

一类具有两针疫苗接种的传染病模型的稳定性分析

王来全

昌吉职业技术学院公共基础教育学院, 新疆 昌吉

收稿日期: 2026年7月21日; 录用日期: 2026年8月14日; 发布日期: 2026年8月27日

摘 要

考虑了一类具有两针疫苗接种和潜伏期的传染病模型, 得到了基本再生数 R_0 , 讨论了地方病平衡点存在的条件, 运用Lyapunov函数讨论了平衡点的全局稳定性, 通过数值模拟验证了所得结论的有效性, 说明了增强第一针和第二针疫苗接种对传染病预防的效果。

关键词

基本再生数, 全局渐近稳定, Lyapunov函数, 接种策略

Stability Analysis of an Epidemic Model with Two Doses of Vaccination

Laiquan Wang

Department of Public Basic Education, Changji Vocational and Technical College, Changji Xinjiang

Received: July 21, 2026; accepted: August 14, 2026; published: August 27, 2026

Abstract

We considered a kind of transmission model with two doses of vaccination and the incubation period. The basic reproduction number R_0 and some conditions for the existence of the endemic equilibrium point were obtained. Throughout the paper, we investigated the global asymptotic of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium point by using the Lyapunov function. Furthermore, we investigated the effect of the one vaccination and two vaccinations on the prevention of epidemic. Lastly, numerical simulations are given to present the effectiveness of the obtained results.

Keywords

Basic Reproduction Number, Global Asymptotically Stable, Lyapunov Function, Vaccination Strategy

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

疫苗接种旨在刺激免疫系统产生针对特定病原体的免疫反应，进而对未来的病毒感染提高保护[1]。研究者对天花[2]和麻疹[3]等疾病研究得出：控制传染病传播最有效的途径之一是疫苗接种，至今疫苗接种策略广泛地应用于传染病的预防控制[4] [5]。高水平的疫苗接种可以维持疾病在较低感染水平或者实现疾病根除，如天花病毒等。有些疫苗无法完全防止接种者继续感染和疾病传播，如疟疾[6]和一些禽类病毒[7]，但是对一般的传染病考虑疫苗接种作用后，有助于疾病控制[8]。根据传染病的传播特性，恰当的疫苗接种预防策略可以提高疫苗接种的有效性[9] [10]，如对流感和麻疹易感者接种第一针疫苗后，一定周期后需对易感者实施第二针疫苗接种才能使其产生良好的免疫力[11]，而且麻疹易感者一般接种两针疫苗后永久免疫[12]，也有一些传染病易感者存在接种两针疫苗后再次被感染的可能。应用数学模型建立并研究疫苗接种传染病模型是分析疫苗接种策略控制传染病的重要工作之一[13]，考虑到有些传染病易感者实施第一针疫苗接种后再次被感染的可能，需对易感者有必要实施第二针疫苗接种预防策略，也考虑了对易感者实施两针疫苗接种后存在再次被感染的情况，本文建立了具有两针疫苗接种和潜伏期的传染病模型，研究了模型的基本再生数和平衡点存在的条件，分析了平衡点的渐近稳定性，并数值模拟了两针疫苗接种策略对控制疾病传播的影响。

2. 数学模型的建立

假设： $S(t)$ 为易感者， $V_1(t)$ 为第一针疫苗接种者， $V_2(t)$ 为第二针疫苗接种者， $E(t)$ 为潜伏者， $I(t)$ 为感染者， $R(t)$ 为康复者。 A 表示易感人群的输入率， ρ 为易感者接种率， p 为第二针接种疫苗率， d 为死亡率， β 为感染率， $\theta_1\beta$ 为接种第一针疫苗后的感染率， $\theta_2\beta$ 为接种第二针疫苗后的感染率， ε 为潜伏者进入感染者的几率， k 为自然康复率， γ 为感染者进入康复者的治愈率。据生物意义，以上参数均为正数，且 $\rho \in (0,1)$ ， $\theta_1 > \theta_2$ 。设 $N(t) = S + V_1 + V_2 + E + I + R$ ，基于以上假设，我们建立如下数学模型：

$$\begin{cases} S'(t) = A(1-\rho) - \beta S(t)I(t) - dS(t) \\ V_1'(t) = A\rho - pV_1(t) - \theta_1\beta V_1(t)I(t) - dV_1(t) \\ V_2'(t) = pV_1(t) - kV_2(t) - \theta_2\beta V_2(t)I(t) - dV_2(t) \\ E'(t) = \beta S(t)I(t) + \theta_1\beta V_1(t)I(t) + \theta_2\beta V_2(t)I(t) - \varepsilon E(t) - dE(t) \\ I'(t) = \varepsilon E(t) - \gamma I(t) - dI(t) \\ R'(t) = kV_2(t) + \gamma I(t) - dR(t) \end{cases} \quad (1)$$

