

二面体群与循环群的幂映射的有向图

王博慧, 丁立*, 赵金星

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2026年7月20日; 录用日期: 2026年8月13日; 发布日期: 2026年8月26日

摘要

利用 $f(x) = x^k$ 定义幂映射 $f: G \rightarrow G$ ($G = D_{2n} \rtimes C_m$), 其中 $x \in G$, k 是自然数。若把 G 作为顶点集, v 和 u 有边连接当且仅当 $u = v^k$, 则上面定义的映射构成幂映射图。本文研究了二面体群与循环群半直积上的幂映射图的结构与性质, 包括圈顶点的存在性, 以及圈数、圈长度和顶点入度等。

关键词

二面体群, 有向图, 高度, 圈顶点, 不动点

Digraph from Power Mapping on Dihedral Groups and Cyclic Groups

Bohui Wang, Li Ding*, Jinxing Zhao

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: July 20, 2026; accepted: August 13, 2026; published: August 26, 2026

Abstract

Define the power mapping $f: G \rightarrow G$ ($G = D_{2n} \rtimes C_m$) by $f(x) = x^k$, for $x \in G$, and k is a positive integer. The k -power digraph consists of vertex set G and there is a directed edge from v to u if and only if $u = v^k$. This paper studies the structure and properties of the power mapping graph on the semidirect product of a dihedral group and a cyclic group, including the existence of cyclic vertices, as well as the number of cycles, cycle lengths, and in-degrees of vertices.

*通讯作者。

Keywords

Dihedral Groups, Digraph, Heights, Cyclic Vertices, Fixed Point

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

将图与群关联的思想最初由 Bryant [1] 提出, 通过构造了幂图, Bryant 对阶数不超过 $10,932^2$ 的交换群进行分类。这类有向图不仅衍生出众多著名的图类, 而且将图论、群论与数论联系了起来, 为利用图的性质研究代数结构打开了新视角。

函数有向图是本文的核心研究对象。设 X 为非空有限集合, $f: X \rightarrow X$ 为一个映射。函数有向图 $G(X, f)$ 是以 X 为顶点集的有向图, 当且仅当 $f(x) = y$ 时, 存在一条从 x 到 y 的有向边。我们也称 $G(X, f)$ 是由映射 f 定义的有向图。这类图与有限离散动力系统相关, 这类系统广泛应用于工程、控制系统、计算机科学与遗传网络等领域, 相关研究可参考文献[2] [3]。离散动力系统的一类重要例子由映射 $f: F_{q^n} \rightarrow F_{q^n}$ 定义, 其中 F_{q^n} 是有限域 F_q 上的向量空间, f 为线性或仿射变换, 相关内容见文献[4] [5]。这类有向图的结构可由对应矩阵的初等因子刻画, 参见文献[5] [6]。Lucheta 等人[7]、Wilson [8]、Somer 和 Křížek [9]-[12]、Ahmad 和 Husnine [13]-[15] 研究了定义在 $\mathbb{Z}_n$ 上与函数 $f(x) \equiv x^k \pmod{n}$ 相关的有向图。此类有向图被称为幂有向图, 记作 $G(H, k)$ 。事实上, 有限交换环上的幂有向图可划分为两部分: 一部分是由单位集合诱导的子有向图, 另一部分是由零因子集合诱导的子有向图。有限交换群上的幂有向图具有诸多优良性质, 它们是半正则的(即存在正整数 d , 使得每个顶点的入度为 0 或 d), 且同一圈上圈顶点所附着的树两两同构。

本文在现有研究的基础上, 进一步分析一类非交换群上的幂有向图结构。第 2 节介绍函数有向图的记号与基本性质, 并回顾有限交换群上同态诱导的函数有向图的已有结果; 第 3 节深入研究二面体群 N 和循环群 H 的半直积上的幂有向图结构, 其中 N 为二面体群, H 是 $\text{Aut}(N)$ 的子群, 具体刻画其入度分布与圈长结构。第 4 节深入研究该幂有向图的不动点、孤立点、悬挂点、连通分支与高度。

2. 预备知识与符号说明

一个有向图的连通分支, 是其对应的无向图的一个极大连通子图。设 $G(X, f)$ 为函数有向图, 顶点 a 的入度记为 $\text{indeg}_X^f(a)$, 定义为指向 a 的有向边的条数; 顶点 a 的出度记为 $\text{outdeg}_X^f(a)$, 定义为从 a 出发的有向边的条数。

定义 2.1 设 $\gamma_G(n, k)$ 为任意有限群 G 上的幂有向图, 则图中每个顶点 x 都恰有一条指向 x^k 的出边。显然, 任意函数有向图中每个顶点的出度均为 1, 而顶点 a 的入度等于所有映射到 a 的顶点个数。

引理 2.2 [16] 设 $G \cong C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_s}$ 是一个阶数为 n 的阿贝尔群, 其中 C_{n_i} 是阶数为 n_i 的循环群。 $\gamma_G(n, k)$ 中任意顶点 a 的入度是 0 或

$$N(n, k, a) = \text{indeg}_n(a) = \prod_{i=1}^s \gcd(n_i, k).$$

引理 2.3 [16] 设 G 是 n 阶阿贝尔群。 $\gamma_G(n, k)$ 的顶点 a 是一个圈顶点当且仅当 $\text{ord}(a) \mid \lambda$, 其中 $\text{ord}(a)$

是 a 的阶, λ 是 $\text{Exp}(G)$ 中与 k 互素的最大因子。对于所有 $a \in G$, $\text{Exp}(G)$ 表示使得 $a^i = 1$ 成立的最小正整数 i 。进一步, 圈的长度 t 由下式给出

$$t = \text{ord}_c k,$$

其中 c 是 λ 的因子, $\text{ord}_c k$ 表示 k 模 c 的乘法阶。

推论 2.4 [16] 设 $G \cong C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_s}$ 是一个阶数为 n 的阿贝尔群, 其中 C_{n_i} 是阶数为 n_i 的循环群。 $\gamma_G(n, k)$ 中圈顶点的个数为 $\prod_{i=1}^s \lambda_i$, 其中 λ_i 是 n_i 中与 k 互素的最高因子。

