

时间分数阶阻尼波动方程的差分方法

黄欣怡

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年7月25日; 录用日期: 2026年8月17日; 发布日期: 2026年8月27日

摘要

本文研究了一类时间分数阶阻尼波动方程问题的数值解法。针对该模型, 引入了L1公式离散Caputo分数阶导数, 并将原二阶时间方程改写为一阶系统。在此基础上, 对普通时间导数采用半层平均隐式离散, 对空间二阶导数分别采用二阶中心差分和四阶紧致差分, 建立标准二阶格式和四阶紧致格式。进一步给出两类格式的矩阵形式, 证明每一时间层线性系统均唯一可解。利用L1权重的正定性和离散能量法, 证明所得格式在离散范数意义下无条件稳定。最后, 通过数值算例验证不同分数阶阶数下的时间收敛阶和空间收敛阶, 计算结果与理论分析一致。

关键词

分数阶阻尼波动方程, L1格式, 紧格式

Difference Methods for Time-Fractional Damped Wave Equations

Xinyi Huang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: July 25, 2026; accepted: August 17, 2026; published: August 27, 2026

Abstract

This paper investigates an effective numerical method for a class of time-fractional damped wave equations. For the considered model, the L1 formula is first introduced to discretize the Caputo fractional derivative, and the original second-order-in-time equation is reformulated as a first-order system. On this basis, a half-time-level averaged implicit discretization is applied to the standard time derivative, while the second-order spatial derivative is approximated by the second-order central difference scheme and the fourth-order compact difference scheme, respectively. Consequently, a standard second-order scheme and a fourth-order compact scheme are constructed. The matrix forms

of the two schemes are further derived, and it is proved that the linear system at each time level admits a unique solution. By using the positive definiteness of the L1 weights and the discrete energy method, the unconditional stability of the proposed schemes is established in the sense of discrete norms. Finally, numerical examples are presented to verify the temporal and spatial convergence orders for different fractional orders. The computational results are consistent with the theoretical analysis.

Keywords

Fractional Damped Wave Equation, L1 Scheme, Compact Scheme

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

波动方程是描述声波以及弹性波等波传播过程的重要数学模型，在地球物理勘探、多孔介质声学、材料科学等领域具有广泛应用[1][2]。对于理想无损介质，经典二阶波动方程通常能够较好地描述波的传播行为。然而，在黏弹性介质、多孔介质、软物质和生物组织中，波在传播过程中往往伴随明显的耗散、弥散和历史记忆效应[3]。分数阶微分方程由于具有非局部性和记忆性，已成为描述反常扩散、黏弹性响应、声学衰减和复杂介质传播过程的重要工具[4][5]。

近年来，针对分数阶扩散方程、扩散波方程和分数阶波动方程，已有大量数值方法被提出，包括有限差分方法[6]、有限元方法[7]、谱方法[8]以及卷积求积方法[9]等。其中，Cao 和 Roul [9]针对带奇异源项和非光滑数据的时间分数阶 Cattaneo 方程，构造并分析了基于卷积求积的高阶时间推进格式；Kaltenbacher 和 Schlötl [10]在光声和热声成像背景下研究了分数阶阻尼波方程，并构造了适用于正问题求解和伴随梯度计算的时间推进格式。

在本文中，我们针对一类时间分数阶阻尼波动方程，构造了两种离散格式：第一种格式将时间 L1 离散和空间中心差分联系在一起；第二种格式通过对方程作用紧算子，将空间精度提高到四阶。然后，分别证明了两种格式的稳定性与收敛性。最后，通过数值实验验证两种格式的收敛阶。

本文结构如下：第 2 节介绍问题模型，第 3 节给出一些预备知识，第 4、5 节分别构造了标准差分格式和紧致格式，并进行了相应的理论分析，第 6 节分析了算法的计算复杂度，第 7 节给出了数值实验结果。最后，第 8 节总结了全文主要内容。

2. 问题模型

考虑如下分数阶阻尼波动方程：

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) - b {}^C D_t^\alpha u_{xx}(x,t) = f(x,t), (x,t) \in (0,L) \times (0,T], \quad (1)$$

其中 $c > 0, b > 0, 0 < \alpha < 1$ ， ${}^C D_t^\alpha$ 表示 Caputo 分数阶导数，定义如下[11]：

$${}^C D_t^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \phi'(s) ds.$$

初始条件和边界条件分别为：

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) &= v_0(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) &= \psi_1(t), & u(L, t) &= \psi_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2)$$

若边界条件非齐次，可作边界提升

$$\ell(x, t) = \frac{L-x}{L}\psi_1(t) + \frac{x}{L}\psi_2(t), \quad w(x, t) = u(x, t) - \ell(x, t).$$

