的方法, 核心是利用隐函数求导公式计算切平面的法向量, 然后验证定点在切平面上。

证明: 设 $u = \frac{x-a}{z-c}$, $v = \frac{y-b}{z-c}$ 。曲面方程为 $f(u, v) = 0$ 。在曲面上任取一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 \neq c$), 令 $u_0 = \frac{x_0-a}{z_0-c}$, $v_0 = \frac{y_0-b}{z_0-c}$ 。

由隐函数存在定理, 在该点附近 z 可看作 x, y 的函数 $z = z(x, y)$ 。对 $f(u, v) = 0$ 关于 x 和 y 分别求偏导:

$$f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z_x + f_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot z_x = 0$$

$$\text{其中 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z-c}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x-a}{(z-c)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{y-b}{(z-c)^2}。$$

因此:

$$f_u \cdot \frac{1}{z-c} + \left[-f_u \cdot \frac{x-a}{(z-c)^2} - f_v \cdot \frac{y-b}{(z-c)^2} \right] z_x = 0$$

解得:

$$z_x = \frac{f_u(x-c)}{f_u(x-a) + f_v(y-b)}$$

同理:

$$z_y = \frac{f_v(z-c)}{f_u(x-a) + f_v(y-b)}$$

于是曲面在点 P 的切平面方程为:

$$z - z_0 = z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

即:

$$z - z_0 = \frac{f_u(z_0 - c)(x - x_0) + f_v(z_0 - c)(y - y_0)}{f_u(x_0 - a) + f_v(y_0 - b)}$$

将定点 (a, b, c) 代入上式左端得 $c - z_0 = -(z_0 - c)$, 右端分子为:

$$\frac{f_u(z_0 - c)(a - x_0) + f_v(z_0 - c)(b - y_0)}{f_u(x_0 - a) + f_v(y_0 - b)} = \frac{-(z_0 - c)[f_u(x_0 - a) + f_v(y_0 - b)]}{f_u(x_0 - a) + f_v(y_0 - b)} = -(z_0 - c)$$

左右相等, 故定点 (a, b, c) 在切平面上。由于 P 的任意性, 所有切平面都经过 (a, b, c) 。

注 1: 这是最直接的证明方法, 其核心在于将切平面方程显式写出, 然后验证定点满足该方程。该方法思路清晰、逻辑严密, 是竞赛考试中最稳妥的解题路径。其缺点是需要较多的代数运算, 且依赖于隐函数存在定理的条件 ($f_u(x_0 - a) + f_v(y_0 - b) \neq 0$) [2]。对于使该表达式为零的非正则点, 即满足 $f_u(u_0, v_0) = 0$ 或 $f_v(u_0, v_0) = 0$ 的情形, 上述隐函数求解过程失效。此时若 f_u 与 f_v 不全为零, 则可通过交

换自变量与因变量的角色(例如将 x, y 视为 z 的函数)重新应用隐函数定理, 得到相同形式的切平面方程, 最终代入定点恒等式的验证过程完全一致: 若 $f_u = f_v = 0$, 则梯度向量为零, 曲面在该点可能为非正则点。在竞赛题通常默认曲面为正则曲面(即梯度处处非零)的条件下, 该情形不予考虑。若不加正则假设, 则可通过取曲面上逼近该点的正则点列并取极限, 利用切平面的连续依赖性, 证明结论在极限意义下仍成立, 从而保证结论的完整性。

3.2. 解法二: 隐函数定理法(构造辅助函数法)

不显式求解 z_x, z_y , 而是直接利用隐函数定理的结论构造切平面方程。

证明: 令 $F(x, y, z) = f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)$ 。曲面 S 是 $F(x, y, z) = 0$ 的等值面。

