

从度量空间到Hilbert空间：核心理论的逻辑体系综述

张希康

兰州大学大气科学学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026年9月17日；录用日期：2026年10月11日；发布日期：2026年10月20日

摘要

泛函分析以度量空间、内积空间为底层框架，完备性、可分性、正交结构、投影算子是贯穿理论的四大核心板块。本文作为一篇教学综述，从一般度量空间拓扑性质切入，系统梳理稠密性、可分空间、完备度量空间与完备化理论，依托Cantor闭球套定理建立完备性等价判定准则；由内积空间过渡至Hilbert空间，剖析正交系、标准正交基的四类等价刻画，对比Bessel不等式与Parseval恒等式的内在联系，结合勒让德多项式实例说明标准正交基的函数空间实现；借助独立章节以有限元法为案例，完整演示Hilbert空间最佳逼近理论从偏微分方程问题提出、空间建模到数值求解的全过程；最后依托正交投影定理阐述闭子空间正交分解结构与投影算子核心性质，串联起从一般拓扑度量空间到具备几何正交结构的Hilbert空间完整逻辑链条，阐释各理论在函数分析、积分空间以及工程数值计算中的实践价值。本文适合泛函分析课程辅助学习，有助于消解抽象理论与实际应用之间的隔阂。

关键词

度量空间，完备性，Hilbert空间，标准正交基，正交投影，Lebesgue空间，有限元

From Metric Spaces to Hilbert Spaces: A Review on Logical System of Core Theories

Xikang Zhang

College of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou Gansu

Received: September 17, 2026; accepted: October 11, 2026; published: October 20, 2026

Abstract

As a teaching review paper, this paper takes metric spaces and inner-product spaces as the underlying

framework of functional analysis, where completeness, separability, orthogonal structures and projection operators are four core components. Starting from topological properties of general metric spaces, we systematically investigate density, separable spaces, complete metric spaces and completion theory. Based on Cantor's nested closed-ball theorem, equivalent criteria for completeness are established. Then we move from inner-product spaces to Hilbert spaces, analyze four equivalent characterizations of orthogonal systems and orthonormal bases, and compare the intrinsic relation between Bessel's inequality and Parseval's identity. Legendre polynomials are adopted to illustrate orthonormal bases in function spaces. As a typical application, finite element method is discussed in an independent section, demonstrating the whole procedure including problem formulation, mathematical modeling in Hilbert space and numerical solution by best approximation. With the orthogonal projection theorem, we explain orthogonal decomposition for closed subspaces and key properties of projection operators. A complete logical chain is constructed from general metric spaces to Hilbert spaces with orthogonal geometry. This article can serve as supplementary reading for functional-analysis courses, narrowing the gap between abstract theory and practical computation.

Keywords

Metric Spaces, Completeness, Hilbert Spaces, Orthonormal Bases, Orthogonal Projection, Lebesgue Spaces, Finite Element Method

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

现代分析学的发展突破了有限维欧氏空间的局限，将研究对象拓展至无穷维函数空间、序列空间，泛函分析正是刻画无穷维线性空间结构的基础工具。度量空间作为最基础的拓扑框架，仅依靠距离函数定义收敛、开集、连续映射，不依赖线性结构，是统一处理离散空间、连续函数空间、序列空间的通用载体；而内积空间在度量基础上增加角度、正交几何关系，完备的内积空间即 Hilbert 空间，兼具拓扑完备性与丰富的几何正交结构，成为偏微分方程、信号处理、量子力学的标准数学模型[1]。

国内经典教材常将度量拓扑理论、Hilbert 正交理论分章节独立讲解，割裂了二者的递进关系：度量空间是 Hilbert 空间的底层拓扑基础，完备度量空间定义收敛极限，可分性保证空间存在可数逼近单元，正交结构则是内积空间独有的几何特性。国外泛函分析著作多侧重于算子谱理论，对基础拓扑与正交系的衔接讲解较为简略。

