

非线性修正Burgers方程的空间两重网格混合有限元方法

贺海涛

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年7月25日; 录用日期: 2026年8月17日; 发布日期: 2026年8月28日

摘 要

本文研究二维非线性修正Burgers方程的高效数值求解问题, 构造了一种基于Crank-Nicolson时间离散的空间两重网格混合有限元方法。进一步地, 数值实验验证了所提出方法的有效性。计算结果显示, u 的 L^2 误差具有约二阶收敛精度。同时, 与单网格方法相比, 两重网格方法在保持相近精度的基础上显著减少了计算时间。

关键词

修正Burgers方程, 两重网格方法, 有限元方法, Crank-Nicolson格式, 收敛性分析

A Spatial Two-Grid Mixed Finite Element Method for Nonlinear Modified Burgers' Equation

Haitao He

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: July 25, 2026; accepted: August 17, 2026; published: August 28, 2026

Abstract

This paper investigates the efficient numerical solution of the two-dimensional nonlinear modified Burgers equation. A spatial two-grid mixed finite element method combined with the Crank-Nicolson time discretization is developed. Numerical experiments are further conducted to verify the

effectiveness of the proposed method. The computational results demonstrate that the L^2 -norm error of u achieves an approximately second-order convergence rate. Moreover, compared with the standard single-grid method, the proposed two-grid method significantly reduces the computational time while maintaining comparable numerical accuracy.

Keywords

Modified Burgers' Equation, Two-Grid Method, Finite Element Method, Crank-Nicolson Scheme, Convergence Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言及主要结果

在本研究中，我们使用了空间两重网格混合有限元方法研究 Burgers 方程，其方程[1]形式如下

$$\begin{cases} u_t + u^m(u_x + u_y) - \nu \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \times (0, T], \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{在 } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 Ω 是平面上的有界凸区域， $\partial\Omega$ 是 Ω 的 Lipschitz 连续边界。常数 $m \geq 1$ 是一个正整数。 $u_0(x, y)$ 是初始条件， $T > 0$ 表示指定的终止时间。外力由 $f = f(x, y, t)$ 给出， $\nu > 0$ 表示动力粘性系数。

Burgers 方程是 Navier-Stokes 方程的一类典型简化模型，在非线形输运、流体力学和工程建模中具有广泛应用。当 $m=1$ 时，模型退化为经典 Burgers 方程，其数值求解已得到较为充分的研究。Caldwell 等人[2]较早采用有限元方法求解该方程，Kadalbajoo 等人[3]基于 Crank-Nicolson 格式构造了有限差分方法。为同时获得原变量及通量变量的数值近似，Hu 等人[4]提出了一种混合有限元方法，并证明了相应的收敛结果。近年来，弱 Galerkin 有限元方法、广义有限差分方法、格子 Boltzmann 方法以及机器学习辅助算法也被用于 Burgers 方程的数值求解。例如，Wang 等人[5]构造了广义有限差分两层显式格式，Chen 等人[6] [7]分别研究了一维和二维 Burgers 方程的弱 Galerkin 有限元方法，Mohanamuraly 等人[8]和 Zhang 等人[9]则从不同角度分析了相关格式的稳定性 and 误差性质。

当 $m > 1$ 时，针对广义 Burgers 方程和修正 Burgers 方程，Shi 等人[10] [11]分别提出了时间两网格方法和时空两网格方法，并获得了相应的收敛结果；此外，格子 Boltzmann 模型、高阶差分格式和指数型方法等也被用于此类问题。然而，在高维或强非线性情形下，若直接在细网格上求解完全非线性系统，传统单网格方法通常需要较高的计算成本，对于一般非线性演化方程，常用的高效求解策略包括 Picard 迭代[12]、Newton 线性化方法等。

混合有限元方法通过引入辅助变量，可以同时逼近原变量和通量变量，并便于建立二者的联合误差估计。然而，将其应用于非线性 Burgers 型方程时，细网格上的非线性迭代往往成为主要计算负担。两重网格方法为降低这一成本提供了有效途径。该方法由 Xu 等人[13] [14]提出。近年来，两重网格方法已被推广到时间分数阶扩散方程、非线性椭圆方程及其他复杂演化模型，并表现出良好的计算效率和适用性。

2. 预备知识和基本性质

我们定义 $L^2(\Omega)$ 内积如下:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \text{ 其中 } u, v \in L^2(\Omega).$$

对于 Sobolev 空间, 我们分别定义其半范数与范数:

$$|v|_{k,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} v|^2 dx dy \right\}^{1/2}, \quad \|v\|_{k,\Omega} = \left\{ \sum_{i=0}^k |v|_{i,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^k(\Omega),$$

式中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, α_i 为非负整数, 且 $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ 。

接下来, 我们定义若干记号: 令

$$\tau = T/N, \quad t_n = n\tau, \quad u_n = u(\cdot, t_n), \quad u_t = \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau}, \text{ 其中 } 1 \leq n \leq N,$$

其中 N 为正整数, T 为终止时间。

2.1. 问题的弱形式

我们定义空间为

$$V = L^2(\Omega)^2, \quad W = H_0^1(\Omega).$$

假设 $f \in L^2(\Omega)$, 引入通量 $p = -\nabla u$, 则方程(1.1)的弱形式定义为: 求 $p \in V, u \in W$, 使得

$$\begin{aligned} (p, q) + (q, \nabla u) &= 0, \quad \forall q \in V, \\ (u_t, v) - ([u^m, u^m] p, v) - \nu(p, \nabla v) &= (f, v), \quad \forall v \in W, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $[u^m, u^m]$ 定义为向量 (u^m, u^m) 。

对任意 $t \in [0, T]$, 定义如下双线性形式:

$$\begin{aligned} a(p, q) &= (p, q), \quad \forall p, q \in V, \\ b(p, v) &= -(p, \nabla v), \quad \forall p \in V, \quad \forall v \in W. \end{aligned} \quad (2.2)$$