引理 2.5 [16] 设 $G \cong C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_s}$ 是一个阶数为 n 的阿贝尔群, 其中 C_{n_i} 是阶数为 n_i 的循环群。长度为 t 的圈数 $A_t(\gamma_G(n, k))$ 为

$$A_t(\gamma_G(n, k)) = \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) \left[\prod_{i=1}^s \gcd(k^{t/d} - 1, n_i) \right] \right\},$$

其中 μ 是莫比乌斯函数。

引理 2.6 [16] 对于循环群 C_n 的幂有向图 $\gamma_{C_n}(n, k)$ (映射 $x \mapsto x^k$), 其高度(即所有顶点到其所在圈的最短路径的最大值)由以下公式给出:

$$\text{height}(\gamma_{C_n}(n, k)) = \max_{p|\gcd(n, k)} \frac{v_p(n)}{v_p(k)}$$

其中:

- p 取遍 $\gcd(n, k)$ 的所有素因子;
- $v_p(m)$ 表示 m 中素因子 p 的指数(即 $p^{v_p(m)} \mid m$ 但 $p^{v_p(m)+1} \nmid m$);
- 若 $\gcd(n, k) = 1$, 则规定高度为 0 (此时所有顶点都是圈顶点, 无入树结构)。

若存在正整数 k 使得 $f^k(x) = x$, 则称 $G(X, f)$ 中的顶点 x 为一个循环顶点。特别地, 若 $f(x) = x$, 则称 x 为 $G(X, f)$ 的一个不动点。记 O_l 为长度为 l 的圈。所有与 G 的全体元素可交换的元素的集合称为 G 的中心, 记为 $Z(G)$ 。

我们设 D_{2n} 是阶数为 $2n$ 且 $n \geq 3$, 有单位元 1。 D_{2n} 的群表示定义如下 $D_{2n} = \langle a, b : a^n = 1 = b^2, ba = a^{-1}b \rangle$, 其中元素可表示为 $a^i b^j$, i 与 j 均为正整数且 $0 \leq i \leq n-1$; $0 \leq j \leq 1$ 考虑二面体群 D_{2n} 的如下两个子集:

$$A = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \quad (2.1)$$

$$B = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\} \quad (2.2)$$

易知 A 是 D_{2n} 的一个 n 阶正规循环子群, 并且 $D_{2n} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ 。我们设 A 类点为(2.1)提到的 $A \rtimes H$, 设 B 类点为(2.2)提到的 $B \rtimes H$ 。

我们在此给出本文主要研究的半直积群的完整定义: $G = D_{2n} \rtimes_{\phi} C_m$, 其中 D_{2n} 是阶数为 $2n$ 且 $n \geq 3$ 的二面体群, $C_m = \langle g : g^m = 1 \rangle$ 。可以由以下生成元和关系唯一确定:

$$G = \langle a, b, g \mid a^n = 1, b^2 = 1, g^m = 1, bab^{-1} = a^{-1}, gag^{-1} = a, gbg^{-1} = g^2b \rangle$$

3. 入度方程与圈结构

我们主要研究在半直积群 $N \rtimes_{\phi} H$ 的幂有向图的结构, 其中 N 是二面体群, H 是 $\text{Aut}(N)$ 的子群。对于二面体群 D_{2n} , n 为奇数时, $Z(D_{2n}) = \{1\}$; n 为偶数时, $Z(D_{2n}) = \left\{1, a^{\frac{n}{2}}\right\}$ 。根据同态基本定理, 我们有 $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$ 。所以可知在 n 为奇数时, $\text{Inn}(D_{2n}) = D_{2n}$, 有 $H \cong C_n$, 且 $C_n = \langle g : g^n = 1 \rangle$; n 为

偶数时, $\text{Inn}(D_{2n}) = D_n$, 有 $H \cong C_{\frac{n}{2}}$, 且 $C_{\frac{n}{2}} = \left\langle g : g^{\frac{n}{2}} = 1 \right\rangle$ 。因为

$$\phi_g : G \rightarrow G, \phi_g(x) = gxg^{-1}$$

所以, n 为奇数时有 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_{2n} \rtimes C_n$,

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 y_1 x_2 (y_1)^{-1}, y_1 y_2)$$

n 为偶数时有 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}$,

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 y_1 x_2 (y_1)^{-1}, y_1 y_2)$$

首先我们计算在 $G(D_{2n} \rtimes C_m, k)$ 上点的入度。在计算入度之前我们给出入度方程, k 为偶数时, 对于 A 类点 (x, y) , 即 $j=0$, $x=a^i$, $y=g^p$, 此时 x 与 y 均属于循环群, 在共轭作用下, $A \rtimes C_m \cong C_n \times C_m$, 所以 $(x, y)^k = (u, v)$, 此时

$$\begin{cases} x^k \equiv u \pmod{n}, \\ y^k \equiv v \pmod{m}, \end{cases}$$

对于 B 类点 (x, y) , 即 $j=1$, $x=a^i b$, $y=g^p$, 我们分情况讨论: 当 k 为偶数时, 以 $(x, y)^k = (u, v)$, 此时

$$\begin{cases} y^{-k} \equiv u \pmod{m}, \\ y^k \equiv v \pmod{m}. \end{cases}$$

当 k 为奇数时, 以 $(x, y)^k = (u, v)$, 此时

$$\begin{cases} xy^{1-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y^k \equiv v \pmod{m}, \end{cases}$$

不难发现 A 类点始终指向 A 类点, k 为偶数时, B 类点均指向 A 类点, k 为奇数时, B 类点均指向 B 类点。接下来我们开始研究入度。

引理 3.1 n 为奇数时, 在 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$ 上 B 类点 α 点且 $\alpha = (u, v)$ 的入度为

$$\text{indeg}((u, v)) = \begin{cases} 0 & k \text{ 是偶数,} \\ 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n) & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

n 为奇数时, 在 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$ 上 A 类点 α 点且 $\alpha = (u, v)$ 的入度为

$$\text{indeg}((u, v)) = \begin{cases} 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n)^2, & i+p \not\equiv 0 \pmod{n} \text{ 且 } k \text{ 是偶数,} \\ 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n)^2 + n \gcd(k, n), & i+p \equiv 0 \pmod{n} \text{ 且 } k \text{ 是偶数} \\ 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n)^2. & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, 我们知道没有点指向 B 类点, 所以对于 B 类点 (u, v) , $\text{indeg}((u, v)) = 0$, 其中 $u = a^i b$, $v = g^p$ 。对于 A 类点 (u, v) , 即 $u = a^i, v = g^p$ 有 A 类点由 B 类点指向。我们分别来看, 对于 $(x_1, y_1) \in A \rtimes C_n$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1^k \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{n}, \end{cases}$$