由微分方程的基本理论，模型(1)满足： $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{A}{d}$ ，进而得到模型(1)解的可行域为：

$$\Delta = \left\{ (S, V_1, V_2, E, I, R) : S > 0, V_1 \geq 0, V_2 \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, N(t) \leq \frac{A}{d} \right\}$$

我们注意到在模型(1)中 $S(t)$ 、 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 、 $E(t)$ 和 $I(t)$ 独立于 $R(t)$ ，因此，在本文我们只需分析下面的模型：

$$\begin{cases} S'(t) = A(1-\rho) - \beta S(t)I(t) - dS(t) \\ V_1'(t) = A\rho - pV_1(t) - \theta_1\beta V_1(t)I(t) - dV_1(t) \\ V_2'(t) = pV_1(t) - kV_2(t) - \theta_2\beta V_2(t)I(t) - dV_2(t) \\ E'(t) = \beta S(t)I(t) + \theta_1\beta V_1(t)I(t) + \theta_2\beta V_2(t)I(t) - \varepsilon E(t) - dE(t) \\ I'(t) = \varepsilon E(t) - \gamma I(t) - dI(t) \end{cases} \quad (2)$$

2.1. 基本再生数和平衡点

易于得出模型(2)的无病平衡点 $E_0 = (S_0, V_{10}, V_{20}, 0, 0)$ 。其中： $S_0 = \frac{A(1-\rho)}{d}$ ， $V_{10} = \frac{A\rho}{d+p}$ ，

$V_{20} = \frac{pA\rho}{(d+k)(d+p)}$ 。应用下一代矩阵算法，计算出了模型(1)的基本再生数 R_0 。其中：

$$R_0 = A\beta\varepsilon \frac{\theta_1\rho(d+k)d + \theta_2p\rho d + (1-\rho)(d+k)(d+p)}{d(\varepsilon+d)(\gamma+d)(d+k)(d+p)} \quad (3)$$

假设模型(2)的地方病平衡点为 $E^* = (S^*, V_1^*, V_2^*, E^*, I^*)$ 。其中：

$$S^* = \frac{A(1-\rho)}{\beta I^* + d}, \quad V_1^* = \frac{A\rho}{\theta_1\beta I^* + p + d}, \quad V_2^* = \frac{pV_1^*}{\theta_2\beta I^* + k + d}, \quad E^* = \frac{\gamma + d}{\varepsilon} I^* \quad (4)$$

将(4)式结果代入模型(2)的第三个方程并化简等式，此时分析地方病平衡点 E^* 的存在性等价于分析以下方程是否存在正解：

$$a_1 I^3 + a_2 I^2 + a_3 I + a_4 = 0 \quad (5)$$

其中：

$$\begin{aligned} a_1 &= \theta_1\theta_2\beta^2(\varepsilon+d)(\gamma+d), \\ a_2 &= \theta_2\beta^2(p+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d) + \theta_1\beta^2(k+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d) - \theta_1\theta_2\varepsilon\beta^3A, \\ a_3 &= \beta(k+d)(p+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d) + d\theta_1\beta(k+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d) \\ &\quad + d\theta_2\beta(p+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d) - \beta A(1-\rho)\varepsilon\theta_1(k+d) - \theta_2\beta^3(p+d)\varepsilon A(1-\rho), \\ &\quad - \theta_1\beta^2A\rho\varepsilon(k+d) - d\theta_1\theta_2\beta^2A\rho\varepsilon - \theta_2\beta^2A\rho p\varepsilon \\ a_4 &= d(k+d)(p+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d) - \beta A(1-\rho)(d+p)(d+k)\varepsilon \\ &\quad - d\theta_1\beta A\rho\varepsilon(k+d) - \theta_2\beta A d p \rho \varepsilon \\ &= (p+d)(k+d)(\varepsilon+d)(\gamma+d)(1-R_0) \end{aligned}$$

