

整数勾股数组构造方法的数学探究

周桃文

宜宾职业技术学院智能制造学院, 四川 宜宾

收稿日期: 2026年7月15日; 录用日期: 2026年8月8日; 发布日期: 2026年8月21日

摘要

基于已有本原勾股数构造规律以及不能穷举出全部衍生勾股数的事实, 从在直角三角形斜边减去较长直角边之差 m 出发, 根据 m 分解质因子的情况进行讨论, 得到各类 m 对应勾股数的一般表示形式。本文证明了当差值为无平方因子整数的时候, 勾股数组可以通过差值为1或者差值为2的本原勾股数组整体缩放而得; 当差值存在平方因子的时候, 则可以依据平方因子的组合形式产生许多互不相同的勾股数族。该方法能够完整覆盖正整数域内所有本原与派生勾股数组, 为限定范围内勾股数的枚举、勾股数性质研究提供了新的计算思路与理论依据。

关键词

勾股数, 边长差值, 本原勾股数组, 派生勾股数组

Mathematical Research on Constructing Method of Integer Pythagorean Triples

Taowen Zhou

School of Intelligent Manufacturing, Yibin Vocational and Technical College, Yibin Sichuan

Received: July 15, 2026; accepted: August 8, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

Current generation rules of the primitive Pythagorean triples do not systematically and exhaustively produce all derived Pythagorean triples. To solve that problem, in this paper, we take m , the length of (hypotenuse – long leg) for a right triangle, to be our key entry point; by classifying and discussing the prime factorization form of such an m , we obtain the general construction formulas of Pythagorean triples with respect to difference of various kinds. The above result shows that if the difference is an integer that is square-free, then we get those Pythagorean triples which are simply multiples of primitive ones having a difference equal to either 1 or 2; if the difference has square factors, then we may

construct more than one family of Pythagorean triples independently by considering the combined form of each of its square factors. The proposed approach is capable of entirely covering all primitive and derived Pythagorean triples over the domain of positive integers, providing new algorithms and theory to count Pythagorean triples in intervals and study Pythagorean numbers.

Keywords

Pythagorean Number, Side Length Difference, Primitive Pythagorean Triples, Derived Pythagorean Triples

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

勾股定理是平面几何体系中最基础的核心定理之一，其对应的正整数解——勾股数组(又称毕达哥拉斯三元数)，是数论领域中最古老的研究课题之一[1]。早在公元前 11 世纪，中国古代数学典籍《周髀算经》中就记载了“勾三股四弦五”的经典结论，成为世界上最早关于勾股数的文字记录。魏晋时期数学家刘徽在《九章算术·勾股章》的注释中，也进一步通过几何构造法给出了多组勾股数的生成思路，为后世的代数化研究奠定了几何基础[2]。在西方，毕达哥拉斯学派、欧几里得等学者[3]也先后对勾股数的构造展开系统研究，提出了经典的欧几里得生成公式，成为近代勾股数研究的基础框架。

一直以来，国内外许多学者对勾股数的构造、勾股数的分类及勾股数的应用等方面进行了大量的研究。经典的欧几里得公式利用两个互质参数可产生所有的本原勾股数，并由整数倍放大可得所有勾股数[4]。然而，这种方法在给定边之差的情况下以及在一定的范围内求出所有满足条件的勾股数方面存在困难。参数选取不直观，存在漏算或者重算现象。近年来，诸多研究者从全新视角探索勾股数的构造规律：朱一心从含两个相邻正整数的一组勾股数的生成数对的分类而给出了生成数对数列的通项公式[5]；申江红等利用初等方法、Euler 函数的性质探究了一个包含勾股数及完全数的三元变系数 Euler 函数方程的可解性[6]；宋海洲研究 Hall 矩阵与规范本原勾股向量的关系[7]。此外，勾股数的研究还延伸至把勾股定理从二维空间推广到三维空间和四维空间，推导出三维勾股定理和四维勾股定理[8]。1544 年，德国数学家 Michael Stifel 曾给出当差值为 1 时的构造公式，美国数学家 Leonard Eugene Dickson 于 1920 年提出的一套利用参数 r 、 s 、 t 生成所有本原勾股数的一般方法。然而，这些经典方法并没有将差值的素因子结构作为分类依据，因而不能揭示不同差值之间通过缩放或平方因子组合产生的内在联系，也难以做到对所有勾股数的统一枚举。