则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n)^2$ 。对于 $(x_2, y_2) \in B \rtimes C_n$, $(x_2, y_2)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} y_2^{-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y_2^k \equiv v \pmod{n}, \end{cases}$$

对于每个 v 有 0 或 $\gcd(k, n)$ 个 y_2 与之对应, 对于每个固定的 y_2 , 有 n 个 x_2 与之对应, 则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n)^2 + n \gcd(k, n)$ 。综上, 对于 A 类点 (u, v) ,

$$\text{indeg}((u, v)) = \begin{cases} 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n)^2, & i + p \not\equiv 0 \pmod{n}, \\ 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n)^2 + n \gcd(k, n), & i + p \equiv 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

k 为奇数时, A 类点与 B 类点无邻边。对于 B 类点 (u, v) , 有 $(x_1, y_1), (u, v) \in B \rtimes C_n$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1 y_1^{1-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

对于每一个 v , 总有 0 或 $\gcd(k, n)$ 个 y_1 与之对应, 对于每一个固定的 y_1 , 都有一个固定的 x_1 与之对应, 则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n)$ 。对于 A 类点 (u, v) , 有 $(x_2, y_2), (u, v) \in A \rtimes C_n$, $(x_2, y_2)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_2^k \equiv u \pmod{n}, \\ y_2^k \equiv v \pmod{n}, \end{cases}$$

则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n)^2$ 。

推论 3.2 n 为偶数时, 在 $G\left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k\right)$ 上 B 类点 α 点且 $\alpha = (u, v)$ 的入度是

$$\text{indeg}((u, v)) = \begin{cases} 0, & k \text{ 是偶数}, \\ 0 \text{ 或者 } \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right), & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

n 为奇数时, 在 $G\left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k\right)$ 上 A 类点 α 点且 $\alpha = (u, v)$ 的入度为

$$\text{indeg}((u, v)) = \begin{cases} 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right), & i + 2p \not\equiv 0 \pmod{n} \text{ 且 } k \text{ 是偶数}, \\ 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right) + n \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right), & i + 2p \equiv 0 \pmod{n} \text{ 且 } k \text{ 是偶数} \\ 0 \text{ 或者 } \gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right). & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, 我们知道没有点指向 B 类点, 所以对于 B 类点 (u, v) , $\text{indeg}((u, v)) = 0$, 其中 $u = a^i b$, $v = g^p$ 。对于 A 类点 (u, v) , 即 $u = a^i, v = g^p$ 有 A 类点由 B 类点指向。我们分别来看, 对于 $(x_1, y_1) \in A \rtimes C_{\frac{n}{2}}$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1^k \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)$ 。对于 $(x_2, y_2) \in B \rtimes C_{\frac{n}{2}}$, $(x_2, y_2)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} y_2^{-k} \equiv u \pmod{n} \\ y_2^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

对于每个 v 有 0 或 $\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)$ 个 y_2 与之对应, 对于每个固定的 y_2 , 有 n 个 x_2 与之对应, 则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right) + n \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)$ 。综上, 对于 A 类点 (u, v) ,

$$\begin{cases} 0 \text{ or } \gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right), & i + 2p \not\equiv 0 \pmod{n}, \\ 0 \text{ or } \gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right) + n \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right), & i + 2p \equiv 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

k 为奇数时, A 类点与 B 类点无邻边。对于 B 类点 (u, v) 有 $(x_1, y_1), (u, v) \in B \rtimes C_{\frac{n}{2}}$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$

有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1 y_1^{1-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

对于每一个 v , 总有 0 或 $\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)$ 个 y_1 与之对应, 对于每一个固定的 y_1 , 都有一个固定的 x_1 与之对应, 则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)$ 对于 A 类点 (u, v) 有 $(x_2, y_2), (u, v) \in A \rtimes C_{\frac{n}{2}}$, $(x_2, y_2)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_2^k \equiv u \pmod{n}, \\ y_2^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

则 $\text{indeg}((u, v)) = 0$ 或者 $\gcd(k, n) \cdot \gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)$ 。

接下来, 我们研究圈的相关结构, 即圈顶点数、圈长以及圈数。我们发现对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_m, k)$, 在 k 为偶数时, B 类点入度均为零, 又因为在幂有向图中任意顶点出度均为 1, 所以 B 类点均为悬挂点、非圈顶点, 此时, 幂有向图的圈顶点均是 A 类点中的圈顶点。在 k 为奇数时, A 类点均指向 A 类点, B 类点均指向 B 类点, 所以对于幂有向图中任意一个圈, 要么均是 A 类点, 要么均是 B 类点。我们不妨设 $N_c(G(D_{2n} \rtimes C_m, k)) = N_c(A) + N_c(B)$ 。对于 A 类点中的圈顶点个数, 记为 $N_c(A)$, 对于 B 类点中的圈顶点个数, 记为 $N_c(B)$ 。

引理 3.3 n 为奇数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, 圈顶点个数

$$N_c(G(D_{2n} \rtimes C_n, k)) = \begin{cases} \lambda^2, & k \text{ 是偶数} \\ \lambda^2 + n\lambda, & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

其中 λ 为 n 中与 k 互素的最大因子。

证明 k 为偶数时, 因为 $N_c(B) = 0$, 所以 $N_c(G(D_{2n} \rtimes C_m, k)) = N_c(A)$ 。在共轭作用下,

$A \rtimes C_n \cong C_n \times C_n$, $N_c(A) = N_c(G(C_n \times C_n, k)) = \lambda^2$ 。

k 为奇数时, 对于 A 类点 $N_c(A) = N_c(G(C_n \times C_n, k)) = \lambda^2$ 保持不变。

对于 B 类点 (u, v) , 即 $u = a^i b$, $v = g^p$, 若 (u, v) 为圈顶点, $(u, v)^{k^t} = (uv^{1-k^t}, v^{k^t}) = (u, v)$, 对于 $t \geq 1$, 则有

$$\begin{cases} uv^{1-k^t} \equiv u \pmod{n} \\ v^{k^t} \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