显然，如果 $a_1 > 0$ 和 $a_4 \leq 0 \Leftrightarrow R_0 \leq 1$ 。令 $f(I) = a_1 I^3 + a_2 I^2 + a_3 I + a_4$ ，那么 $f'(I) = 3a_1 I^2 + 2a_2 I + a_3$ ，我们得到 $f'(I) = 0$ 的平衡点：

$$\bar{I}_1 = \frac{-2a_2 - \sqrt{4a_2^2 - 12a_1a_3}}{6a_1}, \quad \bar{I}_2 = \frac{-2a_2 + \sqrt{4a_2^2 - 12a_1a_3}}{6a_1}$$

根据三次方程(5)式的根与系数的关系，我们得到 $f(I) = 0$ 时，正根存在的条件。

定理 1 [14] 如果 $R_0 > 1$ 时, 那么模型(2)地方病平衡点 E^* 存在的条件如下。

(i) 如果满足(1)至(4)条件之一, 则模型(2)存在唯一的地方病平衡点。

其中: (1) $a_2 > 0$ 且 $a_3 < 0$; (2) $a_2 > 0$ 且 $a_3 > 0$; (3) $a_2 < 0$ 且 $a_3 > 0$, 且 $4a_2^2 - 12a_1a_3 > 0$, $f(\bar{I}_1) < 0$ (或 $f(\bar{I}_1) > 0$ 且 $f(\bar{I}_2) > 0$); (4) $a_2 < 0$ 且 $a_3 > 0$ 。

(ii) 如果 $a_2 < 0$ 且 $a_3 > 0$, $4a_2^2 - 12a_1a_3 > 0$ 且 $f(\bar{I}_1) = 0$ (或 $f(\bar{I}_1) > 0$ 且 $f(\bar{I}_2) = 0$), 那么模型(2)存在两个地方病平衡点。

(iii) 如果 $a_2 < 0$ 且 $a_3 > 0$, $4a_2^2 - 12a_1a_3 > 0$, $f(\bar{I}_1) > 0$ 且 $f(\bar{I}_2) < 0$, 那么模型(2)存在三个不同地方病平衡点。

2.2. 平衡点的稳定性

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(2)的无病平衡点 E_0 局部渐近稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定。当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)的地方病平衡点 E^* 局部渐近稳定。

证明 计算出模型(2)在无病平衡点 E_0 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 & 0 & -\beta S_0 \\ 0 & -(p+d) & 0 & 0 & -\theta_1 \beta V_{10} \\ 0 & p & -(k+d) & 0 & -\theta_2 \beta V_{20} \\ 0 & 0 & 0 & -(\varepsilon+d) & \theta_1 \beta V_{10} + \theta_2 \beta V_{20} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -(\gamma+d) \end{pmatrix}$$

进一步得到 $J(E_0)$ 的特征方程:

$$(\lambda+d)(\lambda+p+d)(\lambda+k+d)(\lambda^2 + (\varepsilon+2d+\gamma)\lambda + (\varepsilon+d)(\gamma+d)(1-R_0)) = 0 \quad (6)$$

当 $R_0 < 1$ 时, (6)式的根为负数, 如果 $R_0 < 1$, 那么(6)式存在一正根。因此, 当 $R_0 < 1$ 时, E_0 局部渐近稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定。

为了便于分析模型(2)在地方病平衡点 E^* 的局部渐近稳定, 将模型(2) E^* 处线性化, 令:

$$Y_1(t) = S(t) - S^*, \quad Y_2(t) = V_1(t) - V_1^*, \quad Y_3(t) = V_2(t) - V_2^*, \quad E(t) = E(t) - E^*, \quad Y_5(t) = I(t) - I^*$$

则模型(2)在 E^* 处的线性近似方程为:

$$\begin{cases} Y_1'(t) = -(d + \beta I^*)Y_1(t) - \beta S^*Y_5(t) \\ Y_2'(t) = -(p + d + \theta_1 \beta I^*)Y_2(t) - \theta_1 \beta V_1^*Y_5(t) \\ Y_3'(t) = pY_2(t) - (k + d + \theta_2 \beta I^*)Y_3(t) - \theta_2 \beta V_2^*Y_5(t) \\ Y_4'(t) = \beta I^*Y_1(t) + \theta_1 \beta I^*Y_2(t) + \theta_2 \beta I^*Y_3(t) - (\varepsilon + d)Y_4(t) + (\beta S^* + \theta_1 \beta V_1^* + \theta_2 \beta V_2^*)Y_5(t) \\ Y_5'(t) = \varepsilon Y_4(t) - (\gamma + d)Y_5(t) \end{cases} \quad (7)$$

