

关于最小边解析控制集的贪婪近似算法

杨冰倩*, 康 娜#

河北地质大学数理教学部, 河北 石家庄

收稿日期: 2026年7月18日; 录用日期: 2026年8月11日; 发布日期: 2026年8月21日

摘 要

关于有限、简单无向图的最小解析控制集问题是NP-难的。本文提出的最小边解析控制集是最小解析控制集的一种新变形, 也是NP-难问题。对于此类问题, 我们给出了一种通过构造次模势函数解决这类问题的贪婪近似算法, 并证明了该算法的近似比为 $1 + 4\ln n - 3\ln 2$, 其中 n 表示图的顶点的个数。

关键词

控制集, 边解析控制集, 贪婪近似算法

On Greedy Approximation Algorithm for the Minimum Edge Resolving Dominating Set Problem

Bingqian Yang*, Na Kang#

School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: July 18, 2026; accepted: August 11, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

The problem of finding the minimum resolving dominating set in a finite, simple undirected graph is NP-hard. As a new variant of the minimum resolving dominating set, the minimum edge resolving dominating set introduced in this paper is also an NP-hard problem. We propose a greedy approximation algorithm for solving such problems by constructing a submodular potential function, and prove that the approximation ratio of this algorithm is $1 + 4\ln n - 3\ln 2$, where n is the number of vertices of the graph.

*第一作者。

#通讯作者。

Keywords

Dominating Set, Edge Resolving Dominating Set, Greedy Approximation Algorithm

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有限、简单无向图, 其中 V 是的点集, E 是 G 的边集. 设点 $v \in V$, 称 $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$ 为 v 的开邻域, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ 为 v 的闭邻域. 对于点 $u \in V$, 如果 $u \in N[v]$, 称 u 被 v 控制, 设 D 是 V 的一个非空子集, 如果对于任意一个点 $u \in V$, 都存在相应的点 $v \in D$ 使得 u 被 v 控制, 则称 D 为 G 的一个控制集. 一般来说, 确定图 G 的控制集问题是 NP-难的. 因此, 我们常常给出控制集问题的近似算法. 关于控制集问题的近似算法已有了大量的研究. 1991 年, Parekh [1] 给出了控制集问题的一个贪婪算法, 并得到算法的近似比为 $(n+1-\sqrt{2m+1})$, 这里 m 、 n 分别为图的边数和顶点数. 2002 年, Wan 等 [2] 提出了一种分布式近似算法, 并证明了该算法的近似比为 8. 2005 年, Kuhn 和 Mattenhofer [3] 利用线性规划得到了一种近似比为 $k(\Delta+1)^{2/k}$ 的近似算法, 其中 Δ 为图的最大度. 特别地, 2022 年, Mira 等 [4] 给出了包含贪婪和剪枝的二阶段近似算法, 并证明了当 $1 \leq \Delta \leq 4$ 时, 该算法的近似比为 $\frac{\Delta+1}{2}$. 2023 年, Casado 等 [5] 等提出了一种关于控制集问题的迭代贪婪近似算法, 进一步提高了求解精度与计算效率.

与控制集问题相关的另一个问题是图论中的解析集问题. 解析集的概念首先由 Slater [6] 在 1975 年提出. 对于上述的图 $G = \langle V, E \rangle$, u 、 v 为 V 中任意一对不同点, 对于点 $x \in V$, 如果 $d(x, u) \neq d(x, v)$, 则称点 x 解析点 u 、 v , 这里 $d(x, u)$ 表示 x 和 u 的距离. 设 D 是 V 的一个非空子集, 若对任意的 $u, v \in V$, 都存在 $x \in D$ 解析点 u 、 v , 则称集合 D 为图 G 的一个解析集. 2018 年, Kelenc 等 [7] 介绍了解析集的一种新的变形 - 边解析集. 设点 $x \in V$, 边 $e = xy \in E$, 称 $d(x, e) = \min\{d(x, y), d(x, w)\}$ 为点 x 到边 e 的距离. 对任意的不同边 $e_1, e_2 \in E$, 如果 $d(x, e_1) \neq d(x, e_2)$, 则称点解析边 e_1, e_2 . 设 D 是 V 的一个非空子集, 若对任意的 $e_1, e_2 \in E$, 都存在 $x \in D$ 解析边 e_1, e_2 , 则称集合 D 为图 G 的一个边解析集. 基于经典贪婪算法, Khuller 等 [8] 在 1996 年给出了关于度量维数(最小解析集的基数)问题的一个 $(2 \ln n + \Theta(1))$ -近似算法. 特别地, 关于一般图的边度量维数问题, Hauptmann 等 [9] 在 2012 年给出了一个 $(1 + \ln |V| + \ln(\log_2 |V|))$ -近似算法. 2019 年, Huang 等 [10] 给出了一种计算边度量维数的贪婪近似算法, 并证明该算法的近似比为 $1 + \ln n + \ln(\log_2 n)$.