因此，笔者根据斜边减长直角边所得的差 m 的素因数分解形式将所有勾股数划分为无平方因子和有平方因子两类，并进一步依据平方因子的组合子集建立了一个系统化的分类和构造框架。该框架不仅能够统一处理本原与派生勾股数组，而且能够完整覆盖正整数域内的全部勾股数组，弥补了传统方法在定差情形下缺乏系统解法的不足。

2. 本原勾股数组的奇偶性特征

2.1. 本原勾股数的定义与基本约定

若一组正整数 (a, b, c) 满足勾股定理 $a^2 = b^2 + c^2$ ，则称其为勾股数组。本文统一约定： a 为直角三角

形斜边(最长边), b 为长直角边, c 为短直角边, 即满足 $a > b \geq c \geq 1$ 。

若数组中三个数的最大公约数 $\gcd(a, b, c) = 1$, 则称该数组为本原勾股数组(又称素的毕达哥拉斯数)[9]; 反之, 若存在大于 1 的公因子 k , 则称其为派生勾股数组, 可表示为 k 乘以一组本原勾股数组的形式。研究勾股数组的构造, 通常先从本原勾股数组入手, 再通过缩放性质推广至所有勾股数组。

2.2. 奇偶性定理与证明

定理 1 所有本原勾股数组必然由两个奇数和一个偶数构成, 且斜边 a 必为奇数。

证明: 采用反证法分情况讨论。

情形 1: 若 a 、 b 、 c 全为偶数, 则三者存在公因子 2, 与本原勾股数组的定义矛盾, 故不可能。

情形 2: 若 a 、 b 、 c 全为奇数, 则 a^2 、 b^2 、 c^2 均为奇数。由勾股定理, $b^2 + c^2 = a^2$, 左边为奇数 + 奇数 = 偶数, 右边为奇数, 等式两边奇偶性矛盾, 故不可能。

情形 3: 若 b 、 c 为偶数, a 为奇数, 则 $b^2 + c^2$ 为偶数, a^2 为奇数, 等式两边奇偶性矛盾, 故不可能。

情形 4: 若 b 、 c 一奇一偶, a 为奇数, 则 $b^2 + c^2$ 为奇数 + 偶数 = 奇数, 与 a^2 的奇偶性一致, 不存在矛盾。

综上, 本原勾股数组只能是两奇一偶的结构, 且斜边必为奇数, 偶数必为某一条直角边。

2.3. 相关推论

根据定理 1 还可以得出一个推论: 本原勾股数中的斜边减去长直角边一定是一个奇数。由此我们可以知道, 在利用边长之差来进行构造的时候, 若差是偶数, 则一定不是本原勾股数, 而是一个非本原勾股数, 即存在公因数大于等于 2。

3. 斜边与长直角边差值为 1 的勾股数组构造规律

3.1. 现象观察与问题提出

从上面一些经典的勾股数组可以看到, 比如(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41)……它们都有一个共同的特点: 即斜边减去长直角边之差为 1; 再仔细看一下, 这些勾股数组中的短直角边都是奇数, 并且它的平方刚好是另外两个边的和, 即 $3^2 = 4 + 5$, $5^2 = 12 + 13$, $7^2 = 24 + 25$, $9^2 = 40 + 41$ ……所以我们可以猜测所有的大于 1 的奇数都可以作为短直角边构成直角边差为 1 的勾股数组。

3.2. 通式推导与正确性证明

设短直角边 c 为大于等于 3 的奇数, 令 $c = 2k + 1$, 其中 k 为正整数($k \geq 1$)。设斜边与长直角边的差值为 1, 即 $a - b = 1$, 也即 $a = b + 1$ 。