此时选取函数 $L_1(t) = (Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) + Y_4(t) + Y_5(t))^2$, 将 $L_1(t)$ 沿着系统(7)求导数可得:

$L_1'(t) = -2d(Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) + Y_4(t) + Y_5(t))^2$ 。当 $R_0 > 1$ 时, $L_1' < 0$, 即 E^* 局部渐近稳定。

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(2)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明 选取函数:

$$L_2(t) = \left(S(t) - S_0 - S_0 \ln \frac{S(t)}{S_0} \right) + \left(V_1(t) - V_{10} - V_{10} \ln \frac{V_1(t)}{V_{10}} \right) + \left(V_2(t) - V_{20} - V_{20} \ln \frac{V_2(t)}{V_{20}} \right) + E(t) + \frac{d+\varepsilon}{\varepsilon} I(t)$$

将 $L_2(t)$ 沿着模型(2)求导数:

$$\begin{aligned} L'_2(t) &= S'(t) - \frac{S_0 S'(t)}{S(t)} + V'_1(t) - \frac{V_{10} V'_1(t)}{V_1(t)} + V'_2(t) - \frac{V_{20} V'_2(t)}{V_2(t)} + E'(t) + \frac{d+\varepsilon}{\varepsilon} I'(t) \\ &= A(1-\rho) - dS(t) + A\rho - dV_1(t) - kV_2(t) - dV_2(t) - \frac{(d+\varepsilon)(\gamma+d)}{\varepsilon} I(t) \\ &\quad - \frac{S_0}{S(t)} A(1-\rho) + \beta S_0 I(t) + dS_0 - \frac{V_{10}}{V_1(t)} A\rho + pV_{10} + \theta_1 \beta V_{10} I(t) \\ &\quad + dV_{10} - p \frac{V_{20} V_1(t)}{V_2(t)} + kV_{20} + \theta_2 \beta V_{20} I(t) + dV_{20} \end{aligned}$$

由于 $A(1-\rho) = dS_0$, $A\rho = (d+p)V_{10}$, $pV_{10} = (k+d)V_{20}$, 我们进一步整理得到:

$$\begin{aligned} L'_2(t) &= 2dS_0 - dS(t) - \frac{S_0}{S(t)} dS_0 + 2pV_{10} - dV_1(t) - p \frac{V_{20} V_2(t)}{V_2(t)} - \frac{V_{10}}{V_1(t)} (d+p)V_{10} \\ &\quad - (k+d)V_2(t) - (k+d)V_{20} + \frac{(\varepsilon+d)(\gamma+d)}{\varepsilon} (R_0-1)I(t) \\ &= dS_0 \left(2 - \frac{S(t)}{S_0} - \frac{S_0}{S(t)} \right) + dV_{10} \left(2 - \frac{V_1(t)}{V_{10}} - \frac{V_{10}}{V_1(t)} \right) \\ &\quad + pV_{10} \left(3 - \frac{V_{10}}{V_1(t)} - \frac{V_2(t)}{V_{20}} - \frac{V_{20} V_1(t)}{V_{10} V_2(t)} \right) + \frac{(\varepsilon+d)(\gamma+d)}{\varepsilon} (R_0-1)I(t) \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, 我们得到: $L'_2(t) \leq 0$, 从而得出 E_0 全局渐近稳定。

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)的地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

证明 选取函数:

$$\begin{aligned} L_3(t) &= \left(S(t) - S^* - S^* \ln \frac{S(t)}{S^*} \right) + \left(V_1(t) - V_1^* - V_1^* \ln \frac{V_1(t)}{V_1^*} \right) \\ &\quad + \left(V_2(t) - V_2^* - V_2^* \ln \frac{V_2(t)}{V_2^*} \right) + \left(E(t) - E^* - E^* \ln \frac{E(t)}{E^*} \right) \\ &\quad + \frac{d+\varepsilon}{\varepsilon} \left(I(t) - I^* - I^* \ln \frac{I(t)}{I^*} \right) \end{aligned}$$

