

基于正态分布概率区间犹豫模糊集的多属性决策方法及应用

黄志满

华南农业大学数学与信息学院, 广东 广州

收稿日期: 2026年7月21日; 录用日期: 2026年8月14日; 发布日期: 2026年8月27日

摘 要

针对现有概率区间犹豫模糊集普遍假设区间内隶属度服从均匀分布, 与决策者“中间值可能性大、两端可能性小”的实际认知规律不符的问题, 本文提出一种基于正态分布假设的概率区间犹豫模糊集, 并构建相应的多属性决策模型。首先, 将正态分布作为一般分布框架的特例引入概率区间犹豫模糊集, 在区间关于均值对称的假设下, 利用标准正态分布分位数建立区间端点、置信水平与正态分布参数之间的映射关系。其次, 基于全期望公式与全方差公式, 推导多区间聚合后的总体均值与总体方差公式。最后, 将所提出的正态分布概率区间犹豫模糊集与TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)方法相结合, 通过将原始准则扩展为“均值”与“负标准差”两个子准则, 引入偏好系数以调节决策者对期望表现与稳定性的权衡, 构建多属性群决策模型。汽车选购案例验证了该方法能够有效执行决策流程; 控制变量实验表明, 当将区间内部分布假设由正态替换为均匀后最优方案发生改变, 验证了分布假设对决策结果具有实质性影响。本文方法通过引入更符合认知规律的正态分布假设, 并协同考虑均值和稳定性两个维度, 为不确定环境下的多属性决策提供了一种逻辑更完善、结果更鲁棒的新工具。

关键词

正态分布, 概率区间犹豫模糊集, TOPSIS, 多属性决策, 全期望公式, 全方差公式

A Multi-Attribute Decision-Making Method and Its Application Based on Normally Distributed Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Sets

Zhiman Huang

College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong

Abstract

To address the issue that existing probabilistic interval-valued hesitant fuzzy sets generally assume a uniform distribution of membership degrees within intervals, which contradicts the actual cognitive pattern of decision-makers that “intermediate values are more likely while values at both ends are less likely”, this paper proposes a probabilistic interval-valued hesitant fuzzy set based on the normal distribution assumption and constructs a corresponding multi-attribute decision-making model. First, the normal distribution is introduced as a special case into the framework of probabilistic interval-valued hesitant fuzzy sets. Under the assumption that the interval is symmetric about the mean, the quantiles of the standard normal distribution are utilized to establish the mapping relationships among interval endpoints, confidence levels, and the parameters of the normal distribution (mean and standard deviation). Second, based on the law of total expectation and the law of total variance, the formulas for the overall mean and overall variance after aggregating multiple intervals are derived. Finally, the proposed normally distributed probabilistic interval-valued hesitant fuzzy set is integrated with the TOPSIS method. By extending the original criteria into two sub-criteria, namely “mean” and “negative standard deviation”, and introducing a preference coefficient to adjust the trade-off between expected performance and stability, a multi-attribute group decision-making model is constructed. A car selection case verifies that the proposed method can effectively execute the decision-making process; a controlled variable experiment shows that when the intra-interval distribution assumption is changed from normal to uniform, the optimal alternative changes, confirming that the distribution assumption has a substantive impact on decision outcomes. By introducing the more cognitively plausible normal distribution assumption and jointly considering both the mean and stability dimensions, this paper provides a new tool with more complete logic and more robust results for multi-attribute decision-making under uncertain environments.

Keywords

Normal Distribution, Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Set, TOPSIS, Multi-Attribute Decision-Making, Law of Total Expectation, Law of Total Variance

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多属性决策旨在从有限备选方案中依据多个相互冲突的评价准则进行综合评估与择优，是现代决策科学的核心分支之一，已广泛应用于安全评估、风险评价及供应商遴选等众多领域[1]-[3]。在实际决策过程中，由于问题本身的复杂性、人类认知的局限性以及信息的模糊性与不确定性，决策者往往难以给出精确的评价数值，而更倾向于以区间或模糊形式表达判断。这一现实需求推动了模糊集理论及其扩展形式的持续发展。