本文定位为教学综述，逐层递进搭建理论框架：先梳理一般度量空间的拓扑完备理论，再引入内积诱导的正交体系，完整阐释标准正交基的四类等价条件，结合勒让德多项式实例验证理论落地；专门设置独立章节，以有限元法为例完整展示 Hilbert 空间理论求解偏微分方程的流程；最后通过正交投影定理揭示 Hilbert 空间闭子空间的分解规律，构建从一般度量到 Hilbert 空间的理论体系，厘清各定理之间的逻辑推导关系，弥补碎片化学习带来的逻辑断层。文中对部分抽象概念补充通俗解释，便于初学者理解，可配套讲义补充示意图，例如度量空间完备化示意图、Hilbert 正交投影几何示意图。

2. 度量空间基础拓扑与核心拓扑性质

2.1. 开集、闭集与连续映射

设集合 X 上配备距离函数 d ，满足非负性、对称性、三角不等式，则 (X, d) 称为度量空间。度量空

间的全部拓扑性质均可由开球生成，开球是度量拓扑的基础邻域单元。

子集 $U \subset X$ 称为开集，当且仅当对 U 内任意一点，存在半径，使得以该点为中心、为半径的开球完全包含于 U ；子集 F 称为闭集，若其补集为开集，等价判定条件为集合包含自身所有极限点。开集与闭集是对偶概念，有限个开集的交、任意多开集的并仍为开集，闭集则遵循相反的运算规律，该套拓扑公理体系为后续连续映射定义提供支撑[2]。

度量空间之间映射的连续性存在三组等价判定标准：其一为 $\varepsilon-\delta$ 语言，对定义域内任意定点、任意误差阈值，总能找到邻域半径，使得定义域内距离小于该半径的点，映射后与像点的距离小于误差阈值；其二为拓扑不变性，值域中任意开集在映射下的原像仍是定义域内的开集；其三为序列极限保号性，映射保持收敛序列的极限关系。开集原像判定是泛函分析中最常用的连续性判定方式，无需量化误差，仅依靠拓扑集合运算即可判断算子、函数的连续性，在无界算子、抽象空间映射研究中具备天然优势。

2.2. 稠密性、可分度量空间

稠密性刻画子集对整个空间的逼近能力：若子集 A 的闭包等于全空间 X ，则称 A 在 X 中稠密。直观几何解释为：空间内任意一点、任意小邻域内都能找到 A 中的元素，稠密子集可以无限逼近空间内所有点[2]。有理数集在实数域中稠密是经典一维例子，多项式集合在连续函数空间 $C[a,b]$ 内稠密是函数分析核心结论，该结论由 Weierstrass 逼近定理严格证明。

基于稠密子集定义可分空间：若度量空间存在可数稠密子集，则称可分。可分空间意味着空间内所有元素都能通过可数集合的极限逼近，大幅简化无穷维空间的分析难度。典型实例区分清晰： l^p ($1 \leq p < \infty$) 序列空间全部可分，其可数稠密集为仅有限项非零、分量为有理数的序列；而有界无穷序列空间 l^∞ 不存在可数稠密子集，属于不可分空间；连续函数空间 $C[a,b]$ 配备一致范数时可分，有理系数多项式构成其可数稠密集。

可分性是研究标准正交基的前置条件，可分 Hilbert 空间必然存在可数标准正交基，不可分 Hilbert 空间仅能以不可数指标集标注正交基。几乎周期函数构成的 Hilbert 空间是不可分 Hilbert 空间的典型例子。可分性具备很强的实际意义：可分 Hilbert 空间拥有可数标准正交基，可以做有限截断、构造数值算法；不可分 Hilbert 空间的正交基由不可数指标标记，无法直接用计算机做有限维离散近似，因此绝大多数工程、数值分析场景仅讨论可分 Hilbert 空间。二者在谱分解理论中存在本质差异[3]。

2.3. 完备度量空间与完备化定理

收敛是分析学核心概念，但普通度量空间内 Cauchy 序列未必存在收敛极限，完备性正是弥补这一缺陷的空间性质：若度量空间内所有 Cauchy 序列的极限都落在空间内部，则称该空间完备。完备空间内无需额外扩充集合即可求解序列极限，具备良好的极限封闭性，不动点定理、变分原理等核心结论均建立在完备空间之上[1]。