求 $L_3(t)$ 沿着模型(2)的导数:

$$\begin{aligned} L'_3(t) &= S'(t) - \frac{S^* S'(t)}{S(t)} + V'_1(t) - \frac{V_1^* V'_1(t)}{V_1(t)} + V'_2(t) - \frac{V_2^* V'_2(t)}{V_2(t)} \\ &\quad + E'(t) - \frac{E^* E'(t)}{E(t)} + \frac{d+\varepsilon}{\varepsilon} \left(I'(t) - \frac{I^* I'(t)}{I(t)} \right) \\ &= A(1-\rho) - dS(t) + A\rho - dV_1(t) - kV_2(t) - \varepsilon E(t) - (\gamma+d)I(t) \\ &\quad - \frac{(d+\varepsilon)(\gamma+d)}{\varepsilon} I(t) - \frac{S^*}{S(t)} A(1-\rho) + \beta S^* I(t) + dS^* - \frac{V_1^*}{V_1(t)} A\rho \\ &\quad + pV_1^* + \theta_1 \beta V_1^* I(t) + dV_1^* - p \frac{V_2^* V_1(t)}{V_2(t)} + kV_2^* + \theta_2 \beta V_2^* I(t) + dV_2^* \end{aligned}$$

$$-\frac{E^*}{E(t)}(\beta S(t)I(t)+\theta_1\beta V_1(t)I(t)+\theta_2\beta V_2(t)I(t))$$

$$-(\varepsilon+d)E^*-(d+\varepsilon)\frac{I^*E(t)}{I(t)}+\frac{(d+\varepsilon)(\gamma+d)}{\varepsilon}I^*$$

由于 $A(1-\rho)=\beta S^*I^*+dS^*$, $(k+d)V_2^*+\theta_2\beta V_2^*I^*=pV_1^*$, $A\rho=pV_1^*+dV_1^*+\theta_1\beta V_1^*I^*$,
 $\beta S^*I^*+\theta_1\beta V_1^*I^*+\theta_2\beta V_2^*I^*=(d+\varepsilon)E^*=\frac{(d+\varepsilon)(\gamma+d)}{\varepsilon}I^*$, 我们整理得到:

$$L'_3(t)=2dS^*+3\beta S^*I^*-dS(t)+3pV_1^*+2dV_1^*+3\theta_1\beta V_1^*I^*-dV_1(t)$$

$$-(k+d)V_2(t)-\frac{(\varepsilon+d)(\gamma+d)}{\varepsilon}I(t)-\frac{S^*}{S(t)}(\beta S^*I^*+dS^*)$$

$$+\beta S^*I^*-(p+d)\frac{V_1^*}{V_1(t)}V_1^*-\theta_1\beta\frac{V_1^*}{V_1(t)}V_1^*I^*+pV_1^*+\theta_1\beta V_1^*I(t)$$

$$-pV_1(t)\frac{V_2^*}{V_2(t)}+\theta_2\beta V_2^*I(t)-\beta\frac{E^*}{E(t)}S(t)I(t)+\theta_2\beta V_2^*I^*$$

$$-\beta\frac{I^*E(t)}{I(t)E^*}S^*I^*-\theta_1\beta V_1^*I^*\frac{I^*E(t)}{I(t)E^*}-\theta_1\theta_2\beta V_2^*I^*\frac{I^*E(t)}{I(t)E^*}$$

进一步整理上式可得:

$$L'_3(t)=dS^*\left(2-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{S(t)}{S^*}\right)+pV_1^*\left(3-\frac{V_1^*}{V_1(t)}-\frac{V_2^*V_1(t)}{V_2(t)V_1^*}\right)$$

$$+dV_1^*\left(2-\frac{V_1^*}{V_1(t)}-\frac{V_1(t)}{V_1^*}\right)+\beta S^*I^*\left(3-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{E(t)I^*}{E^*I(t)}-\frac{E^*S(t)I(t)}{S^*I^*E(t)}\right)$$

$$-\frac{pV_1^*}{V_2^*}V_2(t)+\frac{\theta_2\beta V_2^*I^*V_2(t)}{V_2^*}+\theta_1\beta V_1^*I^*\left(3-\frac{V_1^*}{V_1(t)}-\frac{E(t)I^*}{E^*I(t)}-\frac{I(t)V_1(t)E^*}{I^*V_1^*E(t)}\right)$$

$$+\theta_2\beta V_2^*I^*-\theta_2\beta\frac{E^*}{E(t)}V_2(t)I(t)-\theta_2\beta V_2^*I^*\frac{I^*E(t)}{I(t)E^*}$$

$$=dS^*\left(2-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{S(t)}{S^*}\right)+pV_1^*\left(3-\frac{V_1^*}{V_1(t)}-\frac{V_2(t)}{V_2^*}-\frac{V_2^*V_1(t)}{V_2(t)V_1^*}\right)$$