由式(2.1)可知, 对任意 $t \in [0, T]$, 方程(1.1)的等价变分形式为: 求 $p \in V, u \in W$, 使得

$$a(p, q) - b(q, u) = 0, \quad \forall q \in V, \quad (2.3)$$

$$(u_t, v) - ([u^m, u^m] p, v) + \nu b(p, v) = (f, v), \quad \forall v \in W. \quad (2.4)$$

2.2. 有限元解的存在性、唯一性与 L^∞ 有界性

针对变分方程组(2.3)~(2.4), 我们给出如下两个引理。

引理 2.1 (参考[4]) 由式(2.2)定义的双线性形式 $b(\cdot, \cdot)$ 满足下确界 - 上确界条件(inf-sup 条件), 即存在常数 $\gamma_1 > 0$, 使得

$$\inf_{v \in W} \sup_{q \in V} \frac{b(q, v)}{\|q\|_V \|v\|_W} \geq \gamma_1.$$

本文中, 符号 C 始终表示一个正常数, 其取值在不同情境下可能不同, 需要注意的是, 该常数与空间网格尺寸和时间步长均无关。

引理 2.2 (参考[4]) 设 $g(t)$ 为区间 $[0, T]$ 上的可积且几乎处处为正的函数, 若连续函数 $\psi(t) \in C([0, T])$ 满足不等式

$$0 \leq \psi(t) \leq C + \int_0^t g(s) \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

则 $\psi(t)$ 同样满足

$$0 \leq \psi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right), \quad \forall t \in [0, T],$$

进一步, 若 $C=0$, 则 $\psi(t) \equiv 0$ 。

引理 2.3 (参考[4]) 对任意的 $n \geq 1$, 如果 $u_n, u_{n-1} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, 那么我们有

$$\left\| \frac{u_n + u_{n-1}}{2} - u_{n-\frac{1}{2}} \right\|_0^2 \leq C \tau^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_n\|_0^2 dt,$$

$$\left\| \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t, n-\frac{1}{2}} \right\|_0^2 \leq C \tau^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{n-1}\|_0^2 dt.$$

定理 2.4 (参考[7]) 假设初值 $u_0(x, y) \in L^2(\Omega)$, 则变分形式(2.3)~(2.4)存在唯一解 $p \in V, u \in W$, 且存在常数 $M_0 > 0$, 使得

$$\|u\|_{0, \infty} \leq M_0.$$

基于变分形式(2.3)~(2.4), 设 T_h 为区域 Ω 上的一致正则三角剖分。选取 $P_{r-1}^2 - P_r$ 有限元对 (V_h, W_h) , 其中 P_r 表示 r 阶线性多项式, 其定义如下:

$$V_h = \{q_h = (q_1, q_2) \in V : q_i|_T \in P_{r-1}(T), \forall T \in T_h, i=1, 2\}, \quad (2.5)$$

$$W_h = \{v \in C^0(\Omega) \cap W : v|_T \in P_r(T), \forall T \in T_h\}. \quad (2.6)$$

引理 2.5 (参考[4]) 由(2.2)定义的双线性形式 $b(\cdot, \cdot)$ 与(2.5)~(2.6)定义的 $P_{r-1}^2 - P_r$ 有限元对满足离散下确界 - 上确界条件, 即存在常数 $\gamma_2 > 0$, 使得

$$\inf_{v_h \in W_h} \sup_{q_h \in V_h} \frac{b(q_h, v_h)}{\|q_h\|_V \|v_h\|_W} \geq \gamma_2 > 0.$$

引理 2.6 (参考[6]) 存在投影算子 $\Pi: V \rightarrow V_h$, 满足如下性质:

$$(p - \Pi p, q) = 0, \quad \forall q \in V_h, \quad (2.7)$$

$$\|\Pi p\|_0 \leq C \|p\|_0, \quad \forall p \in V,$$

$$\|p - \Pi p\|_0 \leq Ch^r \|p\|_r, \quad \forall p \in H^r(\Omega) \cap V. \quad (2.8)$$

引理 2.7 (参考[6]) 存在投影算子 $\Lambda: W \rightarrow W_h$, 满足

$$\|\Lambda u\|_0 \leq C \|u\|_1, \quad \forall u \in W,$$

$$\|u - \Lambda u\|_0 + h \|u - \Lambda u\|_1 \leq Ch^{r+1} \|u\|_{r+1}, \quad \forall u \in H^{r+1}(\Omega) \cap W, \quad (2.9)$$

且若 $u \in H_0^1(\Omega)$, 则有

$$(\nabla(u - \Lambda u), q) = 0, \quad \forall q \in V_h. \quad (2.10)$$

定理 2.8 (参考[7]) 若初值 $u_0(x, y) \in L^2(\Omega)$, 则存在唯一有限元解 $p \in V_h, u \in W_h$, 满足

$$a(p_h, q) - b(q, u_h) = 0, \quad \forall q \in V_h,$$

$$(u_{t,h}, v) - \left([u_h^m, u_h^m] p_h, v \right) + \nu b(p_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in W_h.$$

此外, 存在与网格尺寸 h 无关的常数 $M_1 > 0$, 使得

$$\|u_h\|_{0,\infty} \leq M_1.$$

3. 混合有限元算法

设时间步长 $\tau = T/N$, $u_{n,h}$ 为 W_h 空间中 $u(t)$ 在时刻 $t = t_n = n\tau$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 处的近似解。对时间导数 $\partial u / \partial t$ 在点 $t_{n-\frac{1}{2}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\tau$ 处采用 Crank-Nicolson 格式离散, 可得如下全离散格式:

$$\left(\frac{u_{n,h} - u_{n-1,h}}{\tau}, v \right) - \nu \left(\frac{p_{n,h} + p_{n-1,h}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\chi_{n,h} + \chi_{n-1,h}}{2}, v \right) = \left(\frac{f_n + f_{n-1}}{2}, v \right), \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{p_{n,h} + p_{n-1,h}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{u_{n,h} + u_{n-1,h}}{2} \right) = 0, \quad (3.2)$$

$$(u_{0,h}, v) = (\Lambda u_0, v), \quad (p_{0,h}, q) + (\nabla \Lambda u_0, q) = 0, \quad (3.3)$$