代入勾股定理:

$$b^2 + c^2 = a^2 = (b+1)^2 \quad (1)$$

展开右边并整理:

$$c^2 = 2b + 1 \Rightarrow b = \frac{c^2 - 1}{2}, a = \frac{c^2 + 1}{2}$$

将 $c = 2k + 1$ 代入, 展开计算得:

$$b = 2k^2 + 2k, a = 2k^2 + 2k + 1$$

由此得到差值为 1 的勾股数组通式:

$$a = 2k^2 + 2k + 1, b = 2k^2 + 2k, c = 2k + 1 (k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*) \quad (2)$$

正确性证明：将上述表达式代入勾股定理验证：

$$b^2 + c^2 = (2k^2 + 2k)^2 + (2k + 1)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 4k^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 4k + 1$$

$$a^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 4k + 1$$

显然 $b^2 + c^2 = a^2$ ，等式成立。

同时可证该类勾股数组均为本原勾股数组：由于 b 和 a 为连续自然数，二者必然互质，因此整个数组不存在大于 1 的公因子，符合本原勾股数的定义。

3.3. 数值实例与性质分析

根据上述公式，取 $k = 1$ 到 $k = 8$ ，可得到对应的勾股数组如表 1 所示。

Table 1. Pythagorean triples when $m = 1$

表 1. $m = 1$ 时的勾股数组

序号	参数 k	斜边 a	长直角边 b	短直角边 c
1	1	5	4	3
2	2	13	12	5
3	3	25	24	7
4	4	41	40	9
5	5	61	60	11
6	6	85	84	13
7	7	113	112	15
8	8	145	144	17

由表 1 可知：当 k 越大时，这三条边均以二次函数的速度增长，并且斜边与较长的直角边之差始终是 1。“几乎等腰”的直角三角形所对应的勾股数对于建筑学以及某些数值的近似计算都有其特殊的意义。

4. 差值为无平方因子数的勾股数组构造规律

4.1. 通用构造公式的推导

将差值为 1 的情形推广至一般情况，设斜边与长直角边的差值为任意正整数 m ，即 $a = b + m$ 。代入勾股定理：

$$a^2 - b^2 = c^2$$

左边因式分解得：

$$(b + m)^2 - b^2 = 2bm + m^2 = m(2b + m)$$

因此有：

$$c^2 = m(2b + m) \quad (3)$$

由式(3)可知, m 必须是 c^2 的正因子。设 $c = n$ (n 为正整数), 则式(3)可变形为:

$$2b + m = \frac{n^2}{m}$$

整理得两条直角边的表达式, 最终得到勾股数组的通用构造公式:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{m} + m \right), b = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{m} - m \right), c = n \quad (4)$$

其中 n 、 m 需满足: n^2 能被 m 整除, 且 $\frac{n^2}{m} - m$ 为正偶数, 以保证 a 、 b 均为正整数。

上述式子说明, 对于任意 m , 存在足够大的 n 使得此三元组是勾股数。这实际上也给出了一个关于勾股数存在的定理, 在文献中称为勾股数的存在定理(又称普适定理)[10], 其表述为: 对于任何自然数 m , 存在足够大的正整数 n , 使得 (m, n) 是一个勾股数的边差。

4.2. 差值为奇数且无平方因子的情形

当 m 为奇数且不含平方因子(即 m 为不同奇素数的乘积)时, 分析公式(4)的约束条件: 由于 m 为奇数且无平方因子, 要使 n^2 能被 m 整除, n 必须包含 m 的所有素因子且 $\frac{n^2}{m}$ 为奇数, 即令 $n = m \cdot t$, 其中 t 为大于 1 的奇数。

将 $n = m \cdot t$ 代入公式(4):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 t^2}{m} + m \right) = m \cdot \frac{t^2 + 1}{2} \\ b &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 t^2}{m} - m \right) = m \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \\ c &= m \cdot t \end{aligned}$$