2021 年, Monsanto 和 Rara [11] 首次提出了最小解析控制集的概念. 设图 $G = \langle V, E \rangle$, 最小解析控制集就是找到具有最小基数的子集 $D \subseteq V$, 使得 D 既是 G 的控制集又是 G 的解析集. 2024 年, Zhong [12] 给出了求解最小解析控制集问题的一种贪婪近似算法, 计算了该算法的近似比为 $1 + 2 \ln n$ 并且证明了最小解析控制集问题是 NP-难的. 受此启发, 本文研究了关于图 $G = \langle V, E \rangle$ 的最小边解析控制集问题, 最小边解析控制集就是找到具有最小基数的子集 $D \subseteq V$, 使得 D 既是 G 的控制集又是 G 的边解析集, 这类问题类似于最小解析控制集, 也是 NP-难的. 对于此类问题, 本文给出了一种通过构造次模势函数解决这类问题的贪婪近似算法, 并证明了该算法的近似比为 $1 + 4 \ln n - 3 \ln 2$, 其中 n 表示图的顶点的个数.

2. 预备知识

为了给出关于最小边解析控制集问题的近似算法, 本文首先介绍最小基数次模覆盖问题。设 U 是一个非空集合, U 的幂集记为 2^U 。假设一个势函数 $f: 2^U \rightarrow \mathbb{N}$ 满足以下条件:

- 1) 归一化: $f(\emptyset) = 0$;
- 2) 非递减性: 对任意的 $X \subseteq Y \subseteq U$, 有 $f(X) \leq f(Y)$;
- 3) 次模性质: 对任意的 $X \subseteq Y \subseteq U$, $x \in U \setminus Y$, 有

$$\Delta_x f(X) = f(X \cup \{x\}) - f(X) \geq \Delta_x f(Y)$$

则称 f 是一个多拟阵函数。

最小基数次模覆盖问题就是寻找一个非空子集 $D \subseteq V$ 使得 $f(D) = f(U)$, 且 D 的基数最小。下面, 介绍一种求解最小基数次模覆盖问题的贪婪算法(见表 1)。

Table 1. Algorithm 1: Greedy algorithm

表 1. 算法 1: 贪婪算法

算法 1 贪婪算法
1: $D \leftarrow \emptyset$;
2: 当存在 $u \in U \setminus D$ 使得 $\Delta_u f(D) > 0$ 时;
3: 选择 $u \in U \setminus D$ 使得 $\Delta_u f(D)$ 最大;
4: $D \leftarrow D \cup \{u\}$
5: 结束
6: 返回 D

设 $D = \{u_1, u_2, \dots, u_g\}$ 为算法 1 输出的一个解, 其中 g 为它的基数, $u_i (i=1, 2, \dots, g)$ 是在算法 1 的第 i 次迭代中选择加入的元素。然后, 有 $D_i = \{u_1, u_2, \dots, u_i\} (i=0, 1, \dots, g)$, 这里 $D_0 = \emptyset$ 。类似地, 设 $O = \{o_1, o_2, \dots, o_{opt}\}$ 为算法 1 输出的最优解, opt 为它的基数。然后, 有 $O_j = \{o_1, o_2, \dots, o_j\} (j=0, 1, \dots, opt)$, 这里 $O_0 = \emptyset$ 。在算法 1 的所有迭代中, 将最大势增量记为 γ :