对于关于 v 的式子, $v^{k^t} \equiv v \pmod{n} \Leftrightarrow v^{k^t-1} \equiv 1 \pmod{n}$, 则有 $\gcd(k^t-1, n)$ 个 v 满足条件, 即对于阶数满足 $\text{ord}(v) | \lambda$, 其中 λ 为 n 中与 k 互素的最大因子, 可知有 λ 个 v 满足式子。对于关于 u 的式子, 固定一个 v , 有 n 个 u 满足式子。所以在 B 类点中有 $n\lambda$ 个圈顶点。

推论 3.4 n 为偶数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k)$, 圈顶点个数

$$N_c\left(G\left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k\right)\right) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2, & k \text{ 是偶数,} \\ \lambda_1 \lambda_2 + n \lambda_2, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

其中 λ_1 为 n 中与 k 互素的最大因子, λ_2 为 $\frac{n}{2}$ 中与 k 互素的最大因子。

证明 k 为偶数时, 因为 $N_c(B) = 0$, 所以 $N_c(G(D_{2n} \rtimes C_m, k)) = N_c(A)$ 。在共轭作用下,

$$A \rtimes C_{\frac{n}{2}} \cong C_n \times C_{\frac{n}{2}}, \quad N_c(A) = N_c\left(G\left(C_n \times C_{\frac{n}{2}}, k\right)\right) = \lambda_1 \lambda_2。$$

k 为奇数时, 对于 A 类点 $N_c(A) = N_c\left(G\left(C_n \times C_{\frac{n}{2}}, k\right)\right) = \lambda_1 \lambda_2$ 保持不变。对于 B 类点 (u, v) , 即 $u = a^i b$, $v = g^p$, 若 (u, v) 为圈顶点, $(u, v)^{k^t} = (uv^{1-k^t}, v^{k^t}) = (u, v)$, 对于 $t \geq 1$, 则有

$$\begin{cases} uv^{1-k^t} \equiv u \pmod{n}, \\ v^{k^t} \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

对于关于 v 的式子, $v^{k^t} \equiv v \pmod{n} \Leftrightarrow v^{k^t-1} \equiv 1 \pmod{n}$, 则有 $\gcd(k^t-1, \frac{n}{2})$ 个 v 满足条件, 即对于阶数满足 $\text{ord}(v) | \lambda_2$, 其中 λ_2 为 $\frac{n}{2}$ 中与 k 互素的最大因子, 可知有 λ_2 个 v 满足式子。对于关于 u 的式子, 固定一个 v , 有 n 个 u 满足式子。所以在 B 类点中有 $n\lambda_2$ 个圈顶点。

接下来, 研究幂有向图的圈长与圈数。

引理 3.5 n 为奇数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, 圈的长度 t 被如下给出:

$$t = \begin{cases} \text{ord}_{c_1} k, & k \text{ 是偶数,} \\ \text{ord}_{c_1} k + \text{ord}_{c_2} k, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

其中 c_1 是其中 A 类点 (u, v) 的阶数且 $\text{ord}_{c_1} k$ 表示 k 模 c_1 的乘法阶, 其中 c_2 是其中 B 类点 (u, v) 中 v 的阶数且 $\text{ord}_{c_2} k$ 表示 k 模 c_2 的乘法阶。长度为 t 的圈的数量为

$$A_t(G(D_{2n} \rtimes C_n, k))$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)]^2 \right\}, & k \text{ 是偶数} \\ \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)]^2 \right\} + \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)] \cdot n \right\}, & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

证明 我们知道, 当 k 为偶数时, B 类点均为悬挂点, 故只考虑 A 类点中圈顶点在圈长为 t 的情况, 在共轭作用下, $A \rtimes C_n \cong C_n \times C_n$, 由引理 2.3, 可知对于圈的长度 t , $t = \text{ord}_{c_1} k$, 其中 c_1 是其中 A 类点 (u, v) 的阶数且 $\text{ord}_{c_1} k$ 表示 k 模 c_1 的乘法阶, 且由引理 2.5, 圈长为 t 的圈数为

$$A_t(G(D_{2n} \rtimes C_n, k)) = \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)]^2 \right\}$$

k 为奇数时, A 类点与 B 类点无邻边。所以 A 类点中圈的长度 t 和圈长为 t 的圈数与上述情况一致。故下面只研究 B 类点, 对于 B 类点 (u, v) , 若 (u, v) 是圈顶点 $\Leftrightarrow \text{ord}(v) | \lambda$, 其中 λ 为 n 中与 k 互素的最大因子, 由引理 2.3, 可知对于 B 类点中圈的长度 t , $t = \text{ord}_{c_2} k$, 其中 c_2 是其中 A 类点 (u, v) 中 v 的阶数且 $\text{ord}_{c_2} k$ 表示 k 模 c_2 的乘法阶。且由引理 2.5, B 类点中圈长为 t 的圈数为

$$A_t(G(B \rtimes C_n, k)) = \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)] \cdot n \right\}$$

推论 3.6 n 为偶数时, 对于幂有向图 $G\left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k\right)$, 圈的长度 t 被如下给出:

$$t = \begin{cases} \text{ord}_L k, & k \text{ 是偶数,} \\ \text{ord}_L k + \text{ord}_{c_1} k, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

其中 $L = \text{lcm}(\text{ord}(u), \text{ord}(v))$, $\text{ord}(u)$ 与 $\text{ord}(v)$ 是其中 A 类点 (u, v) 中 u 与 v 的阶数且 $\text{ord}_L k$ 表示 k 模 L 的乘法阶。其中 c_1 是其中 B 类点 (u, v) 中 v 的阶数且 $\text{ord}_{c_1} k$ 表示 k 模 c_1 的乘法阶。长度为 t 的圈的数量为

$$\begin{aligned} & A_t \left(G \left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k \right) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)] \cdot \left[\gcd \left(k^{t/d} - 1, \frac{n}{2} \right) \right] \right\}, & k \text{ 是偶数,} \\ \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)] \cdot \left[\gcd \left(k^{t/d} - 1, \frac{n}{2} \right) \right] \right\} + \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, \frac{n}{2})] \cdot n \right\}, & k \text{ 是奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