由于 $\ell_{xx} = 0$ ，函数 w 满足齐次边界条件，且右端项变为

$$F(x, t) = f(x, t) - \ell_t(x, t).$$

因此下文只需讨论齐次边界情形。为简化记号，仍记未知函数为 u ，右端项为 f 。于是下文考虑方程(1)、初始条件(2)及边界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 。

3. 预备知识

3.1. 网格与差分算子

取空间网格和时间网格为 $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, M$ 和 $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N$ ，其中 $h = \frac{L}{M}$ 和 $\tau = \frac{T}{N}$ 分别表示

均匀空间步长和时间步长。记 $\Omega_h = \{x_i | 0 \leq i \leq M\}$ ， $\Omega_\tau = \{t_n | 0 \leq n \leq N\}$ ，定义网格函数空间

$U_{h\tau} = \{w_i^n | 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N\}$ 以及满足齐次边界条件的空间网格函数空间

$U_h = \{w = (w_0, w_1, \dots, w_M)^T | w_0 = w_M = 0\}$ 。对任意 $w \in U_{h\tau}$ ，定义下述差分算子：

$$\begin{aligned} \delta_t w_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{\tau}, & \bar{w}_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{w_i^n + w_i^{n-1}}{2}, \\ \delta_x w_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{h}, & \delta_x^2 w_i^n &= \frac{w_{i-1}^n - 2w_i^n + w_{i+1}^n}{h^2}, \end{aligned}$$

和紧致平均算子

$$(\mathcal{A}w)_i = \begin{cases} \frac{1}{12}(w_{i-1} + 10w_i + w_{i+1}), & 1 \leq i \leq M-1, \\ w_i, & i = 0, M. \end{cases}$$

显然，对 $1 \leq i \leq M-1$ ，有 $\mathcal{A}w_i = \left(I + \frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)w_i$ 。

引理 3.1. [12]-[14] 对充分光滑的标量函数 g 和空间函数 q ，有

$$\frac{g(t_n) - g(t_{n-1})}{\tau} - \frac{g'(t_n) + g'(t_{n-1}))}{2} = O(\tau^2), \quad (3)$$

$$q_{xx}(x_i) - \delta_x^2 q(x_i) = O(h^2), \quad (4)$$

$$\mathcal{A}q_{xx}(x_i) - \delta_x^2 q(x_i) = O(h^4). \quad (5)$$

3.2. 离散内积及其基本性质

对任意 $u, v \in U_h$ ，定义

$$(u, v)_h = h \sum_{i=1}^{M-1} u_i v_i, \quad \|u\|_h = (u, u)_h^{1/2},$$

$$(u, v)_{1,h} = h \sum_{i=1}^M \left(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) \left(\delta_x v_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad |u|_{1,h} = (u, u)_{1,h}^{1/2}.$$

引理 3.2. [12] [15] [16] 对任意 $u, v \in U_h$, 有

$$(\delta_x^2 u, v)_h = -(u, v)_{1,h}, \quad \|u\|_\infty \leq \frac{\sqrt{L}}{2} |u|_{1,h}, \quad |u|_{1,h} \leq \frac{2}{h} \|u\|_h.$$

引理 3.3. [15] [17] 算子 $\mathcal{A}$ 在 U_h 上自伴, 即 $(\mathcal{A}u, v)_h = (u, \mathcal{A}v)_h$, 并且 $\frac{2}{3} \|u\|_h^2 \leq (\mathcal{A}u, u)_h \leq \|u\|_h^2$.

3.3. L1 离散公式

对 $0 < \alpha < 1$, 定义 L1 权重 $a_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $a_k > 0$ 且 $a_k > a_{k+1}$. Caputo 导数在 t_n 处的 L1 离散为[18]

$$D_\tau^\alpha w_i^n = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^n a_{n-k} (w_i^k - w_i^{k-1}). \quad (6)$$

定义半层算子

$$D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} w_i = \frac{1}{2} (D_\tau^\alpha w_i^n + D_\tau^\alpha w_i^{n-1}), \quad D_\tau^\alpha w_i^0 = 0.$$

若 w 关于时间充分光滑, 则有[6]

$${}^C D_t^\alpha w(t_n) - D_\tau^\alpha w^n = O(\tau^{2-\alpha}). \quad (7)$$

引理 3.4. [19] 对任意实向量序列 $\{z^n\}_{n=0}^m$, 有

$$\sum_{n=1}^m \left(D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} z, \delta_t z^{n-\frac{1}{2}} \right)_h \geq 0,$$

进一步, 对任意 $u^n \in U_h$, 有

$$\sum_{n=1}^m \left(-\delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} u, \delta_t u^{n-\frac{1}{2}} \right)_h \geq 0.$$