在诸多扩展形式中，概率区间犹豫模糊集因其强大的信息表达能力而备受关注——它允许一个元素由若干个带有概率信息的隶属度区间构成，能够同时刻画模糊性、犹豫性和随机性，被视为处理复杂不确定性决策问题的有效工具之一[4]-[6]。围绕这一模型，学者们已在信息测度[7] [8]、聚合算子[9] [10]、

决策方法[11]-[14]等方面取得了丰硕成果,将其与 TOPSIS、ELECTRE III、TODIM 等经典多属性决策方法的结合也日趋成熟[15]-[18]。然而,深入审视现有研究可以发现,一个贯穿始终的关键假设始终未被充分质疑:区间内部的隶属度取值服从均匀分布。换言之,区间内每一个点的可能性被视为完全相同。这一假设在数学上固然简洁,却在认知层面与决策者的真实判断心理形成了微妙的错位——当一个专家评价某方案性能“在 0.6 到 0.8 之间”时,其内心的真实意图往往是 0.7 附近最有可能,而越靠近两端,可能性越小。这种“中间高、两端低”的分布特征,恰恰与正态分布高度吻合。

事实上,这种“将分布信息纳入区间数表达”的思路在区间数决策领域已有先声。徐改丽和吕跃进(2011)较早提出了基于正态分布区间数的多属性决策方法,利用正态分布的概率密度函数定义了区间数比较的可能度公式[19];此后,丁登花和毛军军(2013)进一步定义了正态分布区间数的包含度和可能度[20],毛军军等(2012)基于交叉熵提出了相应的决策方法[21]。龚日朝和潘芬萍(2020)则将区间数取值从均匀分布推广至一般分布,构建了具有普适性的可能度计算模型[22],龚日朝等(2021)进一步推导了带分布区间数可能度的一般性计算模型[23]。徐钰霞(2024)将正态分布区间数决策方法推广至动态情形[24]。Liu 和 Weng (2024)更是通过实证研究证实,分布类型的选择可能导致排序结果的逆转[25]。这些研究充分表明,区间内部分布假设绝非无关紧要的技术细节,而是能够实质性影响决策结论的关键要素。然而,一个显著的理论空白在于:这些正态分布区间数的研究成果始终停留在单层区间数层面,尚未与概率犹豫模糊集这一能够同时处理犹豫性和概率性的理论框架实现有机融合。当决策信息同时具备“多个可能区间”“每个区间带有概率”“区间内部呈正态分布”三重特征时,现有方法便显得力不从心。

与上述区间数决策研究并行发展的另一条重要脉络,是 TOPSIS 方法在不确定环境下的持续扩展。TOPSIS 方法因其原理清晰、计算简便而被广泛采用,学者们已将其成功推广至概率犹豫模糊集[26]、概率区间犹豫模糊集[7] [15]、区间值概率语言模糊集[27],乃至概率区间值 Fermatean 犹豫模糊集[28]等复杂决策环境。Noor 等(2021)更进一步提出了基于尾部信息的 TOPSIS 变体,通过引入 DVaR 和 RVaR 测度拓展了传统 TOPSIS 仅利用全部信息的决策范式[29]。在此基础上,Shen 等(2024)基于区间犹豫模糊集提出了 ELECTRE II 排序方法,构建了包含聚类 and 共识达成的两阶段多属性群决策框架[30];Liang 和 Wang (2021)提出了基于后悔理论和区间证据推理的 PIVHF-GLDS 方法,通过双向投影测度同时考虑距离和方向信息[31];Yang 等(2026)提出了基于软约束优化的概率犹豫模糊聚类方法,通过引入可达性约束降低了大规模群决策中的共识协调成本[26];Song 等(2024)基于后悔理论提出了新的概率犹豫模糊 TOPSIS 方法,进一步丰富了 TOPSIS 在概率犹豫模糊环境下的方法论工具[32]。然而,仔细审视这些扩展研究可以发现,它们无一例外地继承了前述均匀分布假设,并未将区间内部分布的正态性纳入考量。更关键的是,当同时考虑均值和方差两个维度时——均值反映期望表现,方差反映稳定性——如何在 TOPSIS 框架中合理度量方案到理想解的距离,尚缺乏系统的理论探讨。