F 在 P 点的梯度为:

$$\nabla F(P) = (F_x, F_y, F_z)$$

其中:

$$F_x = \frac{1}{z-c} f_u, F_y = \frac{1}{z-c} f_v$$

$$F_z = -\frac{x-a}{(z-c)^2} f_u - \frac{y-b}{(z-c)^2} f_v$$

曲面在 P 点的切平面方程为:

$$F_x(P)(x-x_0) + F_y(P)(y-y_0) + F_z(P)(z-z_0) = 0$$

即:

$$\frac{f_u}{z_0-c}(x-x_0) + \frac{f_v}{z_0-c}(y-y_0) - \frac{f_u(x_0-a) + f_v(y_0-b)}{(z_0-c)^2}(z-z_0) = 0$$

将 (a, b, c) 代入上式:

$$\begin{aligned} & \frac{f_u}{z_0-c}(a-x_0) + \frac{f_v}{z_0-c}(b-y_0) - \frac{f_u(x_0-a) + f_v(y_0-b)}{(z_0-c)^2}(c-z_0) \\ &= -\frac{f_u(x_0-a) + f_v(y_0-b)}{z_0-c} + \frac{f_u(x_0-a) + f_v(y_0-b)}{z_0-c} = 0 \end{aligned}$$

故 (a, b, c) 在切平面上。

注 2: 梯度法是空间曲面切平面方程的标准方法——切平面的法向量正是函数在该点的梯度向量。这一方法避免了显式求解 z_x, z_y , 计算更加简洁。其背后的几何直观是: 等值面的切平面与梯度方向垂直[3]。这种“从全局到局部”的思维方式, 体现了微分几何的基本思想。然而, 当梯度向量 $\nabla F(P_0) = 0$ 时, 切平面方程(46)退化为 $0=0$, 无法直接定义切平面。此时曲面在 P_0 处为奇点, 通常的切平面概念不再适用。在竞赛题的标准语境下, 曲面均假定为正则曲面, 即 ∇F 在曲面上处处非零, 因此该特殊情况被排除。若题目未明确正则性条件, 则需另行讨论: 可在该奇点附近用正则点序列逼近, 利用切平面的极限位置定义广义切平面, 并验证极限下仍过定点; 或通过代数几何中的奇异点处理方法加以补充。为保持证明的简洁性, 本文按常规竞赛约定, 默认曲面为正则曲面。

3.3. 解法三：参数方程法(几何构造法)

将表面上的点用参数表示, 直接构造从定点出发到表面上任意点的向量, 利用参数方程证明切平面包含该向量。证明: 固定点 $P_0(a, b, c)$ 。对于表面上任意一点 $P(x, y, z)(z \neq c)$, 令:

$$u = \frac{x-a}{z-c}, v = \frac{y-b}{z-c}$$

则 P 可以表示为:

$$P = P_0 + (z-c)(u, v, 1)$$

由曲面约束 $f(u, v) = 0$, 沿表面上任意可微参数曲线取微分, 有

$$f_u(u, v)du + f_v(u, v)dv = 0.$$

又由 $x = a + (z-c)u$, $y = b + (z-c)v$, 可得

$$dx = (z-c)du + u dz, \quad dy = (z-c)dv + v dz,$$

从而曲面在 P 点的任意切向量可写为

$$dP = (dx, dy, dz) = (z-c)(du, dv, 0) + dz(u, v, 1).$$

其中, 第一项对应沿平面曲线 $f(u, v) = 0$ 的切向变化, 第二项对应保持 u, v 不变而改变 z 的母线方向。特别地, 取 $du = dv = 0$ (显然满足 $f_u du + f_v dv = 0$), 则

$$dP = dz(u, v, 1) = \frac{dz}{z-c} \overrightarrow{P_0P}.$$

因此, $\overrightarrow{P_0P}$ 本身就是曲面在 P 点的一个切向量; 而一般的 dP 均属于由 $(z-c)(du, dv, 0)$ 与 $(u, v, 1)$ 张成的二维切空间, 所以 dP 与 $\overrightarrow{P_0P}$ 同处于切平面。故切平面包含直线 P_0P , 特别经过定点 P_0 。