$$\gamma = f(D_1) - f(D_0) = f(D_1) = \max_{u \in U} f(\{u\}),$$

最小势增量记为 β :

$$\beta = f(D_g) - f(D_{g-1}).$$

当势函数 $f(\cdot)$ 为整数或实数时, 算法 1 具有不同的近似比, 见下面的引理。

引理 1 [13] 假设 $f(\cdot)$ 是整数时, 算法 1 的近似比为 $H(\gamma)$, 其中 $H(\cdot)$ 是调和函数。

引理 2 [13]-[15] 假设 $f(\cdot)$ 是实数时, 则

- 1) 算法 1 是 $\alpha \left(1 + \ln \frac{\gamma}{\beta}\right)$ -近似算法。
- 2) 若 $f(U) \geq opt$ 且 $\beta \geq 1$, 则算法 1 为 $\alpha \left(1 + \ln \frac{f(U)}{opt}\right)$ -近似算法。
- 3) 算法 1 是 $\alpha \left(1 + \ln \frac{f(U)}{opt \times \beta}\right)$ -近似算法。

3. 主要结论

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有限简单无向图, 其中点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集 $E = \{e_{1,2}, e_{1,3}, \dots, e_{1,n}, e_{2,3}, e_{2,4}, \dots, e_{2,n}, e_{3,4}, \dots, e_{n-1,n}\}$, 共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边. 定义势函数 $f_1: 2^V \rightarrow \mathbb{N}$ 如下[12]:

$$f_1(D) = \left| \{v \mid v \in V - D, N(v) \cap D \neq \emptyset\} \right| + |D|, \text{ 这里 } D \subseteq V. \quad (1)$$

引理 3 [12] 上述势函数 $f_1(\cdot)$ 满足以下三个条件:

- 1) $f_1(\cdot)$ 是一个多拟阵函数;
- 2) $f_1(D) = f_1(V)$ 当且仅当 D 是最小控制集问题的可行解;
- 3) $f_1(D) < f_1(V)$ 当且仅当存在点 $u \in V - D$, 使得 $\Delta_u f_1(D) = f_1(D \cup \{u\}) - f_1(D) > 0$.

构造集合 $E' = \{(e_i, e_j) \mid e_i, e_j \in E, e_i \neq e_j, i < j\}$, 对于任意 $(e_i, e_j) \in E'$, 设

$$R(e_i, e_j) = \{v \mid v \in V, d(v, e_i) \neq d(v, e_j)\},$$

对于任意的点 $v \in V$, 设 $P(v) = \{(e_i, e_j) \mid e_i, e_j \in E, d(v, e_i) \neq d(v, e_j)\}$.

定义势函数 $f_2: 2^V \rightarrow \mathbb{N}$ 如下:

$$f_2(D) = \left| \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap D \neq \emptyset\} \right|, \text{ 这里 } D \subseteq V. \quad (2)$$

引理 4 上述势函数 $f_2(\cdot)$ 满足以下三个条件:

- 1) $f_2(\cdot)$ 是一个多拟阵函数;
- 2) $f_2(D) = f_2(V)$ 当且仅当 D 是最小边解析集问题的可行解;
- 3) $f_2(D) < f_2(V)$ 当且仅当存在点 $u \in V - D$, 使得 $\Delta_u f_2(D) = f_2(D \cup \{u\}) - f_2(D) > 0$.