其中 $\chi_{n,h} = \left[(u_{n,h})^m, (u_{n,h})^m \right] p_{n,h}$, $v \in W_h$, $q \in V_h$ 。

定理 3.1 设 $(p_h, u_h) \in V_h \times W_h$ 为方程组(3.1)的解, 则存在正常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n,h}\|_1 + \|p_n - p_{n,h}\|_0 &\leq Ch^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right) \\ &\quad + C\tau^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{ttt}\|_0^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

证明 令

$$u_n - u_{n,h} = u_n - \Lambda u_n + \Lambda u_n - u_{n,h} = \phi_{0,n} + \theta_{0,n} = \varepsilon_{0,n},$$

$$p_n - p_{n,h} = p_n - \Pi p_n + \Pi p_n - p_{n,h} = \rho_{0,n} + \xi_{0,n} = \eta_{0,n}.$$

由式(2.8)与式(2.9)可得

$$\|\phi_{0,n}\|_1 = \|u_n - \Lambda u_n\|_1 \leq Ch^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right), \quad (3.5)$$

$$\|\phi_{0,n}\|_0 = \|u_n - \Lambda u_n\|_0 \leq Ch^{r+1} \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right), \quad (3.6)$$

$$\|\rho_{0,n}\|_0 = \|p_n - \Pi p_n\|_0 \leq Ch^r \left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right). \quad (3.7)$$

结合式(2.1)、式(3.1), 对任意 $q \in V_h$ 与 $v \in W_h$, 可得误差方程如下:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\varepsilon_{0,n} - \varepsilon_{0,n-1}}{\tau}, v \right) - \nu \left(\frac{\eta_{0,n} + \eta_{0,n-1}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\varphi_{n,h}}{2}, v \right) - \left(\frac{\varphi_{n-1,h}}{2}, v \right) \\ &= \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right) - \left(\frac{u_{t,n} + u_{t,n-1}}{2} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right), \\ &\left(\frac{\eta_{0,n} + \eta_{0,n-1}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\varepsilon_{0,n} + \varepsilon_{0,n-1}}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_{n,h} = \left[(u_n)^m, (u_n)^m \right] p_n - \left[(u_{n,h})^m, (u_{n,h})^m \right] p_{n,h}$ 。根据式(2.7)与式(2.10), 进一步得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}}{\tau}, v \right) - \nu \left(\frac{\xi_{0,n} + \xi_{0,n-1}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\varphi_{n,h}}{2}, v \right) - \left(\frac{\varphi_{n-1,h}}{2}, v \right) \\ &= \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right) - \left(\frac{u_{t,n} + u_{t,n-1}}{2} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\xi_{0,n} + \xi_{0,n-1}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\theta_{0,n} + \theta_{0,n-1}}{2} \right) = 0. \quad (3.9)$$

对式(3.9)中取 $q = \nabla \frac{\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}}{2}$, 应用 Cauchy-Schwartz 不等式与 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta_{0,n}\|_0^2 - \|\nabla \theta_{0,n-1}\|_0^2 &\leq \|\xi_{0,n} + \xi_{0,n-1}\|_0 \|\nabla \theta_{0,n} - \nabla \theta_{0,n-1}\|_0 \\ &\leq \frac{\|\xi_{0,n} + \xi_{0,n-1}\|_0^2}{2\delta} + \frac{\delta \|\nabla \theta_{0,n} - \nabla \theta_{0,n-1}\|_0^2}{2}. \end{aligned}$$

经整理计算后有

$$\|\nabla \theta_{0,n}\|_0^2 \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \|\nabla \theta_{0,n-1}\|_0^2 + \frac{\|\xi_{0,n} + \xi_{0,n-1}\|_0^2}{2\delta(1-\delta)}.$$

再应用 Poincaré 不等式, 选取 $\delta \geq 0$ 满足 $1-\delta > 0$, 可得到如下估计

$$\|\theta_{0,n}\|_1^2 \leq C \left(\|\theta_{0,n-1}\|_1^2 + \|\xi_{0,n}\|_0^2 + \|\xi_{0,n-1}\|_0^2 \right).$$

结合初始条件 $u_{0,H} = \Lambda u_0$, 对 $1 \leq n \leq N$ 的所有方程求和, 并利用 Gronwall's 不等式, 可得

$$\|\theta_{0,n}\|_1 \leq C_1 \|\xi_{0,n}\|_0. \quad (3.10)$$

我们将式(3.9)替换为如下形式

$$\left(\frac{\xi_{0,n} - \xi_{0,n-1}}{\tau}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}}{\tau} \right) = 0, \quad \forall q \in V_h, n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.11)$$

对式(3.8)中取 $v = \frac{\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}}{\tau}$, 对式(3.11)取 $q = \frac{\xi_{0,n} + \xi_{0,n-1}}{2}$, 两式相加后应用 Cauchy-Schwartz 不等式、Young 不等式和引理 2.3, 可推得

$$\begin{aligned} \nu \left(\|\xi_{0,n}\|_0^2 - \|\xi_{0,n-1}\|_0^2 \right) &\leq (\varphi_{n-1,h}, \theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}) + (\varphi_{n,h}, \theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}) \\ &\quad + C\tau^4 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{ttt}\|_0^2 dt + C \|\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}\|_0^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