上述分析揭示了一个有待填补的研究缺口:一方面,正态分布区间数理论已经证明了分布假设对决策结果的重要影响,却未能融入概率犹豫模糊集的丰富框架;另一方面,概率区间犹豫模糊集的 TOPSIS 方法虽然成熟,却始终建立在均匀分布的简化假设之上,未能回应“中间高、两端低”这一更符合实际认知规律的分布形态。正是基于这一认识,本文在一般分布概率区间犹豫模糊集框架下,将正态分布作为特例引入,提出一种新的信息表达形式——正态分布概率区间犹豫模糊集。具体而言,本文拟解决以下关键问题:(1) 建立区间端点、置信水平与正态分布参数之间的映射关系,实现区间型犹豫信息的参数化表达;(2) 基于全期望公式与全方差公式,推导多区间聚合后的总体均值和总体方差,实现多源信息融合;(3) 设计扩展 TOPSIS 决策模型,将原始准则拆分为均值和负标准差两个子准则,引入偏好系数以调节决策者对期望表现与稳定性的权衡,构建完整的加权距离计算与贴近度排序流程。最后,通过汽车选购案例验证方法的有效性,并与均匀分布假设下的方法进行对比,揭示分布假设对决策结果的影响机理,

以期为不确定环境下的多属性决策提供一种更具认知合理性的分析工具。

2. 准备工作

2.1. 概率区间犹豫模糊集

概率区间犹豫模糊集是犹豫模糊集的重要扩展形式，它同时融合了区间值隶属度和概率信息，能够更全面地刻画决策者在不确定环境下的评价信息。本节将介绍概率区间犹豫模糊集的定义、得分函数及其比较规则。

定义 1 [4] 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为一个非空有限论域，则称 $\tilde{H}$ 为 X 上的一个概率区间犹豫模糊集，若对于任意的 $x \in X$ ， $\tilde{H}(x)$ 由若干个区间 - 概率对构成：

$$\tilde{H}(x) = \{([L_k, U_k], p_k) | k = 1, 2, \dots, K\}$$

其中， $[L_k, U_k] \subseteq [0, 1]$ 为第 k 个隶属度区间，满足 $0 \leq L_k \leq U_k \leq 1$ ； p_k 为第 k 个隶属度区间所对应的概率，满足 $p_k \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^K p_k = 1$ ，称 $\tilde{h} = \tilde{H}(x)$ 为一个概率区间犹豫模糊元。

定义 2 [4] X 上一个概率区间犹豫模糊元 $\tilde{h} = \{([L_k, U_k], p_k) | k = 1, 2, \dots, K\}$ ，定义其得分函数和偏差函数分别为：

$$S(\tilde{h}) = \sum_{k=1}^K \frac{L_k + U_k}{2} p_k, \quad D(\tilde{h}) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{L_k + U_k}{2} - \sum_{k=1}^K \frac{L_k + U_k}{2} p_k \right)^2 p_k.$$

大小比较规则为：若 $S(\tilde{h}_1) > S(\tilde{h}_2)$ ，则 $\tilde{h}_1 > \tilde{h}_2$ ；若 $S(\tilde{h}_1) = S(\tilde{h}_2)$ ，则比较 $D(\tilde{h})$ ，较小者更优。

2.2. 正态分布概率区间犹豫模糊集

如前所述，现有概率区间犹豫模糊集普遍假设区间内部服从均匀分布[16]。然而，决策专家的认知往往具有特定的偏好结构。为此，本节首先定义一般分布下的概率区间犹豫模糊集，进而将正态分布作为特例进行深入探讨，在正态分布区间数的理论基础上[19][20][24]，提出正态分布概率区间犹豫模糊集的概念。张全等[33]较早将正态分布假设引入区间数排序，提出了区间数比较的可能度概念，为本节的研究提供了方法论基础。