$$+dV_1^*\left(2-\frac{V_1^*}{V_1(t)}-\frac{V_1(t)}{V_1^*}\right)+\beta S^*I^*\left(3-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{E(t)I^*}{E^*I(t)}-\frac{E^*S(t)I(t)}{S^*I^*E(t)}\right)$$

$$+\theta_1\beta V_1^*I^*\left(3-\frac{V_1^*}{V_1(t)}-\frac{E(t)I^*}{E^*I(t)}-\frac{I(t)V_1(t)E^*}{I^*V_1^*E(t)}\right)$$

$$+\theta_2\beta V_2^*I^*\left(1+\frac{V_2(t)}{V_2^*}-\frac{E^*V_2(t)I(t)}{E(t)V_2^*I^*}-\frac{I^*E(t)}{I(t)E^*}\right)$$

得出: 当 $R_0 > 1$ 时, $L'_3(t) \leq 0$, 即 E^* 全局渐近稳定。

2.3. 数值模拟

本小节通过数值模拟验证本文主要结论。(1) 当 $R_0 = 0.0021 < 1$ 时, 根据传染病的传播机理, 假设选取的主要参数为: $A=1$, $\beta=0.00003$ [15], $\rho=0.08$, $\theta_1=0.05$, $\theta_2=0.01$, $d=0.02$ [15], $p=0.05$,

$\varepsilon = 0.03$, $\gamma = 0.07$ [15], $k = 0.05$ 。图 1 表示潜伏者 $E(t)$ 的轨线, 图 2 表示感染者 $I(t)$ 的轨线, 说明了 $R_0 < 1$ 时, 疾病将灭亡。

(2) 当 $R_0 = 19.4717 > 1$ 时, 选取的主要参数为: $A = 1$, $\beta = 0.003$, $\rho = 0.08$, $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 = 0.01$, $d = 0.02$ [15], $p = 0.05$, $\varepsilon = 0.03$, $\gamma = 0.07$ [15], $k = 0.05$ 。图 3 表示潜伏者 $E(t)$ 与感染者 $I(t)$ 的轨线, 说明了 $R_0 > 1$ 时, 疾病将持久。

(3) 当 $R_0 > 1$ 时, 选取的主要参数为: $A = 1$, $\beta = 0.003$, $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 = 0.01$, $d = 0.02$, $\varepsilon = 0.03$, $\gamma = 0.07$ [15], $k = 0.05$ 。图 4 表示 $R_0 > 1$ 时增强第一针和第二针疫苗接种对潜伏者 $E(t)$ 的影响轨线, 图 5 表示 $R_0 > 1$ 时增强第一针和第二针疫苗接种对感染者 $I(t)$ 的影响轨线。