证明

1) 由 $f_2(\cdot)$ 的定义易知, $f_2(\emptyset) = 0$ 设 $X \subseteq Y \subseteq V$, 对任意的 $(e_i, e_j) \in E'$, 可知 $R(e_i, e_j) \cap X \subseteq R(e_i, e_j) \cap Y$ 进而有 $f_2(X) \leq f_2(Y)$, 所以 $f_2(\cdot)$ 是非递减的. 为了证明 $f_2(\cdot)$ 具有次模性, 只需证明其满足边际收益递减定律[16]. 任取 $A, B \subseteq V$ 且 $A \subseteq B$, 对于 $x \in V \setminus B$ 由(2)可知

$$\begin{aligned} \Delta_x f_2(A) &= f_2(A \cup \{x\}) - f_2(A) \\ &= \left| \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap (A \cup \{x\}) \neq \emptyset\} \right| \\ &\quad - \left| \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap A \neq \emptyset\} \right| \\ &= \left| P(x) - \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap A \neq \emptyset\} \right| \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \Delta_x f_2(B) &= f_2(B \cup \{x\}) - f_2(B) \\ &= \left| \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap (B \cup \{x\}) \neq \emptyset\} \right| \\ &\quad - \left| \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap B \neq \emptyset\} \right| \\ &= \left| P(x) - \{(e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap B \neq \emptyset\} \right| \end{aligned}$$

对任意的 $(e_i, e_j) \in E'$, 因为

$$\left| R(e_i, e_j) \cap A \right| \leq \left| R(e_i, e_j) \cap B \right|, \text{ 所以, 对任意 } x \in V \setminus B, \text{ 有 } \Delta_x f_2(A) \geq \Delta_x f_2(B),$$

即 $f_2(\cdot)$ 满足边际收益递减定律。因此, $f_2(\cdot)$ 是一个多拟阵函数。

2) 注意到 $f_2(V) = \left| \left\{ (e_i, e_j) \mid (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap V \neq \emptyset \right\} \right|$ 。由 $f_2(\cdot)$ 的定义易知,

$$f_2(D) = f_2(V) = C_{n(n-1)/2}^2 = \frac{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}{8} \text{ 当且仅当对任意一个 } (e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap D \neq \emptyset, \text{ 而对任意}$$

一个 $(e_i, e_j) \in E', R(e_i, e_j) \cap D \neq \emptyset$, 当且仅当 D 是最小边解析集问题的一个可行解。因此 $f_2(D) = f_2(V)$ 当且仅当 D 是最小边解析集问题的一个可行解。

3) 若 $f_2(D) < f_2(V)$, 由 $f_2(\cdot)$ 的定义易知, $f_2(D) < f_2(V)$ 当且仅当存在 $(e_i, e_j) \in E'$ 使得 $R(e_i, e_j) \cap D \neq \emptyset$, 存在 $(e_i, e_j) \in E'$ 使得 $R(e_i, e_j) \cap D \neq \emptyset$, 当且仅当存在 $u \in V - D$, 使得 $\Delta_u f_2(D) > 0$ 。

由引理 4 可知最小边解析集问题等价于最小基数次模覆盖问题:

$$\min_{D \subseteq V} \{|D| : f_2(D) = f_2(V)\}.$$

下面, 定义势函数 $f: 2^V \rightarrow \mathbb{N}$ 如下:

$$f(D) = f_1(D) + f_2(D), \text{ 这里 } D \subseteq V.$$

定理 1 势函数 $f(\cdot)$ 满足以下三个条件:

- 1) $f(\cdot)$ 是一个多拟阵函数;
- 2) $f(D) = f(V)$ 当且仅当 D 是最小边解析控制集问题的可行解;
- 3) $f(D) < f(V)$ 当且仅当存在点 $u \in V - D$, 使得 $\Delta_u f(D) = f(D \cup \{u\}) - f(D) > 0$ 。

证明

1) 由引理 3 的 1) 和引理 4 的 1) 可知, $f(\emptyset) = f_1(\emptyset) + f_2(\emptyset) = 0$;

因为 $f_1(\cdot)$ 、 $f_2(\cdot)$ 均满足非递减性, 所以 $f(\cdot)$ 也满足非递减性。进一步, $f_1(\cdot)$ 、 $f_2(\cdot)$ 具有次模性使得 $f(\cdot)$ 具有次模性。事实上, 任取 $A, B \subseteq V$ 且 $A \subseteq B$, 对于 $x \in V \setminus B$, 有

$$\Delta_x f_1(A) \geq \Delta_x f_1(B), \quad \Delta_x f_2(A) \geq \Delta_x f_2(B).$$