结合定理 2.4 与定理 2.8 的结论, 再次应用 Cauchy-Schwartz 不等式与 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} (\varphi_{n-1,h}, \theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}) &\leq \frac{\beta_1 M_0^m}{2} \|\rho_{0,n-1} + \xi_{0,n-1}\|_0^2 + \frac{C\beta_2 M_1}{2} \|\theta_{0,n-1} + \theta_{0,n-1}\|_0^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\beta_1} + \frac{C}{2\beta_2} \right) \|\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

利用式(3.6)、式(3.7)、式(3.10)、Young 不等式与 Poincaré 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\|\rho_{0,n-1} + \xi_{0,n-1}\|_0^2 &\leq 2\left(\|\rho_{0,n-1}\|_0^2 + \|\xi_{0,n-1}\|_0^2\right) \\ &\leq Ch^{2r}\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_{n-1}} \|p_t\|_r dt\right)^2 + C\|\xi_{0,n-1}\|_0^2\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\|\phi_{0,n-1} + \theta_{0,n-1}\|_0^2 &\leq 2\left(\|\phi_{0,n-1}\|_0^2 + \|\theta_{0,n-1}\|_0^2\right) \leq 2\left(\|\phi_{0,n-1}\|_1^2 + \|\theta_{0,n-1}\|_1^2\right), \\ &\leq Ch^{2r}\left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_{n-1}} \|u_t\|_{r+1} dt\right)^2 + C\|\xi_{0,n-1}\|_0^2.\end{aligned}\quad (3.15)$$

再结合式(3.10)与 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|\theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}\|_0^2 &\leq \left(1 + \frac{1}{\beta_3}\right)\|\theta_{0,n}\|_0^2 + (1 + \beta_3)\|\theta_{0,n-1}\|_0^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\beta_3}\right)C_1^2\|\xi_{0,n}\|_0^2 + (1 + \beta_3)C_1^2\|\xi_{0,n-1}\|_0^2.\end{aligned}\quad (3.16)$$

联立式(3.13)、式(3.14)、式(3.15)与式(3.16), 可推得

$$\begin{aligned}(\varphi_{n-1,h}, \theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}) &\leq Ch^{2r}\left[\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_{n-1}} \|p_t\|_r dt\right)^2 + \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_{n-1}} \|u_t\|_{r+1} dt\right)^2\right] \\ &\quad + C_1\|\xi_{0,n}\|_0^2 + C_2\|\xi_{0,n-1}\|_0^2.\end{aligned}\quad (3.17)$$

同理可得

$$\begin{aligned}(\varphi_{n,h}, \theta_{0,n} - \theta_{0,n-1}) &\leq Ch^{2r}\left[\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt\right)^2 + \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt\right)^2\right] \\ &\quad + C_1\|\xi_{0,n-1}\|_0^2 + C_2\|\xi_{0,n}\|_0^2.\end{aligned}\quad (3.18)$$

经整理计算后可得

$$\begin{aligned}(\nu - C_1)\|\xi_{0,n}\|_0^2 &\leq C_3h^{2r}\left[\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt\right)^2 + \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt\right)^2\right] \\ &\quad + C_4\tau^4\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{ttt}\|_0^2 dt + (\nu + C_2)\|\xi_{0,n-1}\|_0^2.\end{aligned}\quad (3.19)$$

选取合适的参数 $C_1 < \nu$, 使得式(3.19)左端 $\|\xi_{0,n}\|_0^2$ 的系数大于 0, 对 $1 \leq n \leq N$ 的所有方程求和, 并利用 Gronwall's 不等式, 可得

$$\|\xi_{0,n}\|_0 \leq Ch^r\left(\|u_0\|_{r+1} + \|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt\right) + C\tau^2\left(\int_0^{t_n} \|u_{ttt}\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.\quad (3.20)$$

最后结合式(3.5)、式(3.7)、式(3.10)、式(3.20)与三角不等式, 可得定理 3.1。

4. 两重网格混合有限元算法

设 H 和 h 为两个正实参数, 满足 $h \ll H$, 且二者均趋于 0。按照第 2 节的方法构造区域 Ω 的粗网格剖分 $\mathcal{T}_H(\Omega)$, 对该粗网格进行加密, 得到细网格剖分 $\mathcal{T}_h(\Omega)$ 。对时间导数 $\partial u / \partial t$, 在时间节点

$t_{n-\frac{1}{2}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\tau$ 处采用 Crank-Nicolson 格式。稳定的两重网格有限元逼近算法步骤如下:

步骤 1: 在粗网格 $\mathcal{T}_H$ 上, 给定初值 $(p_H^0, u_{0,H}) = (\Pi(-\nabla u_0), \Lambda u_0)$, 求解如下非线性方程组, 得到有限元解 $p_{n,H} \in V_H, u_{n,H} \in W_H$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{n,H} - u_{n-1,H}}{\tau}, v \right) - v \left(\frac{p_{n,H} + p_{n-1,H}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\chi_{n,H} + \chi_{n-1,H}}{2}, v \right) = \left(\frac{f_n + f_{n-1}}{2}, v \right), \\ & \left(\frac{p_{n,H} + p_{n-1,H}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{u_{n,H} + u_{n-1,H}}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\chi_{n,H} = \left[(u_{n,H})^m, (u_{n,H})^m \right] p_{n,H}$, $v \in W_H, q \in V_H$ 。

步骤 2: 在细网格 $\mathcal{T}_h$ 上, 给定初值 $(p_h^0, u_{0,h}) = (\Pi(-\nabla u_0), \Lambda u_0)$, 求解如下线性方程组, 得到有限元解 $p_{n,h} \in V_h, u_{n,h} \in W_h$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{n,h} - u_{n-1,h}}{\tau}, v \right) - v \left(\frac{p_{n,h} + p_{n-1,h}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\chi_{n,h} + \chi_{n-1,h}}{2}, v \right) = \left(\frac{f_n + f_{n-1}}{2}, v \right), \\ & \left(\frac{p_{n,h} + p_{n-1,h}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{u_{n,h} + u_{n-1,h}}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $v \in W_h, q \in V_h$ 。