观察上述表达式, $(\frac{t^2 + 1}{2}, \frac{t^2 - 1}{2}, 1)$ 恰好对应差值为 1 的勾股数组通式。由此可得到结论: 当差值 m 为无平方因子的奇数时, 所有满足条件的勾股数组, 均可由差值为 1 的勾股数组整体乘以公因子 m 得到。

以 $m = 3$ 为例, 将表 1 中的数组各元素乘以 3, 即可得到 $m = 3$ 时的勾股数组, 如表 2 所示。

Table 2. Pythagorean triples when $m = 3$

表 2. $m = 3$ 时的勾股数组

序号	参数 t	斜边 a	长直角边 b	短直角边 c	对应本原数组
1	3	15	12	9	(5, 4, 3)
2	5	39	36	15	(13, 12, 5)
3	7	75	72	21	(25, 24, 7)
4	9	123	120	27	(41, 40, 9)
5	11	183	180	33	(61, 60, 11)

表中数据验证了上述结论: $m = 3$ 的勾股数组均为 $m = 1$ 对应数组的 3 倍, 二者仅存在公因子的差异。

4.3. 差值为偶数且无平方因子的情形

若 m 是不含平方因子的偶数, 则存在一个奇数 x , 使得 $m = 2x$ 。考虑式(4)的约束条件 $\frac{n^2}{m}$ 为偶数, 因为 x 是不含平方因子的奇数, 所以 n 是含有 x 因子的偶数, 即令 $n = 2x \cdot t$ ($t \in N^+$)。参数 t 为正整数, 且为保证 $b > 0$, 需 $t > 1$ 。

将 $n = 2x \cdot t$ 代入公式(4):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(\frac{4x^2 t^2}{2x} + 2x \right) = x(t^2 + 1) \\ b &= \frac{1}{2} \left(\frac{4x^2 t^2}{2x} - 2x \right) = x(t^2 - 1) \\ c &= 2x \cdot t \end{aligned}$$

观察可知, $t^2 - 1$ 、 $2t$ 、 $t^2 + 1$ 恰好对应差值为 2 的本原勾股数组形式。以 $m = 2$ (即 $x = 1$) 为例, 代入得 $a = t^2 + 1$, $b = t^2 - 1$, $c = 2t$, 该式生成的数组斜边与长直角边差值恒为 2, 且当 t 为大于 1 的整数时均可生成有效勾股数。

进一步可证: 当差值 $m = 2x$ (x 为无平方因子奇数) 时, 所有满足条件的勾股数组, 均可由差值为 2 的勾股数组整体乘以公因子 x 得到。以 $m = 6$ (即 $x = 3$) 为例, 将 $m = 2$ 的数组各元素乘以 3, 即可得到 $m = 6$ 的勾股数组, 如表 3 所示。

Table 3. Pythagorean triples when $m = 6$

表 3. $m = 6$ 时的勾股数组

序号	参数 t	斜边 a	长直角边 b	短直角边 c	对应本原数组
1	2	15	9	12	(5, 3, 4)
2	3	30	24	18	(10, 8, 6)
3	4	51	45	34	(17, 15, 8)
4	5	78	72	30	(26, 24, 10)
5	6	111	105	36	(37, 35, 12)

4.4. 两类差值情形的内在关联

对比差值为 1 和差值为 2 的勾股数组可以发现, 当 t 为奇数时, 差值为 2 的数组 $a = t^2 + 1$ 、 $b = t^2 - 1$ 、 $c = 2t$ 中三个数均为偶数, 整体除以 2 后得到 $(\frac{t^2 + 1}{2}, \frac{t^2 - 1}{2}, 1)$, 这恰好是差值为 1 的本原勾股数组。因此, 此时差值为 2 的数组实质上是差值为 1 的本原数组的 2 倍缩放(即派生数组)。