4. 标准差分格式

4.1. 格式的建立

令 $v = u_t$, 则(1)式等价于

$$u_t = v, \quad v_t - c^2 u_{xx} - b^C D_t^\alpha u_{xx} = f. \quad (8)$$

在时间半层 $t_{n-\frac{1}{2}}$ 处, 对时间导数采用梯形公式, 对空间二阶导数采用中心差分, 对分数阶项采用半层

L1 公式, 得到带截断误差的离散关系:

$$\delta_t U_i^{n-\frac{1}{2}} = \bar{V}_i^{n-\frac{1}{2}} + R_{1,i}^{n-\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$\delta_t V_i^{n-\frac{1}{2}} - c^2 \delta_x^2 \bar{U}_i^{n-\frac{1}{2}} - b \delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} U_i = \bar{f}_i^{n-\frac{1}{2}} + R_{2,i}^{n-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

其中 $U_i^n = u(x_i, t_n)$, $V_i^n = v(x_i, t_n)$ 。结合(3) (4) (7)式, 可得截断误差估计

$$\left\| R_1^{n-\frac{1}{2}} \right\|_h + \left\| R_2^{n-\frac{1}{2}} \right\|_h \leq C(\tau^{2-\alpha} + h^2), \quad (11)$$

略去截断误差，并用小写字母表示数值解，得到标准差分格式：求 u_i^n, v_i^n ，使得

$$\delta_t u_i^{n-\frac{1}{2}} = \bar{v}_i^{n-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (12)$$

$$\delta_t v_i^{n-\frac{1}{2}} - c^2 \delta_x^2 \bar{u}_i^{n-\frac{1}{2}} - b \delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} u_i = \bar{f}_i^{n-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (13)$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad v_i^0 = v_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad (14)$$

$$u_0^n = u_M^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (15)$$

4.2. 唯一可解性

定理 4.1. 差分格式(12)~(15)在每一时间层唯一可解。

证明：由(12)式消去 v^n ，并将 $D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} u$ 中包含 u^n 的项提出，可得关于 u^n 的线性系统

$$\left[\frac{2}{\tau^2} I + \frac{c^2 + b\lambda_\alpha}{2} A_h \right] u^n = F^n, \quad \lambda_\alpha = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

其中 A_h 为 $-\delta_x^2$ 对应的对称正定矩阵， F^n 仅含已知量。对任意非零向量 w ，

$$\left(\left[\frac{2}{\tau^2} I + \frac{c^2 + b\lambda_\alpha}{2} A_h \right] w, w \right)_h > 0.$$

故系数矩阵对称正定，从而 u^n 唯一确定。再由(12)式唯一确定 v^n 。

4.3. 稳定性

定理 4.2. 设 $\{u^n, v^n\}_{n=0}^N$ 为格式(12)~(15)的解，并定义

$$E^n = \frac{1}{2} \|v^n\|_h^2 + \frac{c^2}{2} |u^n|_{1,h}^2.$$

则对任意 $1 \leq m \leq N$ ，有

$$E^m \leq C_T \left(E^0 + \tau \sum_{n=1}^m \left\| \bar{f}^{n-\frac{1}{2}} \right\|_h^2 \right), \quad (16)$$

其中 C_T 与 h 、 τ 无关。因此格式无条件稳定。

证明：将(13)式与 $\bar{v}^{n-\frac{1}{2}} = \delta_t u^{n-\frac{1}{2}}$ 作离散内积。利用

$$\left(\delta_t v^{n-\frac{1}{2}}, \bar{v}^{n-\frac{1}{2}} \right)_h = \frac{\|v^n\|_h^2 - \|v^{n-1}\|_h^2}{2\tau},$$

以及引理 3.2，有

$$-\left(\delta_x^2 \bar{u}^{n-\frac{1}{2}}, \delta_t u^{n-\frac{1}{2}} \right)_h = \frac{|u^n|_{1,h}^2 - |u^{n-1}|_{1,h}^2}{2\tau}.$$

又由引理 3.4,

$$\sum_{n=1}^m \left(-\delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} u, \delta_t u^{n-\frac{1}{2}} \right)_h \geq 0.$$

因此对 $n=1, \dots, m$ 求和并乘以 τ , 得到

$$E^m - E^0 \leq \tau \sum_{n=1}^m \left(\bar{f}^{n-\frac{1}{2}}, \bar{v}^{n-\frac{1}{2}} \right)_h.$$

再利用 Cauchy-Schwarz 不等式、Young 不等式和离散 Grünwall 不等式, 即得不等式(16)。

4.4. 收敛性

定理 4.3. 设真解 u 足够光滑, 且数值初值精确给定。记

$$e_u^n = U^n - u^n, \quad e_v^n = V^n - v^n.$$

则对任意 $1 \leq m \leq N$, 有

$$\|e_v^m\|_h + \|e_u^m\|_h \leq C_T (\tau^{2-\alpha} + h^2). \quad (17)$$

证明: 将(9)式和(10)式分别与(12)式和(13)式相减, 得到

$$\begin{aligned} \delta_t e_u^{n-\frac{1}{2}} &= \bar{e}_v^{n-\frac{1}{2}} + R_1^{n-\frac{1}{2}}, \\ \delta_t e_v^{n-\frac{1}{2}} - c^2 \delta_x^2 \bar{e}_u^{n-\frac{1}{2}} - b \delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} e_u &= R_2^{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由定理 4.2 和(11)式, 可得

$$\|e_v^m\|_h^2 + \|e_u^m\|_{1,h}^2 \leq C_T \tau \sum_{n=1}^m \left(\|R_1^{n-\frac{1}{2}}\|_h^2 + \|R_2^{n-\frac{1}{2}}\|_h^2 \right) \leq C_T (\tau^{2-\alpha} + h^2)^2,$$