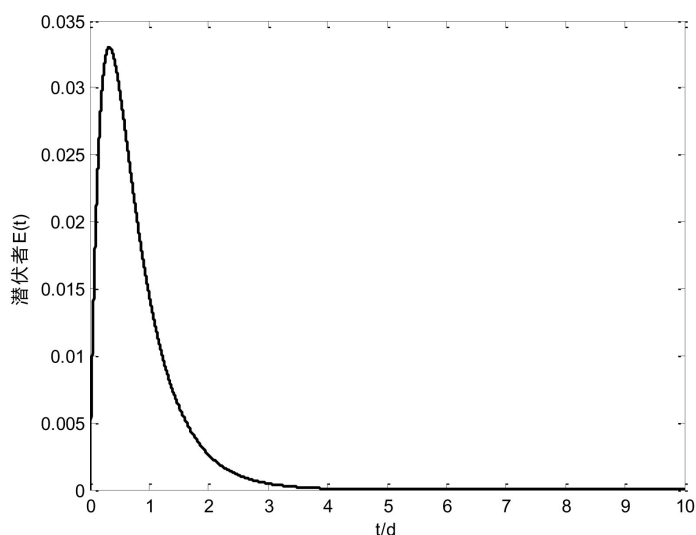


Figure 1. The trajectory of the latent individuals $E(t)$ when $R_0 < 1$

图 1. $R_0 < 1$ 时潜伏者 $E(t)$ 的轨线

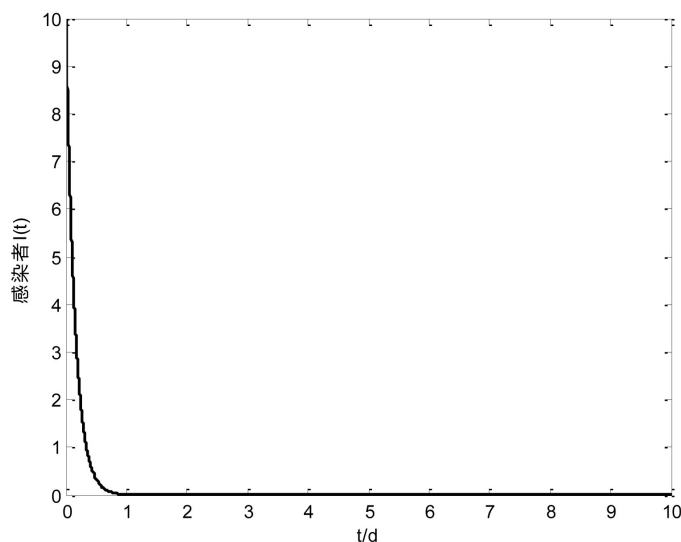


Figure 2. The trajectory of the infected individuals $I(t)$ when $R_0 < 1$

图 2. $R_0 < 1$ 时感染者 $I(t)$ 的轨线

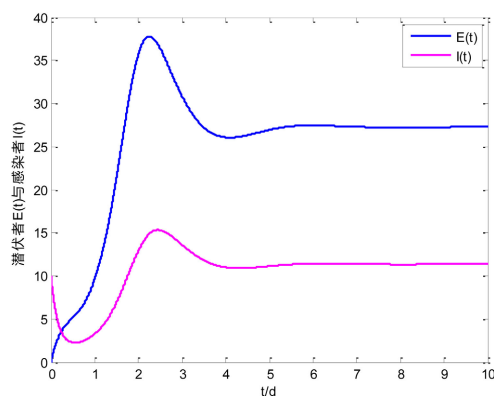


Figure 3. The trajectory between the latent individuals $E(t)$ and the infected individuals $I(t)$ when $R_0 > 1$

图 3. $R_0 > 1$ 时潜伏者 $E(t)$ 与感染者 $I(t)$ 的轨线

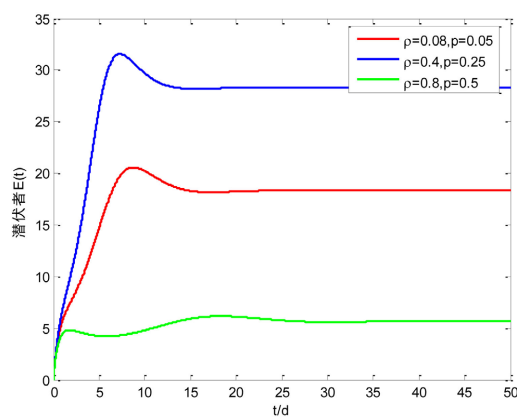


Figure 4. Enhance the impact trajectory of the first and second doses of vaccination on latent individuals $E(t)$ when $R_0 > 1$

图 4. $R_0 > 1$ 时增强第一针和第二针疫苗接种对潜伏者 $E(t)$ 的影响轨线

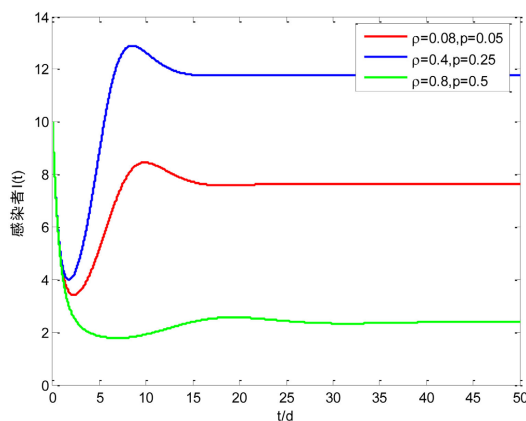


Figure 5. Enhance the impact trajectory of the first and second doses of vaccination on infected individuals $I(t)$ when $R_0 > 1$

图 5. $R_0 > 1$ 时增强第一针和第二针疫苗接种对感染者 $I(t)$ 的影响轨线

图 4 和图 5 显示：在疾病流行期间，假设对易感人群的第一针疫苗接种率从 $\rho = 0.08$ 提高到 $\rho = 0.4$ 或 $\rho = 0.8$ ，第二针疫苗接种率从 $p = 0.05$ 提高到 $p = 0.25$ 或 $p = 0.5$ ，也就是说对易感人群的第一针和第二针疫苗接种率提高了 5 倍或者 10 倍，潜伏者和感染者明显得到控制，且传染病达到的波峰也会推迟。进一步说明了增强第一针和第二针疫苗接种预防策略，可以减少传染病的传播。