首先, 我们给出步骤 1 的误差估计。

定理 4.1 设 $p_H \in V_H, u_H \in W_H$ 为方程组(4.1)的解, 则存在正常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n,H}\|_1 + \|p_n - p_{n,H}\|_0 & \leq CH^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right) \\ & + C\tau^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

证明 令

$$\begin{aligned} u_n - u_{n,H} &= u_n - \Lambda u_n + \Lambda u_n - u_{n,H} = \phi_{1,n} + \theta_{1,n} = \varepsilon_{1,n}, \\ p_n - p_{n,H} &= p_n - \Pi p_n + \Pi p_n - p_{n,H} = \rho_{1,n} + \xi_{1,n} = \eta_{1,n}. \end{aligned}$$

由式(2.8)和式(2.9)可得

$$\|\phi_{1,n}\|_1 = \|u_n - \Lambda u_n\|_1 \leq CH^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right), \quad (4.4)$$

$$\|\phi_{1,n}\|_0 = \|u_n - \Lambda u_n\|_0 \leq CH^{r+1} \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right), \quad (4.5)$$

$$\|\rho_{1,n}\|_0 = \|p_n - \Pi p_n\|_0 \leq CH^r \left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right). \quad (4.6)$$

联立式(2.1)与式(4.1), 对任意 $q \in V_H$ 和 $v \in W_H$, 可得如下误差方程:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_{1,n} - \varepsilon_{1,n-1}}{\tau}, v \right) - v \left(\frac{\eta_{1,n} + \eta_{1,n-1}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\varphi_{n,H}}{2}, v \right) - \left(\frac{\varphi_{n-1,H}}{2}, v \right) \\ &= \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right) - \left(\frac{u_{t,n} + u_{t,n-1}}{2} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right), \\ & \left(\frac{\eta_{1,n} + \eta_{1,n-1}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{1,n-1}}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_{n,H} = \left[(u_n)^m, (u_n)^m \right] p_n - \left[(u_{n,H})^m, (u_{n,H})^m \right] p_{n,H}$ 。由式(2.7)和式(2.10), 进一步得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}}{\tau}, v \right) - v \left(\frac{\xi_{1,n} + \xi_{1,n-1}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\varphi_{n,H}}{2}, v \right) - \left(\frac{\varphi_{n-1,H}}{2}, v \right) \\ &= \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right) - \left(\frac{u_{t,n} + u_{t,n-1}}{2} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\xi_{1,n} + \xi_{1,n-1}}{2}, q\right) + \left(q, \nabla \frac{\theta_{1,n} + \theta_{1,n-1}}{2}\right) = 0. \quad (4.8)$$

对式(4.8)中取 $q = \nabla \frac{\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}}{2}$, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta_{1,n}\|_0^2 - \|\nabla \theta_{1,n-1}\|_0^2 &\leq \|\xi_{1,n} + \xi_{1,n-1}\|_0 \|\nabla \theta_{1,n} - \nabla \theta_{1,n-1}\|_0 \\ &\leq \frac{\|\xi_{1,n} + \xi_{1,n-1}\|_0^2}{2\delta} + \frac{\delta \|\nabla \theta_{1,n} - \nabla \theta_{1,n-1}\|_0^2}{2}. \end{aligned}$$

经整理计算可得

$$\|\nabla \theta_{1,n}\|_0^2 \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \|\nabla \theta_{1,n-1}\|_0^2 + \frac{\|\xi_{1,n} + \xi_{1,n-1}\|_0^2}{2\delta(1-\delta)}.$$

应用 Poincaré 不等式, 选取 $\delta \geq 0$ 满足 $1-\delta > 0$, 可得如下估计

$$\|\theta_{1,n}\|_1^2 \leq C \left(\|\theta_{1,n-1}\|_1^2 + \|\xi_{1,n}^n\|_0^2 + \|\xi_{1,n-1}\|_0^2 \right).$$

结合初值条件 $u_{0,H} = \Lambda u_0$, 对 $1 \leq n \leq N$ 的所有方程求和, 并利用 Gronwall's 不等式, 可得

$$\|\theta_{1,n}\|_1 \leq C_1 \|\xi_{1,n}\|_0. \quad (4.9)$$

我们采用下述式子

$$\left(\frac{\xi_{1,n} - \xi_{1,n-1}}{\tau}, q\right) + \left(q, \nabla \frac{\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}}{\tau}\right) = 0, \quad \forall q \in V_H, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

替代式(4.8)。在式(4.7)中取 $v = \frac{\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}}{\tau}$ 与式(4.10)中取 $q = \frac{\xi_{1,n} + \xi_{1,n-1}}{2}$ 再相加, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式、Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \nu \left(\|\xi_{1,n}\|_0^2 - \|\xi_{1,n-1}\|_0^2 \right) &\leq (\varphi_{n-1,H}, \theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}) + (\varphi_{n,H}, \theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}) \\ &\quad + C\tau^4 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{ttt}\|_0^2 dt + C \|\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

结合定理 2.4 和定理 2.8 的结论, 再应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} (\varphi_{n-1,H}, \theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}) &\leq \frac{\beta_1 M_0^m}{2} \|\rho_{1,n-1} + \xi_{1,n-1}\|_0^2 + \frac{C\beta_2 M_1}{2} \|\phi_{1,n-1} + \theta_{1,n-1}\|_0^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\beta_1} + \frac{C}{2\beta_2} \right) \|\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