再使用离散 Poincaré 不等式即可得(17)。

5. 紧致差分格式

5.1. 格式的建立

对系统(8)的第二个式子作用算子 $\mathcal{A}$, 并采用与标准格式相同的时间离散, 得到带截断误差的关系:

$$\mathcal{A} \delta_t U_i^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{A} \bar{V}_i^{n-\frac{1}{2}} + \tilde{R}_{1,i}^{n-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$\mathcal{A} \delta_t V_i^{n-\frac{1}{2}} - c^2 \delta_x^2 \bar{U}_i^{n-\frac{1}{2}} - b \delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} U_i = \mathcal{A} \bar{f}_i^{n-\frac{1}{2}} + \tilde{R}_{2,i}^{n-\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

其中, 由(7)和(5), 可得

$$\left\| \tilde{R}_1^{n-\frac{1}{2}} \right\|_h + \left\| \tilde{R}_2^{n-\frac{1}{2}} \right\|_h \leq C (\tau^{2-\alpha} + h^4). \quad (20)$$

略去截断误差, 得到紧致差分格式:

$$\mathcal{A} \delta_t u_i^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{A} \bar{v}_i^{n-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (21)$$

$$\mathcal{A} \delta_t v_i^{n-\frac{1}{2}} - c^2 \delta_x^2 \bar{u}_i^{n-\frac{1}{2}} - b \delta_x^2 D_\tau^{\alpha, n-\frac{1}{2}} u_i = \mathcal{A} \bar{f}_i^{n-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (22)$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad v_i^0 = v_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad (23)$$

$$u_0^n = u_M^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (24)$$

5.2. 唯一可解性

定理 5.1. 紧致格式(21)~(24)在每一时间层唯一可解。

证明: 类似定理 4.1 的证明, 消去 v^n 后, 关于 u^n 的系数矩阵为

$$\frac{2}{\tau^2} \mathcal{A} + \frac{c^2 + b\lambda_\alpha}{2} A_h,$$

由引理 3.3, $\mathcal{A}$ 对称正定; 同时 A_h 对称正定。因此上述矩阵对称正定, 从而可逆, 结论成立。

5.3. 稳定性

定理 5.2. 设 $\{u^n, v^n\}_{n=0}^N$ 为格式(21)~(24)的解, 定义

$$E_c^n = \frac{1}{2} (\mathcal{A}v^n, v^n)_h + \frac{c^2}{2} \|u^n\|_{1,h}^2.$$

则对任意 $1 \leq m \leq N$, 有

$$E_c^m \leq C_T \left(E_c^0 + \tau \sum_{n=1}^m \left\| \bar{f}^{n-\frac{1}{2}} \right\|_h^2 \right), \quad (25)$$

其中 C_T 与 h 、 τ 无关, 因此紧致格式无条件稳定。

证明: 将(22)式与 $\bar{v}^{n-\frac{1}{2}} = \delta_t u^{n-\frac{1}{2}}$ 作离散内积。由算子 $\mathcal{A}$ 的自伴性,

$$\left(\mathcal{A} \delta_t v^{n-\frac{1}{2}}, \bar{v}^{n-\frac{1}{2}} \right)_h = \frac{(\mathcal{A}v^n, v^n)_h - (\mathcal{A}v^{n-1}, v^{n-1})_h}{2\tau}.$$

其余两项的处理与定理 4.2 相同。由引理 3.2、Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得(25)式。

5.4. 收敛性

定理 5.3. 设真解 u 足够光滑, 且数值初值精确给定, 则紧致格式满足

$$\|e_v^m\|_h + \|e_u^m\|_h \leq C_T (\tau^{2-\alpha} + h^4), \quad 1 \leq m \leq N. \quad (26)$$