完备与不完备函数空间存在鲜明对比：区间 $[a,b]$ 连续函数空间 $C[a,b]$ 配备一致上确界范数时完备；但若配备 L^1 积分范数，空间不完备。构造分段连续 Cauchy 函数列即可验证，该序列在积分范数下收敛至分段间断函数，间断函数不属于连续函数集合，极限脱离原空间，破坏完备性。

针对任意不完备度量空间，完备化定理给出标准化扩充方案：对任意度量空间，存在唯一(等距同构意义下)完备度量空间，以及等距嵌入映射，嵌入后的像集在完备化空间内稠密。等距嵌入保证原空间内距离结构完全保留，稠密性说明原空间元素可以逼近完备化空间全部新增极限点。

上述积分范数下连续函数空间的完备化是经典范例： $L^1[a,b]$ 空间正是 $C[a,b]$ 在 L^1 范数下的完备化空

间, 空间内元素为几乎处处相等意义下的可积函数, 连续函数集合作为稠密子集等距嵌入其中。完备化理论搭建了从离散、不完备空间到完备极限空间的桥梁。勒贝格积分理论在空间层面的成果就是完成该完备化, 不能笼统表述为“实变函数积分拓展的本质就是完备化操作”。完备化是空间拓扑层面的操作, 积分定义本身还包含测度论的额外内容[4]。

2.4. Cantor 闭球套定理：完备性等价判定

完备性定义依赖 Cauchy 序列收敛性, 闭球套定理提供集合拓扑层面的等价判定准则, 二者互为充分必要条件, 是度量空间理论的核心等价刻画工具。

定理：度量空间完备, 当且仅当任意一列嵌套、半径趋于 0 的非空闭球族, 全体闭球的交集存在唯一公共点。

闭球记为 $\bar{B}(x_n, r_n)$, 嵌套要求 $\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \bar{B}(x_n, r_n)$, 半径约束 $r_n \rightarrow 0$ 。

双向证明逻辑清晰：

完备空间推出闭球套相交：取每一层闭球内一点构成序列, 嵌套结构保证下标更大的点全部落在前序闭球内, 结合半径趋于 0 可证明该序列为 Cauchy 列；空间完备则序列收敛至 x^* , 闭球为闭集, 极限属于全部闭球, 交集非空。半径趋于 0 保证交点唯一, 若存在两个交点, 距离大于 0, 令 $n \rightarrow \infty$ 可得矛盾。

闭球套相交推出空间完备：任取空间内 Cauchy 列, 依据 Cauchy 列定义选取递增下标列, 构造半径趋于 0 的嵌套闭球列；闭球套定理保证存在公共交点, 原 Cauchy 列的子列收敛至该交点；Cauchy 序列若存在收敛子列, 则整个序列收敛, 由此证明空间完备。

闭球套定理将序列收敛问题转化为集合嵌套相交问题, 在压缩映射不动点理论、函数逼近误差估计中有广泛应用, 区别于依赖序列定义的完备性判定, 该定理完全依靠集合拓扑语言描述空间性质, 具备更强的抽象推广价值[5]。

3. Hilbert 空间正交结构理论

内积空间是配备双线性、共轭对称正定内积的线性空间, 内积可诱导范数, 进而生成度量。完备的内积空间称为 Hilbert 空间, 同时具备线性、拓扑完备、正交几何三重结构, 是无穷维几何分析的核心载体, 相较一般 Banach 空间多出正交投影、傅里叶分解等独有工具[3]。

3.1. 正交系与标准正交系基础定义

设 H 为 Hilbert 空间, 指标集 Λ 标注向量族 $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 若任意两个不同指标对应向量内积 $\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = 0$, 称该向量族为正交系；若额外满足每个向量范数 $\|e_\lambda\| = 1$, 则称为标准正交系。正交系内向量两两垂直, 无重叠分量, 天然满足线性无关性, 是无穷维空间的“垂直坐标轴”, 有限维欧氏空间标准正交基是其特殊形式。