利用式(4.5)、式(4.6)、式(4.9), 结合 Young 不等式和 Poincaré 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|\rho_{1,n-1} + \xi_{1,n-1}\|_0^2 &\leq 2 \left(\|\rho_{1,n-1}\|_0^2 + \|\xi_{1,n-1}\|_0^2 \right) \\ &\leq CH^{2r} \left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_{n-1}} \|p_t\|_r dt \right)^2 + C \|\xi_{1,n-1}\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \|\phi_{1,n-1} + \theta_{1,n-1}\|_0^2 &\leq 2 \left(\|\phi_{1,n-1}\|_0^2 + \|\theta_{1,n-1}\|_0^2 \right) \leq 2 \left(\|\phi_{1,n-1}\|_1^2 + \|\theta_{1,n-1}\|_1^2 \right) \\ &\leq CH^{2r} \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_{n-1}} \|u_t\|_{r+1} dt \right)^2 + C \|\xi_{1,n-1}\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

再结合式(4.9)和 Young 不等式, 有

$$\|\theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}\|_0^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\beta_3}\right) C_1^2 \|\xi_{1,n}\|_0^2 + (1 + \beta_3) C_1^2 \|\xi_{1,n-1}\|_0^2. \quad (4.15)$$

联立式(4.12)、式(4.13)、式(4.14)与式(4.15)可得

$$\begin{aligned} (\varphi_{n-1,H}, \theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}) &\leq CH^{2r} \left[\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_{n-1}} \|p_t\|_r dt \right)^2 + \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_{n-1}} \|u_t\|_{r+1} dt \right)^2 \right] \\ &\quad + C_1 \|\xi_{1,n}\|_0^2 + C_2 \|\xi_{1,n-1}\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

同理可得

$$\begin{aligned} (\varphi_{n,H}, \theta_{1,n} - \theta_{1,n-1}) &\leq CH^{2r} \left[\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right)^2 + \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right)^2 \right] \\ &\quad + C_1 \|\xi_{1,n-1}\|_0^2 + C_2 \|\xi_{1,n}\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

经整理计算可得

$$\begin{aligned} (\nu - C_1) \|\xi_{1,n}\|_0^2 &\leq C_3 H^{2r} \left[\left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right)^2 + \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right)^2 \right] \\ &\quad + C_4 \tau^4 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt + (\nu + C_2) \|\xi_{1,n-1}\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

选取合适的参数 $C_1 < \nu$, 使得式(4.18)左端 $\|\xi_{1,n}\|_0^2$ 的系数大于 0, 对 $1 \leq n \leq N$ 的所有方程求和, 并利用 Gronwall's 不等式, 可得

$$\|\xi_{1,n}\|_0 \leq CH^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right) + C\tau^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

因此, 联立式(4.4)、式(4.6)、式(4.9)、式(4.19)并结合三角不等式, 即可完成定理 4.1 的证明。

接下来, 我们给出步骤 2 的误差估计。

定理 4.2 设 $p_h \in V_h, u_h \in W_h$ 为方程组(4.2)的解, 则存在正常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n,h}\|_1 + \|p_n - p_{n,h}\|_0 &\leq CH^{r+1} \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right) + C\tau^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + Ch^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

证明 令

$$\begin{aligned} u_n - u_{n,h} &= u_n - \Lambda u_n + \Lambda u_n - u_{n,h} = \phi_{2,n} + \theta_{2,n} = \varepsilon_{2,n}, \\ p_n - p_{n,h} &= p_n - \Pi p_n + \Pi p_n - p_{n,h} = \rho_{2,n} + \xi_{2,n} = \eta_{2,n}. \end{aligned}$$

由式(2.8)和式(2.9)可得

$$\begin{aligned} \|\phi_{2,n}\|_1 &= \|u_n - \Lambda u_n\|_1 \leq Ch^r \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{r+1} dt \right), \\ \|\rho_{2,n}\|_0 &= \|p_n - \Pi p_n\|_0 \leq Ch^r \left(\|p_0\|_r + \int_0^{t_n} \|p_t\|_r dt \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

联立式(2.1)与式(4.2), 对任意 $q \in V_h$ 和 $v \in W_h$, 可得如下误差方程:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_{2,n} - \varepsilon_{2,n-1}}{\tau}, v \right) - v \left(\frac{\eta_{2,n} + \eta_{2,n-1}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\varphi_{n,H}}{2}, v \right) - \left(\frac{\varphi_{n-1,H}}{2}, v \right) \\ &= \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right) - \left(\frac{u_{t,n} + u_{t,n-1}}{2} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right), \\ & \left(\frac{\eta_{2,n} + \eta_{2,n-1}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\varepsilon_{2,n} + \varepsilon_{2,n-1}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

由式(2.7)和式(2.10), 进一步得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}}{\tau}, v \right) - v \left(\frac{\xi_{2,n} + \xi_{2,n-1}}{2}, \nabla v \right) - \left(\frac{\varphi_{n,H}}{2}, v \right) - \left(\frac{\varphi_{n-1,H}}{2}, v \right) \\ &= \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right) - \left(\frac{u_{t,n} + u_{t,n-1}}{2} - u_{t,n-\frac{1}{2}}, v \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{\xi_{2,n} + \xi_{2,n-1}}{2}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\theta_{2,n} + \theta_{2,n-1}}{2} \right) = 0. \quad (4.23)$$

对式(4.23)取 $q = \nabla \frac{\theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}}{2}$, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta_{2,n}\|_0^2 - \|\nabla \theta_{2,n-1}\|_0^2 &\leq \|\xi_{2,n} + \xi_{2,n-1}\|_0 \|\nabla \theta_{2,n} - \nabla \theta_{2,n-1}\|_0 \\ &\leq \frac{\|\xi_{2,n} + \xi_{2,n-1}\|_0^2}{2\delta} + \frac{\delta \|\nabla \theta_{2,n} - \nabla \theta_{2,n-1}\|_0^2}{2}. \end{aligned}$$