证明: 将紧致差分格式(21)~(22)与(18)~(19)相减, 得到相应的误差方程。按定理 5.2 的能量估计过程, 并结合(20)式的截断误差估计, 得

$$\|e_v^m\|_h^2 + \|e_u^m\|_{1,h}^2 \leq C_T (\tau^{2-\alpha} + h^4)^2,$$

再利用离散 Poincaré 不等式即可得(26)。

6. 算法计算复杂度

记空间内部节点数为 $J = M-1$ 。两种格式在每个时间层均需计算 $L1$ 历史卷积, 并求解一个系数矩阵不随时间变化的三对角线性系统。

6.1. $L1$ 历史项的计算量与存储量

在第 n 个时间层, $L1$ 离散(6)包含前 n 个时间增量。对全部 J 个空间节点直接计算历史项需要 $O(Jn)$

次运算。因此,推进至第 N 个时间层的总历史卷积计算量为 $\sum_{n=1}^N O(Jn) = O(JN^2)$ 。若仅关注时间方向,则通常简写为 $O(N^2)$ 。由于进行数值实验时还需保存全部历史差分 $U^k - U^{k-1}, 1 \leq k \leq N$, 故历史数组的存储量为 $O(JN)$ 。采用双精度浮点数时,该数组约占 $\frac{8JN}{1024^2}$ MB, 因此,在时间层数较大时,直接 L1 实现同时面临计算量和内存增长问题。

6.2. 两类格式的单步成本

标准格式在第 n 层的非历史运算主要包括若干三对角矩阵与向量乘法以及一次三对角线性系统求解,成本均为 $O(J)$ 。由于系数矩阵与时间层无关,可在计算开始时仅分解一次,随后每层进行前后代入。而紧致格式还需作用紧致平均矩阵

$$C_h = I - \frac{h^2}{12} A_h,$$

因此单步中比标准格式多若干次三对角矩阵与向量乘法,但这些额外运算仍为 $O(J)$ 。于是两类格式的渐近复杂度相同,均为 $O(JN^2)$ 计算量、 $O(JN)$ 存储量。两者的主要差别体现在常数因子和达到给定空间精度所需的节点数。紧致格式具有四阶空间精度,通常可在较粗的空间网格上达到与标准格式相同的误差,因此在同精度比较中可能显著降低总计算时间和历史存储。

7. 数值实验

本节通过数值算例验证前文所构造隐式差分格式的有效性。为衡量数值误差,定义离散 L^2 范数为

$$\|e^n\|_{L_h^2} = \left(h \sum_{i=1}^{M-1} |U_i^n - u(x_i, t_n)|^2 \right)^{1/2},$$

其中 U_i^n 为数值解, $u(x_i, t_n)$ 为精确解。本文取所有时间层上的最大误差作为误差指标,即

$$E_{L^2} = \max_{0 \leq n \leq N} \|e^n\|_{L_h^2}.$$

时间收敛阶和空间收敛阶定义分别为:

$$\text{Order}_\tau = \log_2 \frac{E_{L^2}(\tau)}{E_{L^2}(\tau/2)}, \quad \text{Order}_h = \log_2 \frac{E_{L^2}(h)}{E_{L^2}(h/2)}.$$

7.1. 标准格式收敛阶验证

考虑如下分数阶阻尼波动方程

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - {}^C D_t^\alpha u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1],$$

边界条件为齐次 Dirichlet 边界条件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

选取精确解为

$$u(x, t) = \left(\sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \right) t^2,$$

源项 $f(x, t)$ 由上述精确解代入方程得到。

为了检验时间收敛阶，固定足够细的空间网格，使空间误差相对于时间误差可以忽略。取

$$M = 2000, \quad N = 20, 40, 80, 160, \quad \tau = \frac{1}{N}.$$

分别测试 $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ 三种情形，对应的理论时间收敛阶分别为 $2 - \alpha = 1.9, 1.5, 1.1$ ，对应的数值结果见表 1。

Table 1. Time errors and convergence order of the standard scheme under different α
表 1. 标准格式在不同 α 下的时间误差及收敛阶

N	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	E_{L^2}	Order $_{\tau}$	E_{L^2}	Order $_{\tau}$	E_{L^2}	Order $_{\tau}$
20	1.8537e-4	--	2.4366e-3	--	1.5939e-2	--
40	5.4498e-5	1.7662	8.7870e-4	1.4714	7.5029e-3	1.0870
80	1.5881e-5	1.7789	3.1540e-4	1.4782	3.5166e-3	1.0933
160	4.6265e-6	1.7793	1.1279e-4	1.4836	1.6446e-3	1.0965

下面验证标准格式的空间收敛阶，理论空间收敛阶为二阶。为减小时间误差对空间收敛阶的影响，随着空间网格加密同步减小时间步长。取

$$M = 10, 20, 40, 80, \quad h = \frac{1}{M},$$

对应地，取

$$N = M^2, \quad \tau = \frac{1}{N},$$

数值结果见表 2。

Table 2. Space errors and convergence order of the standard scheme under different α
表 2. 标准格式在不同 α 下的空间误差及收敛阶