而当 t 为偶数时, 差值为 2 的数组两直角边一奇一偶($t^2 \pm 1$ 为奇数, $2t$ 为偶数), 且斜边为奇数, 满足本原性, 故此时不能通过差值为 1 的数组缩放得到。这说明差值为 1 的本原勾股数组, 是差值为 2 的勾股数组的一个子集, 二者通过公因子缩放可以相互转化, 这与最简勾股差的相关研究结论相契合。

5. 差值含平方因子的勾股数组构造规律

当差值 m 包含平方因子时, 勾股数组的构造不再局限于单一缩放形式, 而是会根据平方因子的组合生成多类独立的勾股数族。

5.1. 差值为单素数平方的情形

设 $m = p^2$ ，其中 p 为素数。所以有：

$$a^2 - b^2 = m(2b + m) = p^2(2b + p^2) = c^2 \quad (5)$$

此时， c^2 需被 p^2 整除，即 c 需被 p 整除。根据 c 中 p 的幂次不同，可分为两种情况：

情况一： c 中仅含 1 个 p 因子，即 $c = p \cdot n$ ，其中 n 不含因子 p 。

代入公式(5)得：

$$a = \frac{n^2 + p^2}{2}, b = \frac{n^2 - p^2}{2}, c = pn$$

此时 $a - b = p^2 = m$ ，满足差值条件。为保证 a 、 b 为正整数，需 $\frac{n^2 \pm p^2}{2}$ 为整数，即 n^2 与 p^2 同为奇偶，若 p 为奇数，则 p^2 为奇数，故 n 需为大于 p 的奇数；若 $p = 2$ 时，则 $p^2 = 4$ 为偶数，要求 n^2 为偶数，即 n 为偶数，但又不含因子 2，因此 $p = 2$ 时无解。综上所述， n 需为大于 p 的奇数。该情形下会生成无法通过基础数组缩放得到的新勾股数组，其中包含本原勾股数组。

情况二： c 中含 2 个及以上 p 因子，即 $c = p^2 \cdot t$ ，其中 t 为正整数。

代入公式(5)得：

$$a = p^2 \frac{t^2 + 1}{2}, b = p^2 \frac{t^2 - 1}{2}, c = p^2 t$$

若 p 为奇素数，则 t 需为大于 1 的奇数；若 $p = 2$ ，则 $p^2 = 4$ 偶数， t 可为任意正整数，但 $\frac{t^2 \pm 1}{2}$ 需为整数，即 t 为奇数；若 t 为偶数则 $\frac{t^2 \pm 1}{2}$ 为奇数，不能整除 2。故对于 $p = 2$ ，同样要求 t 为奇数。综上所述， t 需为大于 1 的奇数。该形式与差值为 1 的勾股数组乘以 p^2 的形式完全一致，属于缩放得到的派生勾股数组。

Table 4. Pythagorean triples of Case One when $m = 9$

表 4. $m = 9$ 时情况一勾股数组

序号	参数 n	斜边 a	直角边 b	直角边 c
1	5	17	8	5
2	7	29	20	1
3	9	45	36	7
4	11	65	56	3
5	13	89	80	9

Table 5. Pythagorean triples of Case Two when $m = 9$

表 5. $m = 9$ 时情况二勾股数组

序号	参数 t	斜边 a	直角边 b	直角边 c
1	3	45	36	27
2	5	117	108	45
3	7	225	216	63
4	9	369	360	81

以 $m=9$ ($p=3$) 为例, 分别计算两种情况的勾股数组: 情况一取 $n=5,7,9,11,13$, 得到数组如表 4 所示; 情况二取 $t=3,5,7,9$, 将表 1 的数组乘以 9, 得到数组如表 5 所示。

比较两表发现, 情形 2 中的数组都是某个本原勾股数的倍数, 而情形 1 中有像 (17, 8, 15) 这样不能用 $m=1$ 缩放获得的本原勾股数组出现, 这就是平方因子引入的新勾股数族。