3. 结语

建立了一类具有两针疫苗接种和潜伏期的传染病模型，得到了模型的基本再生数和平衡点存在的条件，基于基本再生数 R_0 ，分析了无病平衡点和地方病平衡点的渐近稳定性，并通过数值模拟说明了增强第一针和第二针疫苗接种能够减少传染病的传播。

研究局限性：本研究仅仅探讨了传染病易感者实施第一针疫苗接种后再次被感染的可能，需对易感者有必要实施第二针疫苗接种的传染病模型。在研究具有疫苗接种的传染病模型时易感者和患病者的异质性、疫苗接种的有效性等因素影响传染病的传播，也进一步影响传染病模型的建立，本文建立的模型也具有一定的局限性。

基金项目

新疆维吾尔自治区自然科学基金(2022D01A40)。

参考文献

- [1] 武文斌, 任雪, 张冉. 具有时滞的离散扩散疫苗接种模型的行波解[J]. 数学物理学报, 2025, 45(3): 858-874.
- [2] Delacruz, W.P., Savona, M.R., Thornton, J.A. and Danaher, P.J. (2020) Evidence of Vaccinia Dissemination despite Lack of Major Reaction Following Smallpox Vaccination. *Vaccine*, **38**, 1589-1592. <https://doi.org/10.1016/j.vaccine.2019.12.046>
- [3] Agaba, G.O., Kyrychko, Y.N. and Blyuss, K.B. (2017) Dynamics of Vaccination in a Time-Delayed Epidemic Model with Awareness. *Mathematical Biosciences*, **294**, 92-99. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.09.007>
- [4] 薛春荣. 一类具有脉冲免疫和潜伏的 SEIR 传染病模型的全局分析[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2013, 43(3): 367-370.
- [5] Lu, Z., Chi, X. and Chen, L. (2002) The Effect of Constant and Pulse Vaccination on SIR Epidemic Model with Horizontal and Vertical Transmission. *Mathematical and Computer Modelling*, **36**, 1039-1057. [https://doi.org/10.1016/s0895-7177\(02\)00257-1](https://doi.org/10.1016/s0895-7177(02)00257-1)
- [6] 张真真, 李盈科, 赵睿轩. 具有疫苗接种和年龄结构的疟疾传播模型的动力学行为[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2024, 23(4): 288-296.
- [7] 韩梦洁, 刘俊利. 具有不完全接种的反应扩散禽流感模型[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(10): 106-121.
- [8] 刘胜强, 刘泽含, 骈晓宇. 具有媒体信息和不完善疫苗的传染病模型[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2026, 44(2): 164-174.
- [9] Lv, W., Ke, Q. and Li, K. (2020) Dynamical Analysis and Control Strategies of an SIVS Epidemic Model with Imperfect Vaccination on Scale-Free Networks. *Nonlinear Dynamics*, **99**, 1507-1523. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05371-1>
- [10] Zhao, Z., Pang, L. and Chen, Y. (2015) Nonsynchronous Bifurcation of SIRS Epidemic Model with Birth Pulse and Pulse Vaccination. *Nonlinear Dynamics*, **79**, 2371-2383. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1818-y>
- [11] Verguet, S., Johri, M., Morris, S.K., Gauvreau, C.L., Jha, P. and Jit, M. (2015) Controlling Measles Using Supplemental Immunization Activities: A Mathematical Model to Inform Optimal Policy. *Vaccine*, **33**, 1291-1296. <https://doi.org/10.1016/j.vaccine.2014.11.050>
- [12] Chen, Z.W. and Xu, Z.T. (2019) A Delayed Diffusive Influenza Model with Two-Strain and Two Vaccinations. *Applied Mathematics and Computation*, **349**, 439-453. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.12.065>
- [13] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [14] Hu, L., Wang, S.F., Zheng, T.T., Hu, Z., Kang, Y., Nie, L., et al. (2022) The Effects of Migration and Limited Medical Resources of the Transmission of SARS-CoV-2 Model with Two Patches. *Bulletin of Mathematical Biology*, **84**, Article

No. 55. <https://doi.org/10.1007/s11538-022-01010-w>

- [15] Kaymakamzade, B. and Hincal, E. (2018) Two-Strain Epidemic Model with Two Vaccinations and Two Time Delayed. *Quality & Quantity*, **52**, 695-709. <https://doi.org/10.1007/s11135-017-0647-8>