M	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	E_{L^2}	Order $_h$	E_{L^2}	Order $_h$	E_{L^2}	Order $_h$
10	1.2476e-2	--	1.2768e-2	--	1.4821e-2	--
20	3.0807e-3	2.0179	3.1327e-3	2.0271	3.5867e-3	2.0469
40	7.6780e-4	2.0044	7.7820e-4	2.0092	8.7783e-4	2.0306
80	1.9180e-4	2.0011	1.9408e-4	2.0035	2.1580e-4	2.0243

由表 1 和表 2 可以看出，数值实验观测到的时间收敛阶和空间收敛阶均接近理论收敛阶，验证了标准格式满足 $E_{L^2} = O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$ 。

7.2. 紧致格式收敛阶验证

本算例考虑的方程、边界条件和精确解均与标准格式算例相同。首先验证紧致格式的时间收敛阶，取与标准格式相同的网格，分别测试 $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ 三种情形，对应的理论时间收敛阶分别为

$2-\alpha=1.9, 1.5, 1.1$ ，紧致格式的时间误差和观测收敛阶见表 3。

Table 3. Time errors and convergence order of the compact scheme under different α

表 3. 紧致格式在不同 α 下的时间误差及收敛阶

N	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	E_{L^2}	Order $_{\tau}$	E_{L^2}	Order $_{\tau}$	E_{L^2}	Order $_{\tau}$
20	1.8527e-4	--	2.4365e-3	--	1.5939e-2	--
40	5.4407e-5	1.7678	8.7858e-4	1.4716	7.5027e-3	1.0871
80	1.5790e-5	1.7847	3.1528e-4	1.4785	3.5163e-3	1.0933
160	4.5366e-6	1.7994	1.1267e-4	1.4846	1.6443e-3	1.0966

下面验证空间收敛阶。由于四阶紧格式的理论误差为 $E_{L^2} = O(\tau^{2-\alpha} + h^4)$ ，为了减小时间误差对空间收敛阶的影响，空间测试中令时间步长随空间步长变化，使 $\tau^{2-\alpha} \lesssim h^4$ ，具体取

$$M = 4, 8, 16, 32, \quad h = \frac{1}{M},$$

并令

$$N = \left\lceil M^{\frac{4}{2-\alpha}} \right\rceil, \quad \tau = \frac{1}{N}.$$

空间方向的数值误差和观测收敛阶见表 4。

Table 4. Space errors and convergence order of the compact scheme under different α

表 4. 紧致格式在不同 α 下的空间误差及收敛阶

M	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	E_{L^2}	Order $_h$	E_{L^2}	Order $_h$	E_{L^2}	Order $_h$
4	9.6679e-3	--	1.0140e-2	--	1.0685e-2	--
8	5.6248e-4	4.1033	5.9099e-4	4.1008	6.2393e-4	4.0981
16	3.4608e-5	4.0226	3.6320e-5	4.0243	3.8371e-5	4.0233
32	2.1576e-6	4.0036	2.2611e-6	4.0057	2.3900e-6	4.0049

表 3 和表 4 的结果共同验证了四阶紧格式满足 $E_{L^2} = O(\tau^{2-\alpha} + h^4)$ ，与前文理论分析一致。

7.3. 初始弱奇异解下的鲁棒性验证

为考察格式对非光滑时间行为的适应性，取

$$u(x, t) = \left(\sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \right) (t^2 + t^{2.2}),$$

同样地，固定 $M = 2000$ ，取 $N = 20, 40, 80, 160$ ，结果见表 5。

两种格式在弱奇异解下仍表现出稳定的误差下降趋势，且在相同空间网格下误差几乎相同，说明此时主要误差仍来自时间离散。对于 $\alpha = 0.1$ ，观测阶由光滑情形的约 1.8 降至约 1.19，表明初始弱奇异性

会明显削弱经典 L1 格式的高阶时间精度。对于 $\alpha = 0.5$ 和 $\alpha = 0.9$ ，观测阶分别约为 1.45 和 1.10，仍接近 $2 - \alpha$ 。因此，该格式对弱奇异解保持收敛和稳定，但在较小 α 下可能出现较显著的阶退化，这与非光滑数据下经典 L1 方法的已知特征一致[20]。

Table 5. Time errors and observation convergence orders of the two schemes under weak singular solutions
表 5. 弱奇异解下两种格式的时间误差及观测收敛阶

α	N	标准格式		紧致格式	
		E_{L^2}	Order _{τ}	E_{L^2}	Order _{τ}
$\alpha = 0.1$	20	3.5269e-3	--	3.5269e-3	--
	40	1.5840e-3	1.1548	1.5840e-3	1.1548
	80	7.0118e-4	1.1757	7.0119e-4	1.1757
	160	3.0843e-4	1.1848	3.0844e-4	1.1848
$\alpha = 0.5$	20	5.6373e-3	--	5.6369e-3	--
	40	2.0627e-3	1.4505	2.0623e-3	1.4506
	80	7.5468e-4	1.4506	7.5433e-4	1.4510
	160	2.7643e-4	1.4489	2.7608e-4	1.4471
$\alpha = 0.9$	20	3.3588e-2	--	3.3587e-2	--
	40	1.5825e-3	1.0857	1.5825e-3	1.0857
	80	7.4248e-3	1.0918	7.4243e-3	1.0919
	160	3.4758e-3	1.0950	3.4753e-3	1.0951