结合初值条件 $u_{0,H} = \Lambda u_0$, 对 $1 \leq n \leq N$ 的所有方程求和, 并利用 Gronwall's 不等式, 可得

$$\|\theta_{2,n}\|_1 \leq C_1 \|\xi_{2,n}\|_0. \quad (4.24)$$

我们采用下式

$$\left(\frac{\xi_{2,n} - \xi_{2,n-1}}{\tau}, q \right) + \left(q, \nabla \frac{\theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}}{\tau} \right) = 0, \quad \forall q \in V_h, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

替代式(4.23)。在式(4.22)中取 $v = \frac{\theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}}{\tau}$ 与式(4.25)中取 $q = \frac{\xi_{2,n} + \xi_{2,n-1}}{2}$ 再相加, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\nu \left(\|\xi_{2,n}\|_0^2 - \|\xi_{2,n-1}\|_0^2 \right) \leq (\varphi_{n-1,H}, \theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}) + (\varphi_{n,H}, \theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}) + C\tau^4 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt. \quad (4.26)$$

结合定理 2.4 和定理 2.8 的结论, 利用式(4.24)和 Green 公式, 再次应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得

$$(\varphi_{n-1,H}, \theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}) \leq C \|u_{n-1} - u_{n-1,H}\|_0^2 + \delta_1 C_1 \|\xi_{2,n}\|_0^2 + C \|\xi_{2,n-1}\|_0^2. \quad (4.27)$$

同理可得

$$(\varphi_{n,H}, \theta_{2,n} - \theta_{2,n-1}) \leq C \|u^n - u_{n,H}\|_0^2 + \delta_2 C_1 \|\xi_{2,n-1}\|_0^2 + C \|\xi_{2,n}\|_0^2. \quad (4.28)$$

此处选取合适的参数 $\delta_i (i=1,2)$, 使得式(4.26)右端 $\|\xi_{2,n}\|_0^2$ 的系数小于 ν 。联立式(4.26)和式(4.28), 利用式(4.5), 对 $1 \leq n \leq N$ 的所有方程求和, 并利用 Gronwall's 不等式, 可得

$$\|\xi_{2,n}\|_0 \leq CH^{r+1} \left(\|u_0\|_{r+1} + \int_0^t \|u_\tau\|_{r+1} d\tau \right) + C\tau^2 \left(\int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_0^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

因此, 联立式(4.21)、式(4.24)、式(4.29)并结合三角不等式, 即可完成定理 4.2 的证明。

5. 数值实验

本节通过两个具有解析解的数值算例验证所提出两重网格有限元方法的有效性、收敛性和计算效率。计算区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, 采用一致三角剖分, 记粗网格与细网格尺寸分别为 H 和 h , 本文取 $H = 4h$ 。时间采用 Crank-Nicolson 格式, 其中终止时间 $T = 0.05$, 时间步长 $\tau = 0.0025$, 取固定步长, 取 $r = 1$, 即 $P_0^2 - P_1$ 近似。

为了考察不同非线性强度和黏性系数下算法的表现, 本文分别选取 $m = 2, 5$, $\nu = 1, 0.1$ 。数值结果中, 分别计算 u 的 L^2 误差、 H^1 误差以及通量变量 $p = -\nabla u$ 的 L^2 误差, 相应误差记为 $\|u - u_h\|_{L^2}, \|u - u_h\|_{H^1}, \|p - p_h\|_{L^2}$ 。

本文所有数值实验均在配备 Apple M1 八核处理器和 8 GB 内存的 MacBook Air 上完成, 操作系统为 macOS 14.4, 数值程序采用 MATLAB R2021b 编写。

给出如下两个算例。

算例 1.

$$u = xy(1-x)(1-y)e^{-t}$$

算例 2.

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)e^t$$

表 1~4 给出了算例 1 和算例 2 在不同 m 和 ν 下的数值结果, 具体而言, u 的 L^2 误差达到二阶收敛, 而 u 的 H^1 误差和通量变量 p 的 L^2 误差均表现为一阶收敛。这与有限元近似理论是一致的: 由于 $p = -\nabla u$, 通量误差 $\|p - p_h\|_{L^2}$ 本质上对应于 u 的梯度误差, 因此其收敛阶与 $\|u - u_h\|_{H^1}$ 相同。

Table 1. Error and convergence analysis of the one-grid method for Example 1 ($m = 2$, $\nu = 1$)

表 1. 例 1 单网格方法的误差和收敛性分析($m = 2$, $\nu = 1$)

H	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	u_{L^2} rate	u_{H^1} rate	p_{L^2} rate	CPU (s)
1/8	1/32	2.307×10^{-5}	5.325×10^{-3}	5.324×10^{-3}	-	-	-	1.1908 s
1/16	1/64	5.784×10^{-6}	2.663×10^{-3}	2.663×10^{-3}	2.00	1.00	1.00	4.2081 s
1/32	1/128	1.458×10^{-6}	1.331×10^{-3}	1.331×10^{-3}	1.99	1.00	1.00	17.2942 s
1/64	1/256	3.763×10^{-7}	6.657×10^{-4}	6.657×10^{-4}	1.95	1.00	1.00	73.0718 s

Table 2. Error and convergence analysis of the two-grid method for Example 1 ($m = 2$, $\nu = 1$)

表 2. 例 1 两重网格方法的误差和收敛性分析($m = 2$, $\nu = 1$)

H	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	u_{L^2} rate	u_{H^1} rate	p_{L^2} rate	CPU (s)
1/8	1/32	2.307×10^{-5}	5.325×10^{-3}	5.324×10^{-3}	-	-	-	0.6869 s
1/16	1/64	5.785×10^{-6}	2.663×10^{-3}	2.663×10^{-3}	2.00	1.00	1.00	2.6599 s
1/32	1/128	1.458×10^{-6}	1.331×10^{-3}	1.331×10^{-3}	1.99	1.00	1.00	10.8705 s
1/64	1/256	3.763×10^{-7}	6.657×10^{-4}	6.657×10^{-4}	1.95	1.00	1.00	45.4290 s