注 3: 参数方程法从几何构造的角度揭示了问题的本质——曲面 S 实际上是由从定点 P_0 出发的所有射线与某个二维约束 ($f(u, v) = 0$) 的交点构成的。这种“锥面”结构天然具有“所有切平面过顶点”的性质。该方法虽然叙述较为抽象, 但一旦理解, 便能一眼看穿题目的几何本质。这正是从特殊到一般、从代数到几何的思维跃迁。

3.4. 解法四：齐次函数法(代数结构法)

将曲面方程改写为关于 $(x-a, y-b, z-c)$ 的齐次形式, 利用齐次函数的 Euler 定理证明。

证明: 令 $X = x-a, Y = y-b, Z = z-c$ 。则曲面方程为:

$$f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0$$

定义函数 $G(X, Y, Z) = f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ 。则 G 是 X, Y, Z 的零次齐次函数, 即对任意 $t \neq 0$:

$$G(tX, tY, tZ) = f\left(\frac{tX}{tZ}, \frac{tY}{tZ}\right) = f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = G(X, Y, Z)$$

由 Euler 关于齐次函数的定理: 若 G 是 k 次齐次函数, 则 $XG_X + YG_Y + ZG_Z = kG$ 。这里 $k = 0$, 故在表面上 ($G = 0$):

$$XG_X + YG_Y + ZG_Z = 0$$

即在表面上任意点 (X, Y, Z) 处, 向量 $(X, Y, Z) = \overrightarrow{P_0P}$ 与梯度 $\nabla G = (G_X, G_Y, G_Z)$ 垂直。但 ∇G 正是曲面

在 P 点的法向量, 因此 $\overrightarrow{P_0P}$ 与法向量垂直, 即 $\overrightarrow{P_0P}$ 在切平面内。由于 P 在切平面内且 $\overrightarrow{P_0P}$ 在切平面内, 定点 P_0 也在切平面内(因为 $P_0 = P - \overrightarrow{P_0P}$)。故所有切平面都经过 P_0 。

注 4: 这是最 elegant 的证明方法之一。它抓住了问题的代数本质——曲面方程是关于 $(x-a, y-b, z-c)$ 的零次齐次函数。齐次函数的几何意义是: 从原点(此处为 P_0)发出的每条射线与曲面的交点满足同一方程。这正是“锥面”的代数刻画。Euler 定理在此处的应用, 将几何命题的证明转化为一个简洁的代数恒等式, 体现了数学的统一性——同一个问题, 几何语言和代数语言只是同一枚硬币的两面。

3.5. 解法五: 向量分析法(几何直观法)

直接利用空间解析几何中切平面的几何意义, 从向量的角度给出证明。证明: 设 $P_0(a, b, c)$, 曲面上任一点 $P(x, y, z)$ 。令 $r = \overrightarrow{P_0P} = (x-a, y-b, z-c)$ 。曲面方程 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 意味着: r 的方向(即比值 $\frac{x-a}{z-c}$ 和 $\frac{y-b}{z-c}$)满足约束 $f(u, v) = 0$ 。

换句话说, 曲面 S 是由所有从 P_0 出发、方向落在某条平面曲线 $f(u, v) = 0$ 上的射线构成的。这是一个以 P_0 为顶点的锥面(广义锥面)。对于锥面, 有一个基本的几何事实: 锥面在任意母线点处的切平面必包含顶点与母线方向所确定的平面。更具体地说, 若锥面的顶点为 P_0 , 母线方向为 d , 则曲面上 P 点的切平面包含向量 $d = \overrightarrow{P_0P}$ 。

上述几何事实还可由方程直接验证。令 $F(x, y, z) = f(u, v)$, 其中 $u = (x-a)/(z-c)$, $v = (y-b)/(z-c)$ 。在 P 点(下式中的 f_u, f_v 均在 (u, v) 处取值), 有

$$\nabla F(P) = \left(\frac{f_u}{z-c}, \frac{f_v}{z-c}, -\frac{f_u(x-a) + f_v(y-b)}{(z-c)^2} \right).$$