7.4. 阻尼系数敏感性分析

该实验不再随 b 重新制造源项，而是固定

$$f(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0,$$

取

$$\alpha = 0.5, \quad c = 1, \quad L = 1, \quad T = 2,$$

并采用紧致格式，令 $M = 200, N = 1000$ ，测试 $b = 0, 0.1, 0.5, 1, 2$ 。定义离散机械能

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \|V^n\|_h^2 + \frac{c^2}{2} |U^n|_{1,h}^2,$$

图 1 和图 2 分别给出中点位移和归一化机械能，表 6 给出若干特征量。

当 $b = 0$ 时，系统保持无耗散周期振荡，机械能基本守恒。加入分数阶阻尼后，振幅和机械能总体受到抑制。 $b = 0.1$ 时仍存在明显的欠阻尼振荡， $b = 0.5$ 时负向超调已很小，当 $b = 1$ 和 $b = 2$ 时，中点位移在计算区间内不再过零，呈现更接近过阻尼的缓慢松弛行为。该实验说明 b 不仅控制能量耗散强度，还会改变波的动力学状态。

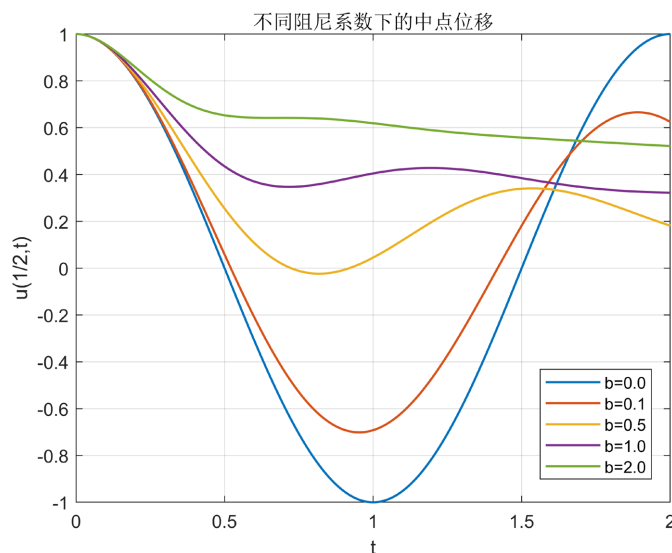


Figure 1. Midpoint displacement under different damping coefficients

图 1. 不同阻尼系数下的中点位移

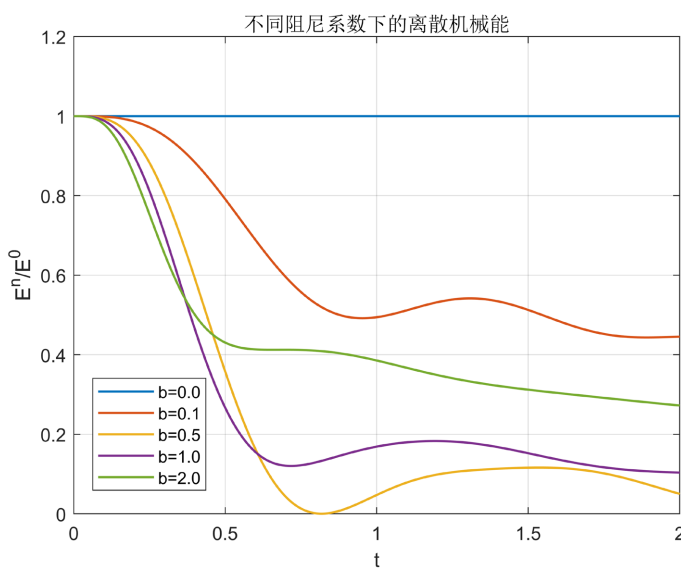


Figure 2. Discrete mechanical energy with different damping coefficients

图 2. 不同阻尼系数下的离散机械能

Table 6. Characteristic quantities under different damping coefficients

表 6. 不同阻尼系数下的特征量

b	$\min_{0 \leq t \leq 2} u(1/2, t)$	$u(1/2, 2)$	$\mathcal{E}(2)/\mathcal{E}(0)$	首次过零时刻
0.0	-1.0000	1.0000	1.0000	0.500
0.1	-0.7013	0.6248	0.4453	0.520
0.5	-0.0236	0.1816	0.0502	0.722
1.0	0.3222	0.3222	0.1039	--
2.0	0.5214	0.5214	0.2724	--