又因为 $\Delta_x f(A) = \Delta_x f_1(A) + \Delta_x f_2(A)$, $\Delta_x f(B) = \Delta_x f_1(B) + \Delta_x f_2(B)$, 故

$$\Delta_x f(A) \geq \Delta_x f(B).$$

即 $f(\cdot)$ 满足边际收益递减, 因此, $f(\cdot)$ 具有次模性。

设 D 是最小边解析控制集问题的一个可行解, 由引理 3 的 2) 和引理 4 的 2) 可知, $f_1(D) = f_1(V)$, $f_2(D) = f_2(V)$, 故

$$f(D) = f_1(D) + f_2(D) = f_1(V) + f_2(V) = f(V).$$

设 $D \subseteq V$ 满足 $f(D) = f(V)$ 。下证 D 是最小边解析控制集问题的一个可行解。假设 D 不是最小边解析控制集问题的一个可行解, 由引理 3、引理 4 可知 $f_1(D) < f_1(V)$ 或 $f_2(D) < f_2(V)$ 。因此,

$f(D) = f_1(D) + f_2(D) < f_1(V) + f_2(V) = f(V)$, 与条件矛盾。因此, D 是最小边解析控制集问题的一个可行解。

3) 由 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 的定义可知, $f_1(D) \leq f_1(V)$ 且 $f_2(D) \leq f_2(V)$ 。由 $f(\cdot)$ 的定义可知, $f(D) < f(V)$, 即 $f_1(D) + f_2(D) < f_1(V) + f_2(V)$, 当且仅当 $f_1(D) < f_1(V)$ 或 $f_2(D) < f_2(V)$ 。由引理 3 的 3) 和引理 4 的 3) 可知, $f_1(D) < f_1(V)$ 或 $f_2(D) < f_2(V)$ 当且仅当存在点 $u \in V - D$ 使得 $\Delta_u f_1(D) > 0$ 或 $\Delta_u f_2(D) > 0$ 。又因为 $\Delta_u f_1(D) \geq 0$ 且 $\Delta_u f_2(D) \geq 0$, 所以 $\Delta_u f(D) = \Delta_u f_1(D) + \Delta_u f_2(D) > 0$ 当且仅当 $\Delta_u f_1(D) > 0$ 或 $\Delta_u f_2(D) > 0$ 。因此, $f(D) < f(V)$ 当且仅当存在点 $u \in V - D$, 使得 $\Delta_u f(D) = f(D \cup \{u\}) - f(D) > 0$ 。

由定理 1 可知最小边解析控制集问题等价于最小基数次模覆盖问题:

$$\min_{D \subseteq V} \{|D| : f(D) = f(V)\}.$$

因此, 可以进一步利用算法 1 对其求解。注意到 $f_1(V) = n$, $f_2(V) = \frac{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}{8}$ 。所以

$$\begin{aligned} \max_{v \in V'} f(\{v\}) &\leq \max_{v \in V'} f_1(\{v\}) + \max_{v \in V'} f_2(\{v\}) \\ &\leq n + \frac{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}{8} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - n^2 + 10n}{8} \\ &= \frac{n^4 - n(n-2)(2n+5)}{8} \\ &\leq \frac{1}{8}n^4 \quad (n > 2) \end{aligned}$$

由引理 2 的 1) 可知, 求解以(3)式中的 $f(\cdot)$ 为次模势函数的最小基数次模覆盖问题的算法 1 是一种求解最小边解析控制集的 $1 + 4 \ln n - 3 \ln 2$ -近似算法。

4. 结束语

本文聚焦最小边解析控制集问题展开研究, 这是图论上的新兴组合优化问题。通过构造次模势函数, 提出一种近似比为 $1 + 4 \ln n - 3 \ln 2$ (其中 n 为输入图的节点数) 贪婪近似算法。在未来工作中, 我们将继续以前人的研究为基础, 对最小边解析控制集的维度问题设计更多近似算法, 此类算法不仅能保持 $O(\ln n)$ 量级的近似比, 还可以优化求解结果。