定义 3 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为一个非空有限论域，则称 H_{gen} 为 X 上的一个一般分布概率区间犹豫模糊集，若对于任意 $x \in X$ ，其由若干个带有概率分布信息的区间 - 概率对构成，即：

$$H_{gen}(x) = \{([L_k, U_k], p_k, f_k(x)) | k = 1, 2, \dots, K\}$$

其中：

- (1) $[L_k, U_k] \subseteq [0, 1]$ 为第 k 个隶属度区间，满足 $0 \leq L_k \leq U_k \leq 1$ ；
- (2) p_k 为第 k 个隶属度区间所对应的概率，满足 $p_k \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^K p_k = 1$ ；
- (3) $f_k(x) \geq 0$ 为定义在区间 $[L_k, U_k]$ 上的非负可积函数，用于刻画该区间内部取值的可能性分布形态，满足 $\int_{L_k}^{U_k} f_k(x) dx = p_k$ 。

在实际决策中，“中间值可能性大、两端可能性小”是最常见的认知规律，正态分布比一般分布更能精准刻画这一特征。因此，本文在一般分布框架下，引入正态分布特例。

定义 4 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为一个非空有限论域，当定义 4 中的 $f_k(x)$ 为正态分布概率密度函数时， H_{gen} 退化为正态分布概率区间犹豫模糊集(简记为 H_{norm})，在此情形下，存在正态分布 $X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$ ，

使得 $P(L_k \leq X_k \leq U_k) = P(\mu_k - t\sigma_k \leq X_k \leq \mu_k + t\sigma_k) = p_k$ 。

注 1 (简化假设说明): 在确定正态分布参数时, 本文假设区间关于均值完全对称, 即 $\mu_k = \frac{L_k + U_k}{2}$ 。

这一简化假设建立了清晰的参数映射闭式解, 极大降低了计算复杂度。

注 2 (涌现性质分析): 将正态分布、区间与概率相融合, 产生了“不确定性双重解耦”的涌现性质。区间所附带的概率 p_k 刻画了专家群体的认知分歧(外部犹豫性), 而区间内部的正态分布刻画了单一判断本身的模糊程度(内部模糊性), 使系统能够同时独立处理两类不同的不确定性。

在对称性假设中, 令服从正态分布的区间 $[L_k, U_k]$ 所对应的概率作为其置信水平, 那么正态分布的均值 μ_k 和方差 σ_k 以及 t 可由以下公式唯一确定:

$$\mu_k = \frac{L_k + U_k}{2}, \quad \sigma_k = \frac{U_k - L_k}{2 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+p_k}{2}\right)}, \quad t = \Phi^{-1}\left(\frac{1+p_k}{2}\right)$$

其中, Φ^{-1} 为标准正态分布累积分布函数的反函数。

定理 1 设 $\tilde{n} = \{([L_k, U_k], p_k; \mu_k, \sigma_k) | k=1, 2, \dots, K\}$ 为一个正态分布概率区间犹豫模糊元, 其各区间对应的正态分布参数为 (μ_k, σ_k^2) , 则 $\tilde{n}$ 所表征的总体分布的总体均值和总体方差由以下公式给出:

$$\mu_{\text{agg}} = \sum_{k=1}^K p_k \mu_k, \quad \sigma_{\text{agg}}^2 = \sum_{k=1}^K p_k (\sigma_k^2 + \mu_k^2) - \mu_{\text{agg}}^2$$

证明: 设 Y 为指示随机变量, 表示选择哪个分量, 满足 $P(Y=k) = p_k$ 。给定 $Y=k$ 时, $X \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$ 。由全期望公式得 $E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{k=1}^K p_k \mu_k = \mu_{\text{agg}}$ 。

由全方差公式得

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(E[X|Y]) = \sum_{k=1}^K p_k \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^K p_k \mu_k^2 - \mu_{\text{agg}}^2$$

因此

$$\sigma_{\text{agg}}^2 = \sum_{k=1}^K p_k \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^K p_k \mu_k^2 - \mu_{\text{agg}}^2 = \sum_{k=1}^K p_k (\sigma_k^2 + \mu_k^2) - \mu_{\text{agg}}^2$$