3.2. 标准正交基的四类等价刻画

标准正交系若能完整张成整个 Hilbert 空间, 则称为标准正交基, 以下四条条件完全等价, 从逼近、拓扑、唯一性、范数四个维度描述基的完备性, 是正交分析的核心判定工具。

傅里叶级数展开：空间内任意向量 x , 均可表示为指标集加权求和 $x = \sum_{\lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$, 级数在空间范数意义下收敛。系数 $\langle x, e_\lambda \rangle$ 称为关于标准正交基的傅里叶系数, 对应有限维空间向量在坐标轴上的投影长度, 是函数正交展开、信号分解的理论根基。

稠密生成条件：标准正交系所有有限线性组合构成的线性包的闭包等于全空间。线性包仅包含有限项组合，闭包加入无穷级数极限，等价于所有空间元素都能被正交系有限组合无限逼近，与前文稠密性定义形成呼应。

完全唯一性条件：若向量 x 与全部基向量正交，即对所有 $\lambda \in \Lambda$ 满足 $\langle x, e_\lambda \rangle = 0$ ，则必有 $x = 0$ 。该条件说明正交基不存在“垂直于全体坐标轴的隐藏向量”，无冗余正交方向，完整覆盖空间全部维度，常用于证明函数唯一性、偏微分方程弱解唯一性。

Parseval 能量恒等式：对任意 $x \in H$ ，成立 $\|x\|^2 = \sum_{\lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2$ 。等式左侧为向量自身范数平方，右侧为全部傅里叶系数模长平方和，物理层面解释为信号分解后各正交分量能量之和等于原始信号总能量，即工程领域通用的能量守恒定律。

四条等价条件构建起标准正交基完整判定体系，在实际应用中可按需选取判定方式：逼近问题优先使用稠密生成，函数唯一性证明使用完全性，误差分析、能量计算使用 Parseval 等式[6]。

3.3. Bessel 不等式与 Parseval 恒等式递进关系

对 Hilbert 空间内任意标准正交系(不必是基)，Bessel 不等式恒成立： $\sum_{\lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ 。不等式说明仅部分正交方向分解向量时，各分量能量总和不会超过原始向量总能量，丢失部分垂直分量会造成能量损耗，可直接用于截断正交展开的误差上界估计。

Bessel 不等式等号成立的充要条件是该标准正交系为完备标准正交基，此时不等式升级为 Parseval 恒等式，能量无损耗。二者形成清晰递进逻辑：普通标准正交系仅给出能量上界约束，完备标准正交基实现能量等式，是区分普通正交系与正交基最简洁的代数判别式，无需验证稠密性、完全性等拓扑条件，计算层面更易操作[3]。

3.4. 实例： $L^2[-1,1]$ 空间勒让德标准正交基

区间 $[-1,1]$ 上平方可积函数空间 $L^2[-1,1]$ 是典型可分 Hilbert 空间，内积定义为积分形式

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

勒让德多项式是该空间经典标准正交基原型，广泛应用于数值拟合、有限元插值计算[7]。

勒让德多项式由递推公式生成：初始项 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ ，递推关系 $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ ，多项式自带天然正交性：

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, m \neq n$$

原始多项式范数不为 1，通过标准化变换得到标准正交系。该序列构成 $L^2[-1,1]$ 空间的标准正交基，满足前文四类等价条件。

$L^2[-1,1]$ 空间内任意平方可积函数可展开为勒让德多项式无穷级数，展开系数 $c_n = \langle f, P_n^{orth} \rangle$ 。代数 Parseval 恒等式建立起函数模平方的积分(范数的平方)与展开系数模平方级数和之间的对应关系，完美验证正交基能量守恒性质，为多项式逼近误差量化提供精确公式。

4. Hilbert 空间正交投影定理

正交投影定理是 Hilbert 空间区别于一般 Banach 空间的核心结论，揭示闭线性子空间的正交分解结构，是逼近论、偏微分方程变分法、最小二乘算法的理论根基，仅在具备内积正交结构的空间中成立[1]。