证明 我们知道, 当 k 为偶数时, B 类点均为悬挂点, 故只考虑 A 类点中圈顶点在圈长为 t 的情况, 在共轭作用下, $A \rtimes C_{\frac{n}{2}} \cong C_n \times C_{\frac{n}{2}}$, 由引理 2.3, 可知对于圈的长度 t , $t = \text{ord}_L k$, 其中 $L = \text{lcm}(\text{ord}(u), \text{ord}(v))$, $\text{ord}(u)$ 与 $\text{ord}(v)$ 是其中 A 类点 (u, v) 中 u 与 v 的阶数且 $\text{ord}_L k$ 表示 k 模 L 的乘法阶。且由引理 2.5, 圈长为 t 的圈数为

$$\frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) [\gcd(k^{t/d} - 1, n)] \cdot \left[\gcd \left(k^{t/d} - 1, \frac{n}{2} \right) \right] \right\}$$

k 为奇数时, A 类点与 B 类点无邻边。所以 A 类点中圈的长度 t 和圈长为 t 的圈数与上述情况一致。故下面只研究 B 类点, 对于 B 类点 (u, v) , 若 (u, v) 是圈顶点 $\Leftrightarrow \text{ord}(v) | \lambda_2$, 其中 λ_2 为 $\frac{n}{2}$ 中与 k 互素的最大因子, 由引理 2.3, 可知对于 B 类点中圈的长度 t , $t = \text{ord}_{c_1} k$, 其中 c_1 是其中 A 类点 (u, v) 中 v 的阶数且

$\text{ord}_{c_1} k$ 表示 k 模 c_1 的乘法阶。由引理 2.5 知, B 类点中圈长为 t 的圈数为

$$A_t(G(B \rtimes C_n, k)) = \frac{1}{t} \left\{ \sum_{d|t} \mu(d) \left[\gcd\left(k^{t/d} - 1, \frac{n}{2}\right) \right] \cdot n \right\}$$

4. 不动点、孤立点、悬挂点、连通分支与高度

首先, 我们研究幂有向图的不动点。

引理 4.1 n 为奇数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, 不动点个数为

$$\begin{cases} [\gcd(k-1, n)]^2, & k \text{ 是偶数,} \\ [\gcd(k-1, n)]^2 + [\gcd(k-1, n)]n, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, B 类点均为悬挂点, 故仅考虑 A 类点 (u, v) 为不动点的情况, 对于 A 类点 (u, v) 为不动点 $\Leftrightarrow (u, v)^k = (u^k, v^k) = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} u^k \equiv u \pmod{n} \\ v^k \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

可知不动点个数为 $[\gcd(k-1, n)]^2$ 。

k 为奇数时, A 类点与 B 类点无邻边, A 类点中不动点与上述一致, 下面仅考虑 B 类点中不动点。对于 B 类点 (u, v) 为不动点 $\Leftrightarrow (u, v)^k = (uv^{1-k}, v^k) = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} uv^{1-k} \equiv u \pmod{n} \\ v^k \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

对于 v 的方程, 有 $\gcd(k-1, n)$ 个解, 对于每一个固定的 v , 总有 n 个 u 使得方程成立。故 B 类点中不动点个数为 $[\gcd(k-1, n)]n$ 。

推论 4.2 n 为偶数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, 不动点个数为

$$\begin{cases} [\gcd(k-1, n)] \left[\gcd\left(k-1, \frac{n}{2}\right) \right]^2, & k \text{ 是偶数,} \\ [\gcd(k-1, n)] \left[\gcd\left(k-1, \frac{n}{2}\right) \right] + \left[\gcd\left(k-1, \frac{n}{2}\right) \right]n, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, B 类点均为悬挂点, 故仅考虑 A 类点 (u, v) 为不动点的情况, 对于 A 类点 (u, v) 为不动点 $\Leftrightarrow (u, v)^k = (u^k, v^k) = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} u^k \equiv u \pmod{n} \\ v^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

可知不动点个数为 $[\gcd(k-1, n)] \left[\gcd\left(k-1, \frac{n}{2}\right) \right]$ 。

k 为奇数时, A 类点与 B 类点无邻边, A 类点中不动点与上述一致, 下面仅考虑 B 类点中不动点。对于 B 类点 (u, v) 为不动点 $\Leftrightarrow (u, v)^k = (uv^{1-k}, v^k) = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} uv^{1-k} \equiv u \pmod{n}, \\ v^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

对于 v 的方程, 有 $\gcd\left(k-1, \frac{n}{2}\right)$ 个解, 对于每一个固定的 v , 总有 n 个 u 使得方程成立。故 B 类点中不动点个数为 $\left[\gcd\left(k-1, \frac{n}{2}\right)\right]n$ 。

接下来, 我们进一步研究孤立点, 我们明确在幂有向图中的孤立点, 为只有自环且与其他顶点无邻边的顶点, 即该点为圈顶点且入度为 1。

引理 4.3 n 为奇数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, k 为偶数时, 孤立点个数为

$$\begin{cases} \gcd(k-1, n)[\gcd(k-1, n)-1], & \gcd(k, n)=1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

k 为奇数时, 孤立点个数为

$$\begin{cases} [\gcd(k-1, n)]^2 + [\gcd(k-1, n)]n, & \gcd(k, n)=1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 当 k 为偶数时, B 类点无孤立点。在 A 类点中 (u, v) , 其中 $u = a^i$, $v = g^p$ 。若该点入度为 1, 则 $\gcd(k, n)=1$, 且 $i+p \not\equiv 0 \pmod{n}$ 。下面我们只需求出满足 $i+p \equiv 0 \pmod{n}$ 且为不动点的点的个数, 再用不动点个数减该数即可。

因为 $u \in C_n$ 且 u 为不动点, 所以 $i = \left[\frac{n}{\gcd(k, n-1)}\right]e$, 同理 $p = \left[\frac{n}{\gcd(k, n-1)}\right]f$, 其中