5.2. 差值为多素数平方乘积的情形

当 m 包含多个素数的平方因子时, 即 $m = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_k^2 \cdot d$ (d 为无平方因子数), 平方因子的每一种组合都会对应一类勾股数族。以 $m=3^2 \times 5^2 \times 7=1575$ 为例, 根据 c 中是否包含 3^2 、 5^2 因子, 可分为四种独立情形:

- c 含 3^2 因子、不含 5^2 因子;
- c 含 5^2 因子、不含 3^2 因子;
- c 既不含 3^2 也不含 5^2 因子;
- c 同时含 3^2 和 5^2 因子。

每一种情形均可通过代入公式(4)推导出对应的构造通式, 并生成独立的勾股数序列。其中情形 3 可得到无法通过单一缩放得到的本原勾股数组, 而情形 4 则对应差值为 1 的数组整体乘以 1575 的派生形式, 四类情形共同构成了 $m=1575$ 下的全部勾股数组。

定理 若 m 的质因数分解中有 t 个互不相同的平方质数, 则共有 2^t 种基本的原始勾股数族, 且它们的并集恰好覆盖所有差值为 m 勾股数组。即所有的原始勾股数族都被枚举到了, 并没有漏掉。

5.3. 任意差值下的通用构造步骤

基于上述分析, 可总结出任意差值 m 下勾股数组的通用构造步骤:

- ① 对 m 进行素因子分解, 分离出平方因子部分与无平方因子部分;
- ② 枚举平方因子的所有子集组合, 每种子集对应一类勾股数族;
- ③ 对每一类, 代入通用公式(4)确定参数 n 的约束条件;
- ④ 选取满足条件的正整数 n , 计算得到对应的勾股数组。

该步骤可通过编程实现批量计算, 能够高效枚举任意数值范围内的全部勾股数组。

6. 结语

本文以斜边减去长直角边的差值作为切入点, 并通过对差值的素因子情况进行分类分析, 得出关于整数勾股数组的一般性结论: 当差值不含平方因子时, 所有此类的勾股数组都可以用差值等于 1 或者 2 的情况放大而得; 而含有平方因子的情况下, 不同的平方因子组合又会产生出一系列互不相同的勾股数列, 合起来就是所有的勾股数。

此法弥补了传统构造法中对定差勾股数缺乏有效解的问题, 并实现了一种统一框架下包含全部本原与派生勾股数组的情形, 在勾股数的枚举、勾股数性质的研究以及勾股数的教学等方面提供一种新途径。下一步工作可以考虑将这一方法推广到高维勾股数组、勾股数计数公式等问题上, 以丰富其在数论及工程领域中的应用。

基金项目

宜宾职业技术学院科研项目(ZRYB24-10)。

参考文献

- [1] 孙晶晶. 勾股数规律发现与构造方法的数学探究[J]. 数理天地(初中版), 2026(1): 4-5.
- [2] 齐春燕, 汪晓勤. 《九章算术》勾股章及其刘徽注中的变式思想[J]. 数学通报, 2019, 58(5): 5-9.
- [3] Pommersheim, J., Marks, T. and Flapan, E. (2010) Number Theory: A Lively Introduction with Proofs, Applications, and Stories. John Wiley & Sons, 6, 148.
- [4] Silverman, J.H. 数论概论[M]. 典藏版. 北京: 机械工业出版社, 2020: 13-20.
- [5] 朱一心. 含两个相邻整数的勾股数[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(13): 216-225.
- [6] 申江红, 高丽, 张明丽. 一个包含勾股数及完全数的三元变系数 Euler 函数方程的可解性[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2019, 28(5): 455-461.
- [7] 宋海洲. 勾股向量的矩阵表示[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2010, 31(2): 230-234.
- [8] 关春河. 空间勾股定理及空间勾股数[J]. 高师理科学刊, 2007, 27(4): 35-38.
- [9] 刘自远, 霍凯华. 一组勾股数规律的发现并证明[J]. 中学生数学, 2026(6): 33-35.
- [10] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 第 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2013: 348-356.