4.1. 正交分解存在唯一性

设 M 为 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 对任意向量 $x \in H$, 存在唯一分解 $x = x_M + x_\perp$, 其中 $x_M \in M$, 剩余分量 $x_\perp$ 落在 M 的正交补空间 $M^\perp$ 。向量 x_M 称为 x 在子空间 M 上的正交投影, 记作 $P_M x$ 。该分解等价于极小距离刻画: 投影 $P_M x$ 是子空间 M 内距离 x 最近的点, 满足 $\|x - P_M x\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ 。在函数逼近问题中, 该结论直接转化为: 给定平方可积函数, 闭多项式子空间内的勒让德多项式有限截断展开, 是所有同次多项式中与原函数积分误差最小的逼近, 为数值拟合、曲线重构提供最优理论依据; 在数据处理中, 最小二乘拟合本质就是样本向量在线性子空间上的正交投影运算。

4.2. 正交投影算子核心性质

映射 $P_M: H \rightarrow M$ 称为正交投影算子, 具备四条标志性代数性质, 同时这四条性质联合构成算子为正交投影算子的充要条件, 是算子谱分析的重要判别依据:

线性: $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$, 投影运算保持线性组合;

幂等性: $P_M^2 = P_M$, 向量经过两次投影等价于单次投影, 投影到子空间后再次投影不会改变结果;

自伴性: 内积满足 $\langle P_M x, y \rangle = \langle x, P_M y \rangle$, 算子自身与对偶算子完全相等, 属于对称自伴算子;

范数有界: 若非零子空间, 投影算子范数 $\|P_M\| = 1$, 投影不会放大向量范数, 保证数值计算稳定性。幂等、自伴、范数为 1 是算子为正交投影算子的充要条件, 算子谱理论中常通过这三条性质判别投影结构, 在量子力学可观测量算子、信号正交滤波、图像正交变换中广泛应用[8]。

5. 有限元法: Hilbert 空间最佳逼近理论的工程实现

本章选取椭圆边值问题, 完整展示: 物理问题提出 $\rightarrow$ 转化为 Hilbert-Sobolev 空间变分模型 $\rightarrow$ 等价于闭子空间最佳逼近 $\rightarrow$ Galerkin 有限元离散求解的完整链条, 体现 Hilbert 空间理论对工程数值算法的指导意义。

5.1. 问题提出

考虑——维二阶椭圆边值模型问题:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

$f \in L^2(0,1)$ 为已知源函数。直接求经典二阶可微解难度较大, 有限元方法不直接求解古典解, 而是在 Hilbert 型 Sobolev 函数空间中寻找弱解。

5.2. 建立 Hilbert-Sobolev 空间数学模型

定义 Sobolev 空间 $H_0^1(0,1)$: $H_0^1(0,1) = \{v \in L^2(0,1) | v' \in L^2(0,1), v(0) = v(1) = 0\}$

其上内积定义为 $\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ 。该内积诱导范数, $H_0^1(0,1)$ 构成可分 Hilbert 空间。原边值问题等价变分(弱)形式: 寻找 $u \in H_0^1(0,1)$, 使得对任意 $v \in H_0^1(0,1)$, 有 $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, 根据 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理, 该变分问题解存在且唯一。进一步, 变分问题等价于极小化问题: $J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 dx - \int_0^1 f u dx, u \in H_0^1(0,1)$ 。求 $J(u)$ 的极小元。该极小元恰好就是 Hilbert 空间意义下的最佳逼近元。

5.3. Galerkin 方法：闭有限维子空间上的正交投影

$H_0^1(0,1)$ 是无穷维 Hilbert 空间，计算机无法直接求解无穷维问题。构造分片一次多项式构成的有限维闭子空间 $V_h \subset H_0^1(0,1)$ ， h 代表网格尺寸。 V_h 是有限维，因此也是 Hilbert 空间的闭子空间。

Galerkin 有限元方法：在子空间 V_h 中找近似解 $u_h \in V_h$ ，满足

$$\int_0^1 u_h' v_h' dx = \int_0^1 f v_h dx, \forall v_h \in V_h$$

从 Hilbert 空间理论看，Galerkin 投影本质就是把精确解 u 正交投影到闭子空间 V_h ， $u_h = P_{V_h} u$ ， u_h 是 V_h 内距离精确解 u 最近的元素，即最佳逼近元。