$e, f \in \{0, 1, 2, 3, \dots, \gcd(k-1, n)-1\}$ 。 $i+p \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow \left[\frac{n}{\gcd(k, n-1)}\right](e+f) \equiv 0 \pmod{n}$
 $\Leftrightarrow e+f \equiv 0 \pmod{\gcd(k, n-1)}$ 在 $e, f \in \{0, 1, 2, \dots, \gcd(k-1, n)-1\}$ 在满足 $e+f \equiv 0 \pmod{\gcd(k, n-1)}$ 的数对恰好 $\gcd(k-1, n)$ 对。所以在 A 类点中孤立点的个数为 $\gcd(k-1, n)[\gcd(k-1, n)-1]$ 。

当 k 为奇数时, 满足入度为 1 $\Leftrightarrow \gcd(k, n)=1$, 所以此时不动点均为孤立点。

推论 4.4 n 为偶数时, 对于幂有向图 $G\left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k\right)$, k 为偶数时, 孤立点个数为 0 个。 k 为奇数时,

孤立点个数为

$$\begin{cases} [\gcd(k-1, n)][\gcd(k-1, \frac{n}{2})] + [\gcd(k-1, \frac{n}{2})]n, & \gcd(k, n)=1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, 因为 n 为偶数, 所以 k 与 n 不可能互素, 故不存在孤立点。当 k 为奇数时, 满足入度为 1 $\Leftrightarrow \gcd(k, n)=1$, 所以此时不动点均为孤立点。下面我们研究悬挂点, 在幂有向图中, 由于每个顶点出度均为 1, 因此悬挂点只能是那些入度为 0 且出度为 1 的顶点(总度 = 1), 即没有其他顶点指向它的顶点。

引理 4.5 n 为奇数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, 悬挂点的个数为

$$\begin{cases} 2n^2 - \left[\frac{n}{\gcd(k, n)}\right]^2, & k \text{ 是偶数,} \\ 2n^2 - \left[\frac{n}{\gcd(k, n)}\right]^2 - \frac{n^2}{\gcd(k, n)}, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, B 类点均为悬挂点。对于 A 类点 (u, v) , 即 $u = a^i, v = g^p$ 有 A 类点与 B 类点指向。我们分别来看, 对于 $(x_1, y_1) \in A \rtimes C_n$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1^k \equiv u \pmod{n} \\ y_1^k \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

则像集为 $\left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right]^2$, 悬挂点个数为 $n^2 - \left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right]^2$ 。当然我们考虑到对于 A 类点中的悬挂点是否与

B 类点有邻边, 不难发现, 若 (u, v) 是悬挂点, 对于 $(x_2, y_2) \in B \rtimes C_n$, $(x_2, y_2)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} y_2^{-k} \equiv u \pmod{n} \\ y_2^k \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

关于 v 的式子无法成立, 即不存在这样一个 v 。所以 A 类点中的悬挂点与 B 类点无邻边。

k 为奇数时, A 类点中悬挂点与上述一致, 我们考虑 B 类点 (u, v) 有 $(x_1, y_1), (u, v) \in B \rtimes C_n$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1 y_1^{1-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{n} \end{cases}$$

对于 v 的方程, 像集为 $\left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right]$, 对于每一个固定的 v , 有 n 个 u 对应, 所以 B 类点中悬挂点个数为

$$n^2 - \frac{n^2}{\gcd(k, n)}。$$

推论 4.6 n 为偶数时, 对于幂有向图 $G\left(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k\right)$, 悬挂点的个数为

$$\begin{cases} n^2 - \left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right] \left[\frac{\frac{n}{2}}{\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)} \right], & k \text{ 是偶数,} \\ n^2 - \left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right] \left[\frac{\frac{n}{2}}{\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)} \right] - \frac{\frac{n^2}{2}}{\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)}, & k \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

证明 k 为偶数时, B 类点均为悬挂点。对于 A 类点 (u, v) , 即 $u = a^i, v = g^p$ 有 A 类点与 B 类点指向。我们分别来看, 对于 $(x_1, y_1) \in A \rtimes C_n$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1^k \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

则像集为 $\left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right] \left[\frac{\frac{n}{2}}{\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)} \right]$, 悬挂点个数为 $\frac{n^2}{2} - \left[\frac{n}{\gcd(k, n)} \right] \left[\frac{\frac{n}{2}}{\gcd\left(k, \frac{n}{2}\right)} \right]$ 。当然我们考虑到对于 A

类点中的悬挂点是否与 B 类点有邻边, 不难发现, 若 (u, v) 是悬挂点, 对于 $(x_2, y_2) \in B \rtimes C_n$, $(x_2, y_2)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} y_2^{-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y_2^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

关于 v 的式子无法成立, 即不存在这样一个 v 。所以 A 类点中的悬挂点与 B 类点无邻边。

k 为奇数时, A 类点中悬挂点与上述一致, 我们考虑 B 类点 (u, v) 有 $(x_1, y_1), (u, v) \in B \rtimes C_{\frac{n}{2}}$, $(x_1, y_1)^k = (u, v)$ 有如下同余方程

$$\begin{cases} x_1 y_1^{1-k} \equiv u \pmod{n}, \\ y_1^k \equiv v \pmod{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

对于 v 的方程, 像集为 $\left[\frac{\frac{n}{2}}{\gcd(k, \frac{n}{2})} \right]$, 对于每一个固定的 v , 有 n 个 u 对应, 所以 B 类点中悬挂点个数为

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{\gcd(k, \frac{n}{2})}。$$

在幂有向图中, 每个顶点的出度均为 1, 因此每个弱连通分量有且仅有一个有向圈, 且不同分量的圈互不相交。所以弱连通分量 = 圈数。下面主要研究高度, 我们用 $h(G)$ 表示图高度。

引理 4.7 n 为奇数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_n, k)$, 幂有向图的高度

$$h(G) = \begin{cases} 1, & \gcd(k, n) = 1 \text{ 且 } k \text{ 是偶数} \\ \max_{p|\gcd(n, k)} \left\lceil \frac{\nu_p(n)}{\nu_p(k)} \right\rceil, & \text{其他} \end{cases}$$

其中:

- p 取遍 $\gcd(n, k)$ 的所有素因子;
- $\nu_p(m)$ 表示 m 中素因子 p 的指数 (即 $p^{\nu_p(m)} \mid m$ 但 $p^{\nu_p(m)+1} \nmid m$);
- 若 $\gcd(n, k) = 1$, 则规定高度为 0 (此时所有顶点都是圈顶点, 无入树结构)。

证明 k 为偶数时, 我们可知 B 类点均为悬挂点, 且均不邻近 A 类点中悬挂点, 幂有向图 $G(A \rtimes C_n, K)$ 的高度记为 $h(A)$, 共轭作用下, $A \rtimes C_m \cong C_n \times C_m$, 由引理 2.6, $h(A) = h(n) = \max_{p|\gcd(n, k)} \left\lceil \frac{\nu_p(n)}{\nu_p(k)} \right\rceil$ 。故当 $\gcd(k, n) = 1$, $h(A) = 0$, $h(G) = h(A) + 1$; 当 $\gcd(k, n) \neq 1$, $h(G) = h(A)$ 。

k 为奇数时, $h(A) = h(n) = \max_{p|\gcd(n, k)} \left\lceil \frac{\nu_p(n)}{\nu_p(k)} \right\rceil$ 对于 B 类点 (u, v) , 若 (u, v) 是圈顶点 $\Leftrightarrow \text{ord}(v) \mid \lambda$,

其中 λ 为 n 中与 k 互素的素因子。幂有向图 $G(B \rtimes C_n, K)$ 的高度记为 $h(B)$, $h(B) = \max_{p|\gcd(n, k)} \left\lceil \frac{\nu_p(n)}{\nu_p(k)} \right\rceil$ 。

推论 4.8 n 为偶数时, 对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_{\frac{n}{2}}, k)$, 幂有向图的高度

$$h(G) = \max \left(h(n), h\left(\frac{n}{2}\right) \right)$$

其中:

$$h(n) = \max_{p|\gcd(n,k)} \left\lceil \frac{v_p(n)}{v_p(k)} \right\rceil$$

- p 取遍 $\gcd(n, k)$ 的所有素因子;
- $v_p(m)$ 表示 m 中素因子 p 的指数 (即 $p^{v_p(m)} \mid m$ 但 $p^{v_p(m)+1} \nmid m$);
- 若 $\gcd(n, k) = 1$, 则规定高度为 0 (此时所有顶点都是圈顶点, 无入树结构)。

证明 k 为偶数时, k 与 n 不可能互素。我们可知 B 类点均为悬挂点, 且均不邻近 A 类点中悬挂点, 幂有向图 $G\left(A \rtimes C_{\frac{n}{2}}, K\right)$ 的高度记为 $h(A)$, 在共轭作用下, $A \rtimes C_m \cong C_n \times C_m$, 由引理 2.6 可知,

$$h(A) = \max \left(h(n), h\left(\frac{n}{2}\right) \right) = \max \left(\max_{p|\gcd(n,k)} \left\lceil \frac{v_p(n)}{v_p(k)} \right\rceil, \max_{p|\gcd\left(\frac{n}{2}, k\right)} \left\lceil \frac{v_p\left(\frac{n}{2}\right)}{v_p(k)} \right\rceil \right), \text{ 又因为 } \gcd(k, n) \neq 1 \text{ 所以}$$

$$h(G) = h(A)。$$

k 为奇数时, $h(A) = \max \left(h(n), h\left(\frac{n}{2}\right) \right)$ 对于 B 类点 (u, v) , 若 (u, v) 是圈顶点 $\Leftrightarrow \text{ord}(v) \mid \lambda$, 其中 λ 为

$$\frac{n}{2} \text{ 中与 } k \text{ 互素的} \text{最大因子}。 \text{幂有向图 } G\left(B \rtimes C_{\frac{n}{2}}, K\right) \text{ 的高度记为 } h(B), \quad h(B) = \max_{p|\gcd\left(\frac{n}{2}, k\right)} \left\lceil \frac{v_p\left(\frac{n}{2}\right)}{v_p(k)} \right\rceil。$$

例 4.9 设 $n=3$, $k=2$ 时, 对于幂有向图 $G(D_6 \rtimes C_3, 2)$ 。因为 k 为偶数, 且 $\gcd(k, n)=1$, 所以 B 类点均为悬挂点, A 类点均为圈顶点; 共 9 个圈顶点组成 5 个圈, 其中 1 个单圈, 4 个圈长为 2 的圈; 1 个不动点, 无孤立点, 9 个悬挂点, 图高度为 1。