基金项目

河北省高等教育教学改革研究与实践项目(2025GJJG289), 河北省研究生创新能力培养资助项目(CXZZSS2026132), 河北地质大学博士科研启动基金资助项目(BQ2015516)。

参考文献

- [1] Parekh, A.K. (1991) Analysis of a Greedy Heuristic for Finding Small Dominating Sets in Graphs. *Information Processing Letters*, **39**, 237-240. [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(91\)90021-9](https://doi.org/10.1016/0020-0190(91)90021-9)
- [2] Wan, P.J., Alzoubi, K.M. and Frieder, O. (2002) Distributed Construction of Connected Dominating Set in Wireless Ad Hoc Networks. *Proceedings of the 21st Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, New York, 23-27 June 2002, 1597-1604. <https://doi.org/10.1109/infcom.2002.1019411>
- [3] Kuhn, F. and Wattenhofer, R. (2005) Constant-Time Distributed Dominating Set Approximation. *Distributed Computing*, **17**, 303-310. <https://doi.org/10.1007/s00446-004-0112-5>
- [4] Mira, F.Á.H., Inza, E.P., Almira, J.M.S. and Vakhania, N. (2022) A Polynomial-Time Approximation to a Minimum Dominating Set in a Graph. *Theoretical Computer Science*, **930**, 142-156. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.07.020>
- [5] Casado, A., Bermudo, S., López-Sánchez, A.D. and Sánchez-Oro, J. (2023) An Iterated Greedy Algorithm for Finding the Minimum Dominating Set in Graphs. *Mathematics and Computers in Simulation*, **207**, 41-58. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.12.018>
- [6] Slater, P.J. (1975) Leaves of Trees. *Proceeding of the 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, Florida, 17-20 February 1975, 549-559.
- [7] Kelenc, A., Tratnik, N. and Yero, I.G. (2018) Uniquely Identifying the Edges of a Graph: The Edge Metric Dimension. *Discrete Applied Mathematics*, **251**, 204-220. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.05.052>
- [8] Khuller, S., Raghavachari, B. and Rosenfeld, A. (1996) Landmarks in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **70**, 217-

229. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(95\)00106-2](https://doi.org/10.1016/0166-218x(95)00106-2)
- [9] Hauptmann, M., Schmied, R. and Viehmann, C. (2012) Approximation Complexity of Metric Dimension Problem. *Journal of Discrete Algorithms*, **14**, 214-222. <https://doi.org/10.1016/j.jda.2011.12.010>
- [10] Huang, Y., Hou, B., Liu, W., Wu, L., Rainwater, S. and Gao, S. (2019) On Approximation Algorithm for the Edge Metric Dimension Problem. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 142-148. https://doi.org/10.1007/978-3-030-27195-4_13
- [11] Monsanto, G.B. and Rara, H.M. (2021) Resolving Restrained Domination in Graphs. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **14**, 829-841. <https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v14i3.3985>
- [12] Zhong, H. (2024) On Greedy Approximation Algorithm for the Minimum Resolving Dominating Set Problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, **48**, Article No. 35. <https://doi.org/10.1007/s10878-024-01229-4>
- [13] Wolsey, L.A. (1982) An Analysis of the Greedy Algorithm for the Submodular Set Covering Problem. *Combinatorica*, **2**, 385-393. <https://doi.org/10.1007/bf02579435>
- [14] Wan, P.J., Du, D.Z., Pardalos, P., et al. (2010) Greedy Approximations for Minimum Submodular Cover with Submodular Cost. *Computational Optimization and Applications*, **45**, 463-474. <https://doi.org/10.1007/s10589-009-9269-y>
- [15] Chen, W., Zhong, H., Wu, L. and Du, D. (2022) A General Greedy Approximation Algorithm for Finding Minimum Positive Influence Dominating Sets in Social Networks. *Journal of Combinatorial Optimization*, **44**, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10878-021-00812-3>
- [16] Lovász, L. (1983) Submodular Functions and Convexity. In: *Mathematical Programming: The State of the Art*, Springer, 235-257. https://doi.org/10.1007/978-3-642-68874-4_10