5.4. 误差与 Hilbert 空间理论的联系

依据正交投影定理，投影误差满足正交关系 $u - u_h \perp V_h$ 。Bessel 不等式与 Parseval 恒等式可以用来估计展开截断带来的逼近误差：

$$\|u - u_h\|_{H_0^1} = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H_0^1}$$

随着网格加密，子空间 V_h 在 $H_0^1(0,1)$ 中逐渐稠密，近似解 u_h 按范数收敛到原问题弱解 u 。

整个有限元算法的底层逻辑完全建立在 Hilbert 空间之上：完备性保证弱解空间是 Hilbert 空间；闭子空间性质保证投影算子良定义；正交投影定理给出最佳逼近；稠密性保证加密网格可以收敛到真实解。这一案例直观展示抽象无穷维 Hilbert 空间理论如何转化为工程可执行的数值计算[9] [10]。

6. 理论体系综合联系与应用价值

本文理论体系存在清晰的层级递进逻辑：度量空间搭建收敛、完备、拓扑逼近的底层框架，完备化理论解决不完备空间极限缺失问题，Cantor 闭球套定理给出完备性拓扑判别；增加内积结构后得到 Hilbert 空间，引入正交系、标准正交基实现无穷维空间的坐标分解，Bessel 不等式与 Parseval 等式量化正交分解的能量变化；正交投影定理依托闭子空间完备性，给出最优逼近的正交分解方案；有限元案例演示整套理论如何落地求解偏微分方程。整套理论由浅入深、层层推导，逻辑自洽完整。

除上一章详细展开的有限元法之外，理论还在多个学科发挥作用：

信号处理：傅里叶三角函数标准正交基分解时域信号，Parseval 等式计算信号总能量，正交投影实现噪声滤波、特征提取，是通信、雷达信号处理的基础数学工具[11]；

量子力学：量子态空间为复 Hilbert 空间，物理可观测量对应自伴算子，本征向量构成标准正交基，测量概率由傅里叶系数模平方描述，能量守恒对应 Parseval 恒等式，搭建量子力学严格数学公理体系。

7. 结论

本文作为教学综述，系统梳理泛函分析从一般度量空间到 Hilbert 正交空间的完整理论脉络，阐释完备性判定、标准正交基四类等价条件、正交投影分解核心定理，以勒让德多项式为实例验证正交基构造与函数展开；专门以有限元法为案例完整演示从偏微分方程到 Hilbert 空间最佳逼近求解的完整流程，打通抽象理论与数值工程之间的联系。

度量空间的完备性、可分性是无穷维分析的基础前提，Hilbert 空间独有的正交几何结构实现向量正交分解与全局最优逼近，Bessel 不等式、Parseval 等式、正交投影定理构成正交分析的三大核心工具，三者相互配合，统一处理无穷维空间的逼近、分解、误差分析问题。

该套理论统一了有限维欧氏几何、连续函数分析、Lebesgue 积分空间、无穷序列空间的数学框架，为偏微分方程、数值逼近、信号处理、量子物理等领域提供标准化无穷维数学模型。后续可以进一步拓

展非完备内积空间、不可分 Hilbert 空间、无界自伴算子谱分解等延伸方向,同时结合机器学习核 Hilbert 空间开展交叉学习研究。

参考文献

- [1] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义(上册) [M]. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2021.
- [2] 程其襄,张奠宙,胡善文,薛以锋. 实变函数与泛函分析基础[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] 江泽坚,孙善利. 泛函分析[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [4] Rudin, W. (2006) Functional Analysis. McGraw-Hill Education.
- [5] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.
- [6] 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌. 实变函数论与泛函分析(下册) [M]. 第 2 版修订本. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [7] 王仁宏. 数值逼近[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [8] Conway, J.B. (2007) A Course in Functional Analysis. Springer.
- [9] 陈恕行,洪家兴. 偏微分方程近代方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1988.
- [10] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 第 5 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2018.
- [11] 胡广书. 数字信号处理: 理论、算法与实现[M]. 第 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2012.