Table 3. Error and convergence analysis of the one-grid method for Example 2 ($m = 5$, $\nu = 0.1$)**表 3.** 例 2 单网格方法的误差和收敛性分析($m = 5$, $\nu = 0.1$)

H	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	u_{L^2} rate	u_{H^1} rate	p_{L^2} rate	CPU(s)
1/8	1/32	1.280×10^{-4}	8.545×10^{-2}	8.544×10^{-2}	-	-	-	1.5216 s
1/16	1/64	3.256×10^{-5}	4.272×10^{-2}	4.272×10^{-2}	1.97	1.00	1.00	6.1062 s
1/32	1/128	8.251×10^{-6}	2.136×10^{-2}	2.136×10^{-2}	1.98	1.00	1.00	24.9884 s
1/64	1/256	2.167×10^{-6}	1.068×10^{-2}	1.068×10^{-2}	1.93	1.00	1.00	107.7472 s

Table 4. Error and convergence analysis of the two-grid method for Example 2 ($m = 5$, $\nu = 0.1$)**表 4.** 例 2 两重网格方法的误差和收敛性分析($m = 5$, $\nu = 0.1$)

H	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	u_{L^2} rate	u_{H^1} rate	p_{L^2} rate	CPU(s)
1/8	1/32	1.552×10^{-3}	8.704×10^{-2}	8.702×10^{-2}	-	-	-	0.7448 s
1/16	1/64	4.103×10^{-4}	4.294×10^{-2}	4.294×10^{-2}	1.92	1.02	1.02	2.8663 s
1/32	1/128	1.038×10^{-4}	2.139×10^{-2}	2.139×10^{-2}	1.98	1.01	1.01	11.7186 s
1/64	1/256	2.576×10^{-5}	1.068×10^{-2}	1.068×10^{-2}	2.01	1.00	1.00	47.1918 s

6. 结论

在理论分析方面, 本文给出了相应离散格式的误差估计, 证明了数值解在空间和时间方向上的收敛性。数值实验进一步验证了理论结果。计算结果显示, u 的 L^2 误差约为二阶收敛, 而 u 的 H^1 误差和通量变量 p 的 L^2 误差均约为一阶收敛, 与此同时, 两重网格方法在保持相同收敛阶的情况下有效减少了 CPU 时间, 说明该方法在求解非线性 Burgers 型方程时具有较好的计算效率。未来可以从以下几个方面继续开展研究: 一是将该方法推广到更高阶有限元空间和更复杂区域; 二是研究小黏性参数下具有陡梯度或边界层结构问题的稳定性; 三是进一步考虑自适应网格、并行计算以及三维非线性问题中的推广应用。

参考文献

- [1] Zhang, Q.F., Qin, Y.F., Wang, X.P. and Sun, Z.Z. (2021) The Study of Exact and Numerical Solutions of the Generalized Viscous Burgers' Equation. *Applied Mathematics Letters*, **112**, Article ID: 106719. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106719>
- [2] Caldwell, J., Wanless, P. and Cook, A.E. (1981) A Finite Element Approach to Burgers' Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **5**, 189-193. [https://doi.org/10.1016/0307-904x\(81\)90043-3](https://doi.org/10.1016/0307-904x(81)90043-3)
- [3] Kadalbajoo, M.K. and Awasthi, A. (2006) A Numerical Method Based on Crank-Nicolson Scheme for Burgers' Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 1430-1442. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.030>
- [4] Hu, X.H., Huang, P.Z. and Feng, X.L. (2016) A New Mixed Finite Element Method Based on the Crank-Nicolson Scheme for Burgers' Equation. *Applications of Mathematics*, **61**, 27-45. <https://doi.org/10.1007/s10492-016-0120-3>
- [5] Wang, K., Li, Y.B., Wu, A.P., Yin, X.X., Liu, F. and Feng, X.L. (2025) Numerical Analysis of a Linear Generalized Finite Difference Scheme for Burgers' Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **193**, 117-131. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2025.05.027>
- [6] Chen, X.X. and Chen, Y.L. (2025) A Weak Galerkin Finite Element Method for the Two-Dimensional Burgers' Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **196**, 84-103. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2025.07.010>
- [7] Chen, Y.L. and Zhang, T. (2019) A Weak Galerkin Finite Element Method for Burgers' Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **348**, 103-119. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.08.044>
- [8] Mohanamurthy, P., Lapeyre, C., Daviller, G., Adler, A. and Staffellbach, G. (2025) Extending the Machine-Learned Optimised Stable Taylor-Galerkin Scheme to Solve the Burgers' Equation. *Journal of Computational Physics*, **523**, Article ID: 113635.

-
- <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113635>
- [9] Zhang, J.H. and Yu, J.L. (2025) A Multi-Quadrics Quasi-Interpolation Scheme for Numerical Solution of Burgers' Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **208**, 38-44. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2024.09.025>
- [10] Shi, Y. and Yang, X.H. (2024) A Time Two-Grid Difference Method for Nonlinear Generalized Viscous Burgers' Equation. *Journal of Mathematical Chemistry*, **62**, 1323-1356. <https://doi.org/10.1007/s10910-024-01592-x>
- [11] Shi, Y., Yang, X.H. and Zhang, Z.M. (2024) Construction of a New Time-Space Two-Grid Method and Its Solution for the Generalized Burgers' Equation. *Applied Mathematics Letters*, **158**, Article ID: 109244. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2024.109244>
- [12] Youssef, I.K. and El-Arabawy, H.A. (2007) Picard Iteration Algorithm Combined with Gauss-Seidel Technique for Initial Value Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 345-355. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.058>
- [13] Xu, J. (1994) A Novel Two-Grid Method for Semilinear Elliptic Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **15**, 231-237. <https://doi.org/10.1137/0915016>
- [14] Xu, J. (1996) Two-Grid Discretization Techniques for Linear and Nonlinear PDEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **33**, 1759-1777. <https://doi.org/10.1137/s0036142992232949>