于是

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \nabla F(P) = \frac{f_u(x-a) + f_v(y-b)}{z-c} - \frac{f_u(x-a) + f_v(y-b)}{z-c} = 0.$$

因此位矢 $\overrightarrow{P_0P}$ 与梯度向量 $\nabla F(P)$ 垂直。由于梯度是曲面在正则点 P 处的法向量, 故 $\overrightarrow{P_0P}$ 位于切平面内, 从而该切平面经过 P_0 。

因为沿母线方向移动时, 点 P 在曲面上沿直线运动, 这条直线(母线)在曲面上, 因此母线的方向向量 d 是曲面在 P 点的一个切向量。切平面包含所有切向量, 故 d 切平面内。既然 P 在切平面内且 d 在切平面内, 顶点 $P_0 = P - d$ 也在切平面内。因此, 所有切平面都包含从 P_0 到曲面上对应点的方向向量, 即都经过 P_0 。

注 5: 向量分析法将问题还原为最原始的几何直觉——“锥面”的定义本身就蕴含了“所有切平面过顶点”的性质。这种“回到定义”的思维方式, 在解决数学问题时往往能带来意想不到的见解。它提醒我们: 在面对复杂的代数表达式时, 不要忘记追问其背后的几何意义。这道题的本质不过是一个锥面的基本性质而已。

3.6. 解法六: 微分形式法(外微分法)

利用微分形式的不变性, 从外微分角度给出证明。此方法适合对微分几何有一定基础的学生。

证明: 令 $X = x-a, Y = y-b, Z = z-c$ 。曲面方程为 $f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0$ 。对 $f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ 求外微分:

$$df = f_u \cdot d\left(\frac{X}{Z}\right) + f_v \cdot d\left(\frac{Y}{Z}\right) = 0$$

而:

$$d\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2}, d\left(\frac{Y}{Z}\right) = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}$$

因此:

$$f_u(ZdX - XdZ) + f_v(ZdY - YdZ) = 0$$

整理得:

$$f_u dX + f_v dY - \frac{f_u X + f_v Y}{Z} dZ = 0$$

在 P 点, 切平面由满足上式的所有 dX, dY, dZ 构成。该切平面的法向量为:

$$n = \left(f_u, f_v, -\frac{f_u X + f_v Y}{Z} \right)$$

现在, 定点 P_0 对应的坐标为 $(0,0,0)$, 向量 $\overrightarrow{P_0P} = (X, Y, Z)$ 。计算:

$$n \cdot (X, Y, Z) = f_u X + f_v Y - \frac{f_u X + f_v Y}{Z} \cdot Z = 0$$

故 $\overrightarrow{P_0P}$ 与法向量 n 垂直, 即 $\overrightarrow{P_0P}$ 在切平面内, P_0 在切平面上。

注 6: 微分形式法体现了现代微分几何的语言——用外微分来处理切空间和法向量[4]。其核心思想是: 切平面正是由所有满足 $df = 0$ 的方向 dX, dY, dZ 构成的二维子空间。这种方法虽然对初学者有一定门槛, 但一旦掌握, 便能在更广泛的几何问题中(如流形上的切空间计算)游刃有余。

4. 六种解法的比较与思想层次

解法	核心工具	思维特征	计算复杂度	适用对象
链式法则法	隐函数求导	代数运算	中	竞赛应试
梯度法	梯度与切平面	向量分析	低	多元微积分学习者
参数方程法	几何构造	空间想象	低	偏好几何直观者
齐次函数法	Euler 定理	代数抽象	低	偏好代数结构者
向量分析法	锥面几何	几何直觉	极低	所有学习者
微分形式法	外微分	现代几何	中	微分几何进阶者