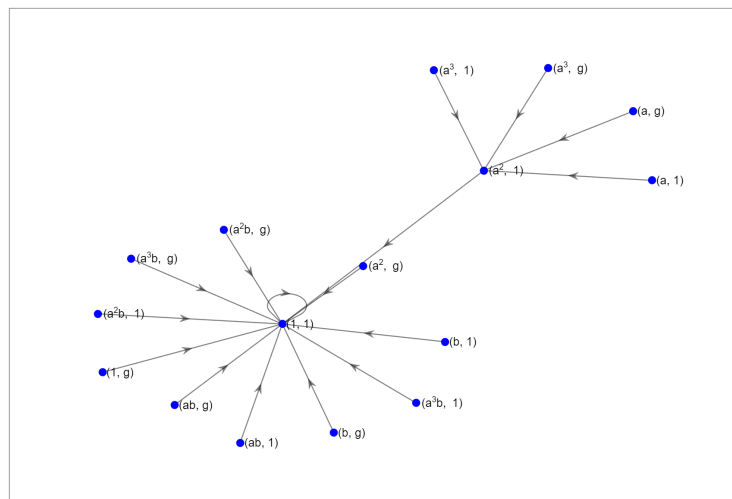


Figure 1. Power digraph $G(D_6 \rtimes C_3, 2)$

图 1. 幂有向图 $G(D_6 \rtimes C_3, 2)$

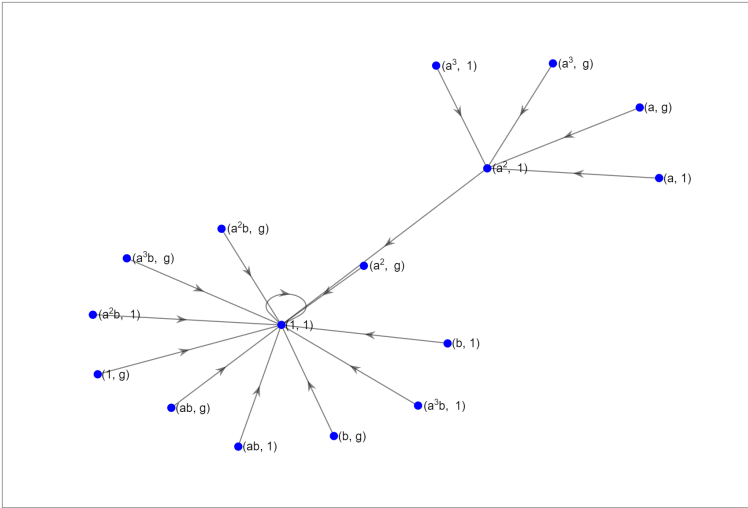


Figure 2. Power digraph $G(D_8 \rtimes C_2, 2)$

图 2. 幂有向图 $G(D_8 \rtimes C_2, 2)$

设 $n = 4$, $k = 2$ 时, 对于幂有向图 $G(D_8 \rtimes C_2, 2)$ 。因为 k 为偶数, 且 $\gcd(k, n) = 2$, 所以 B 类点均为悬挂点; 共 1 个圈顶点组成 1 个单圈; 1 个不动点, 无孤立点, 15 个悬挂点, 图高度为 2。如图 1、图 2 所示。

5. 结论与讨论

本文利用半直积作为工具将二面体群与循环群构成新的非交换群, 进而将幂映射图这一经典研究对象从阿贝尔群的范畴推广到了非交换群领域。对于幂有向图 $G(D_{2n} \rtimes C_m, k)$, 我们给出了圈数、圈长、圈顶点和入度等结果。

我们发现, 作为具有半直积结构的典型群, 二面体群 D_{2n} 所固有的非交换性, 使得群上无法维持类似于循环群中由单个生成元张成的全局长幂轨道, 整体的幂迭代动力学轨道被拆分为大量相互独立的短周期环。同时, 半直积引入的分量间非平凡共轭作用带来了层间非交换效应, 导致跨分量元素乘积的幂轨道圈长不再满足直积情形下的最小公倍数分解规则; 换言之, 幂映射有向图中环的周期结构无法仅仅依据两个分量的独立阶数来简单刻画。

此外, 群的非交换程度是调控该幂迭代离散动力系统动力学行为的核心代数因素。有限群上幂迭代系统的相空间结构, 可完整地由其幂映射有向图加以刻画。由非交换性所衍生的幂图拓扑复杂度——包括圈长的离散度、分支融合程度以及低阶顶点的分布等——能够定量地对应于轨道混合强度、周期结构的多样性以及状态空间覆盖程度等关键动力学特征。

基金项目

内蒙古自然科学基金(No. 2025MS01022), 呼和浩特市科技计划项目(No. 2025-Gui-Ji-59)。

参考文献

- [1] Bryant, S. (1967) Groups, Graphs, and Fermat's Last Theorem. *The American Mathematical Monthly*, **74**, 152-156. <https://doi.org/10.1080/00029890.1967.11999934>
- [2] Bollman, D., Colón-Reyes, O. and Orozco, E. (2007) Fixed Points in Discrete Models for Regulatory Genetic Networks. *EURASIP Journal on Bioinformatics and Systems Biology*, **2007**, 1-8. <https://doi.org/10.1155/2007/97356>
- [3] Brown, J.R. (1972) Inverse Limits, Entropy and Weak Isomorphism for Discrete Dynamical Systems. *Transactions of the*

-
- American Mathematical Society*, **164**, 55-66. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1972-0296251-7>
- [4] Bach, E. and Bridy, A. (2013) On the Number of Distinct Functional Graphs of Affine-Linear Transformations over Finite Fields. *Linear Algebra and its Applications*, **439**, 1312-1320. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.04.014>
- [5] Elspas, B. (1965) The Theory of Autonomous Linear Sequential Network. In: *Linear Sequential Switching Circuits*, Holden-Day, 21-61.
- [6] Toledo, R.H. (2005) Linear Finite Dynamical Systems. *Communications in Algebra*, **33**, 2977-2989. <https://doi.org/10.1081/agb-200066211>
- [7] Lucheta, C., Miller, E. and Reiter, C. (1996) Digraphs from Powers Modulo p . *The Fibonacci Quarterly*, **34**, 226-239. <https://doi.org/10.1080/00150517.1996.12429067>
- [8] Wilson, B. (1998) Power Digraphs Modulo n . *The Fibonacci Quarterly*, **36**, 229-239. <https://doi.org/10.1080/00150517.1998.12428933>
- [9] Somer, L. and Křížek, M. (2004) On a Connection of Number Theory with Graph Theory. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **54**, 465-485. <https://doi.org/10.1023/b:cmaj.0000042385.93571.58>
- [10] Somer, L. and Křížek, M. (2006) Structure of Digraphs Associated with Quadratic Congruences with Composite Moduli. *Discrete Mathematics*, **306**, 2174-2185. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.12.026>
- [11] Somer, L. and Křížek, M. (2007) On Semiregular Digraphs of the Congruence $x^k \equiv y \pmod{n}$. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **48**, 41-58.
- [12] Somer, L. and Křížek, M. (2009) On Symmetric Digraphs of the Congruence $x^k \equiv y \pmod{n}$. *Discrete Mathematics*, **309**, 1999-2009.
- [13] Ahmad, U. and Husnine, S.M. (2011) Characterization of Power Digraphs Modulo n . *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **52**, 359-367.
- [14] Ahmad, U. and Syed, H. (2012) On the Heights of Power Digraphs Modulo n . *Czechoslovak Mathematical Journal*, **62**, 541-556. <https://doi.org/10.1007/s10587-012-0028-3>
- [15] Husnine, S.M., Ahmad, U. and Somer, L. (2011) On Symmetries of Power Digraphs. *Utilitas Mathematica*, **85**, 257-271.
- [16] Ahmad, U. (2015) The Power Digraphs Associated with Generalized Dihedral Groups. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **7**, Article 1550057. <https://doi.org/10.1142/s1793830915500573>