8. 结论

本文针对一类时间分数阶阻尼波动方程,构造了标准差分格式和四阶紧致差分格式。理论分析表明,两种格式均唯一可解且无条件稳定,其误差分别为 $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$ 和 $O(\tau^{2-\alpha} + h^4)$ 。数值实验所得时间与空间收敛阶均与理论结果一致,验证了所提方法的有效性,并进行了鲁棒性和阻尼系数敏感性分析。进一步研究可考虑非均匀时间网格以及二维、三维问题的高阶数值离散。

参考文献

- [1] Carcione, J.M. (2022) Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media. 4th Edition, Elsevier.
- [2] Graff, K.F. (1991) Wave Motion in Elastic Solids. Dover Publications.
- [3] Ma, Y. and Li, W. (2020) Application and Research of Fractional Differential Equations in Dynamic Analysis of Supply Chain Financial Chaotic System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **130**, Article ID: 109417. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109417>
- [4] Wismer, M.G. (2006) Finite Element Analysis of Broadband Acoustic Pulses through Inhomogenous Media with Power Law Attenuation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **120**, 3493-3502. <https://doi.org/10.1121/1.2354032>
- [5] Cai, W., Chen, W., Fang, J. and Holm, S. (2018) A Survey on Fractional Derivative Modeling of Power-Law Frequency-Dependent Viscous Dissipative and Scattering Attenuation in Acoustic Wave Propagation. *Applied Mechanics Reviews*, **70**, Article ID: 030802. <https://doi.org/10.1115/1.4040402>
- [6] Lin, Y. and Xu, C. (2007) Finite Difference/Spectral Approximations for the Time-Fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **225**, 1533-1552. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.02.001>
- [7] McLean, W. and Mustapha, K. (2007) A Second-Order Accurate Numerical Method for a Fractional Wave Equation. *Numerische Mathematik*, **105**, 481-510. <https://doi.org/10.1007/s00211-006-0045-y>
- [8] Luo, Q., Xiao, A.G., Yan, X.Q. and Xia, J.M. (2026) Solving Time-Fractional Diffusion Equations with Robin Boundary Conditions via Fractional Hamiltonian Boundary Value Methods. *Journal of Scientific Computing*, **107**, Article No. 97. <https://doi.org/10.1007/s10915-026-03319-3>
- [9] Cao, J. and Roul, P. (2026) High-Order Time Stepping Scheme Based on Convolution Quadrature and Its Analysis for the Time Fractional Cattaneo Equation with Singular Source Terms and Nonsmooth Data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **486**, Article ID: 117613. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2026.117613>
- [10] Kaltenbacher, B. and Schlötl, A. (2022) Fractional Time Stepping and Adjoint Based Gradient Computation in an Inverse Problem for a Fractionally Damped Wave Equation. *Journal of Computational Physics*, **449**, Article ID: 110789. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110789>
- [11] Caputo, M. (1967) Linear Models of Dissipation Whose Q Is Almost Frequency Independent—II. *Geophysical Journal International*, **13**, 529-539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1967.tb02303.x>
- [12] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2012.
- [13] Wang, Z.B. and Vong, S.K. (2014) Compact Difference Schemes for the Modified Anomalous Fractional Sub-Diffusion Equation and the Fractional Diffusion-Wave Equation. *Journal of Computational Physics*, **277**, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.08.012>
- [14] Samarskii, A.A. (2001) The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker.
- [15] Gao, G.H. and Sun, Z.Z. (2017) Two Difference Schemes for Solving the One-Dimensional Time Distributed-Order Fractional Wave Equations. *Numerical Algorithms*, **74**, 675-697. <https://doi.org/10.1007/s11075-016-0167-y>
- [16] Zhou, Y.L. (1990) Applications of Discrete Functional Analysis to Finite Difference Method. International Academic Publishers.
- [17] Guan, Z. (2024) Two Novel Difference Schemes for the One-Dimensional Multi-Term Time Fractional Oldroyd-B Equation. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, **10**, Article No. 126. <https://doi.org/10.1007/s40819-024-01757-x>
- [18] Sun, Z.Z. and Wu, X.N. (2006) A Fully Discrete Difference Scheme for a Diffusion-Wave System. *Applied Numerical Mathematics*, **56**, 193-209. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.03.003>
- [19] Feng, L.B., Liu, F.W., Turner, I. and Zheng, L.C. (2018) Novel Numerical Analysis of Multi-Term Time Fractional Viscoelastic Non-Newtonian Fluid Models for Simulating Unsteady Mhd Couette Flow of a Generalized Oldroyd-B Fluid.

-
- Fractional Calculus and Applied Analysis*, **21**, 1073-1103. <https://doi.org/10.1515/fca-2018-0058>
- [20] Jin, B., Lazarov, R. and Zhou, Z. (2015) An Analysis of the L1 Scheme for the Subdiffusion Equation with Nonsmooth Data. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **36**, 197-221. <https://doi.org/10.1093/imanum/dru063>