从思想层次来看, 这六种解法可以归纳为三个递进的层面: 第一层: 算法层(解法一、解法二)。链式法则法和梯度法提供了明确的操作步骤——求偏导、写切平面方程、验证定点代入。这类方法“按部就班”, 适合考试场景下的快速求解, 也是大多数学生最先想到的路径。第二层: 结构层(解法三、解法四)。参数方程法和齐次函数法不满足于“算出来”, 而是追问“为什么是这样的结构”。它们揭示了曲面的几何本质(锥面)和代数本质(齐次函数), 让学生从“会算”走向“懂结构”。第三层: 思想层(解法五、解法六)。向量分析法和微分形式法将问题提升到更一般的数学框架中。向量分析法“回到定义”, 用锥面的基本性质一句话说清问题; 微分形式法则展示了微分几何的统一语言。这两种方法代表了数学思维的最高境界——用最少的计算、最本质的概念解决问题。

5. 一题多解的教学意义

5.1. 培养多元思维, 突破“单一解法”的局限

在常规教学中, 学生面对“证明所有切平面过定点”这类问题时, 往往只学习链式法则这一种标准解法。一题多解的训练打破了这种思维定式——当学生发现同一道题可以从代数、几何、向量、微分形式等多个角度切入时, 他们开始意识到, 数学不是一堆孤立的知识点, 而是一个交融的网络。

5.2. 搭建知识与方法之间的桥梁

这道竞赛题串联了多元微分学中的多个核心概念: 隐函数存在定理、链式法则、梯度与等值面、齐次函数与 Euler 定理、锥面的几何性质、微分形式与外微分。每一种解法都像一扇窗户, 让学生从一个新的角度观察同一个数学对象。通过比较这些解法, 学生能够建立起知识点之间的深层联系, 形成完整的知识体系结构。

5.3. 培养“方法选择”的判断力

面对一道数学题, 选择什么方法往往比会不会算更重要。一题多解的训练正是培养这种元认知能力的有效途径。通过比较六种解法的优劣——链式法则法最稳妥但计算繁琐、向量分析法最简洁但需要几何直觉、微分形式法最深刻但门槛较高——学生学会根据自身知识储备和题目特点选择最优策略。

5.4. 激发探究精神与创新意识

正如有学者所指出的, 一题多解“有利于学生搭建完整的知识体系结构, 从多个角度体会解题方法和技巧, 提高学生的发散思维 and 创新能力”[5]。当学生发现同一道题可以有完全不同的求解路径时, 好奇心被激发, 探究欲望被点燃。这种从“被动接受标准答案”到“主动探索多种可能”的转变, 正是创新思维培养的起点。

6. 结语

本文以第七届全国大学生数学竞赛决赛第二大题为例, 从偏导数链式法则、隐函数梯度法、参数方程法、齐次函数法、向量分析法、微分形式法六个角度给出了证明方法。这些方法虽路径各异, 但思想同源——均植根于多元微分学的核心理论, 是同一数学本质(曲面 S 是以 P_0 为顶点的锥面)在不同视角下的呈现。这道竞赛题的独特价值在于: 它完美地诠释了数学中“代数与几何的统一”。一个看似复杂的代数表达式 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$, 其几何本质不过是一个简单的锥面。而一题多解的意义, 正在于帮助学生透过纷繁的代数形式, 看见统一的数学本质。在高等数学与竞赛数学的教学中, 教师应当有意识地选取具有代表性的试题作为一题多解的教学案例。正如波利亚所言: “掌握数学意味着善于解题”[6], 而“善于解题”不仅意味着能给出一种正确解法, 更意味着能从多个角度理解问题、比较不同方法的优劣、并从中提炼出具有普遍意义的数学思想。这正是数学教育的最终目标——从“学会解题”走向“学会思考”。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(下册)[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [2] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(下册)[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] Hass, J., Heil, C. and Weir, M.D. (2018) Thomas' Calculus. 14th Edition, Pearson.
- [4] Spivak, M. (1965) Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus. W. A.

Benjamin.

- [5] 张莉, 檀结庆, 唐烁, 殷明. 高等数学课堂教学与一题多解[J]. 大学数学, 2012, 28(6): 144-148.
- [6] Polya, G. (1945) How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.
<https://doi.org/10.1515/9781400828678>