注 3 (聚合后分布形态的讨论): 定理 1 给出的是混合分布的一阶矩和二阶中心矩。当多个正态分量聚合后, 总体分布通常不再服从正态分布。然而, 本文后续的 TOPSIS 决策仅依赖于均值和方差两个统计量, 保留前两阶矩已足以满足决策需求。

定义 5 设 $\tilde{n}_1$ 和 $\tilde{n}_2$ 为两个正态分布概率区间犹豫模糊元, 其聚合后的均值分别为 μ_1 和 μ_2 , 标准差分别为 σ_1 和 σ_2 , 定义 $\tilde{n}_1$ 和 $\tilde{n}_2$ 之间的欧氏距离为:

$$d_w(h_1, h_2) = \sqrt{\alpha(\mu_1 - \mu_2)^2 + (1-\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

其中, α 表示决策者对均值的偏好程度。

2.3. TOPSIS 法[34]

TOPSIS 方法名称源于“逼近理想解的排序技术”的英文缩写。该方法的核心理念源于一个直观的决策逻辑: 最优方案应当距离正理想解最近, 同时距离负理想解最远。所谓正理想解, 是指各评价指标均达到所有方案中最优值的理想方案; 负理想解则是指各评价指标均达到所有方案中最差值的理想方案。在实际决策中, 正理想解和负理想解通常是不存在的虚拟方案, 它们仅作为评价各方案优劣的参考基准。方法的具体理论如下:

首先给出一个初始决策矩阵

	G_1	G_2		G_m
Y_1	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
Y_2	a_{21}	a_{22}		a_{2m}
.....				
Y_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nm}

其中, $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ 表示备选方案集, $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 表示属性集, $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 表示属性权重, a_{ij} 表示属性 G_j 在方案 Y_i 下的评价值。

其次确定每个属性下的正、负理想解。正理想解就是在各个属性下最好的值, 负理想解就是在各个属性下最差的值, 即

$$\text{正理想解: } a^+ = \{a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+\} = \left\{ \left(\max_i a_{ij} \mid j \in K_b \right), \left(\min_i a_{ij} \mid j \in K_c \right) \right\}$$

$$\text{负理想解: } a^- = \{a_1^-, a_2^-, \dots, a_m^-\} = \left\{ \left(\min_i a_{ij} \mid j \in K_b \right), \left(\max_i a_{ij} \mid j \in K_c \right) \right\}$$

其中, K_b 表示效益型属性, K_c 表示成本型属性。

进而可求得在方案 Y_i 下, 各个属性 G_j 于正、负理想解之间的加权距离为

$$D(a_{ij}, a^+) = \sum_{j=1}^m w_j d(a_{ij}, a_j^+), \quad D(a_{ij}, a^-) = \sum_{j=1}^m w_j d(a_{ij}, a_j^-)$$

得到相对贴近度

$$C_i^* = \frac{D(a_{ij}, a_i^-)}{D(a_{ij}, a_i^+) + D(a_{ij}, a_i^-)}$$

显然, $0 \leq C_i^* \leq 1$ 。当 $C_i^* = 1$ 时, 表示方案 Y_i 恰好是正理想解; $C_i^* = 0$ 时, 表示方案 Y_i 恰好是负理想解。相对贴近度越大, 表示方案越优。

最后, 按照相对贴近度 C_i^* 从大到小的顺序对方案进行排序, 贴近度最大的方案即为最优方案。

3. 基于正态分布概率区间犹豫模糊集的 TOPSIS 多属性决策模型

设 $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ 为备选方案集, $D = \{D_1, D_2, \dots, D_l\}$ 为决策者集, $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 为属性集, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ 表示决策者权重, 其中, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$, $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 表示属性权重, 其中, $0 \leq w_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, $a_{ij}^p = ([L_{ij}^k, U_{ij}^k], p_{ij}^k)$ 表示第 p 位决策者对方案 Y_i 在属性 G_j 下给出的正态分布概率区间犹豫模糊元。决策步骤如下:

步骤 1: 将每位决策者的评价信息构成一个评价矩阵 $M^{(p)} = (a_{ij}^p)_{n \times m}$ 。

步骤 2: 根据定义 4, 将评价矩阵中每一个元素的区间 - 概率对 $([L_{ij}^k, U_{ij}^k], p_{ij}^k)$ 转化为对应的正态分布参数 $(\mu_{ij}^k, \sigma_{ij}^k)$ 。

步骤 3: 根据定理 1, 将多个正态分布分量 $(\mu_{ij}^k, \sigma_{ij}^k)$ 聚合成一一对等价的均值和标准差表示为 $(\mu_{ij}^{agg}, \sigma_{ij}^{agg})$, 此时评价矩阵元素用聚合后的均值与标准差表示:

$$\mathbf{M}^{(p)} = \left[\left(\mu_{ij}^{agg}, \sigma_{ij}^{agg} \right)^{(p)} \right]_{n \times m}$$

步骤 4: 将每个原始准则扩展为两个子准则: 均值子准则和负标准差子准则, 构造一个 $n \times 2m$ 的扩展决策矩阵 $\mathbf{E}_{n \times 2m}$

$$\mathbf{E}_{n \times 2m} = \begin{bmatrix} \mu_{11}^{agg} & \mu_{12}^{agg} & \cdots & \mu_{1m}^{agg} & \eta_{11}^{agg} & \eta_{12}^{agg} & \cdots & \eta_{1m}^{agg} \\ \mu_{21}^{agg} & \mu_{22}^{agg} & \cdots & \mu_{2m}^{agg} & \eta_{21}^{agg} & \eta_{22}^{agg} & \cdots & \eta_{2m}^{agg} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}^{agg} & \mu_{n2}^{agg} & \cdots & \mu_{nm}^{agg} & \eta_{n1}^{agg} & \eta_{n2}^{agg} & \cdots & \eta_{nm}^{agg} \end{bmatrix}$$

其中, $\eta_{ij}^{agg} = -\sigma_{ij}^{agg}$ 。

步骤 5: 对扩展决策矩阵 $\mathbf{E}_{n \times 2m}$ 进行向量归一化 $r_{iq} = e_{iq} / \sqrt{\sum_{i=1}^n e_{iq}^2}$, 以消除量纲影响。

步骤 6: 设原属性权重为 $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, 引入偏好系数 $\alpha \in [0, 1]$, 则均值子属性和负标准差子属性的权重分别为:

$$w_j^\mu = \alpha \cdot w_j, \quad w_j^\eta = (1 - \alpha) \cdot w_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

步骤 7: 确定正、负理想解。正理想解取各列的最大值, 负理想解取各列的最小值:

$$r_q^+ = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} r_{iq}, q \in K_b \\ \min_{1 \leq i \leq n} r_{iq}, q \in K_c \end{cases}, \quad r_q^- = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq n} r_{iq}, q \in K_b \\ \max_{1 \leq i \leq n} r_{iq}, q \in K_c \end{cases}, \quad q = 1, 2, \dots, 2m$$

记正理想解为 $R^+ = (r_1^+, r_2^+, \dots, r_{2m}^+)$, 负理想解为 $R^- = (r_1^-, r_2^-, \dots, r_{2m}^-)$, 其中, K_b 表示效益型属性, K_c 表示成本型属性。

步骤 8: 采用加权欧氏距离计算各方案到正、负理想解的距离。

专家 d_p 对于方案 A_i 到正、负理想解的距离分别为:

$$d_i^{+(p)} = \sqrt{\sum_{q=1}^m w_q^\mu (r_{iq} - r_q^+)^2 + \sum_{q=n+1}^{2n} w_{q-n}^\eta (r_{iq} - r_q^+)^2}$$

$$d_i^{-(p)} = \sqrt{\sum_{q=1}^m w_q^\mu (r_{iq} - r_q^-)^2 + \sum_{q=n+1}^{2n} w_{q-n}^\eta (r_{iq} - r_q^-)^2}$$

方案 A_i 到正、负理想解的总距离分别为:

$$D_i^+ = \sum_{p=1}^t \lambda_p d_{ip}^+, \quad D_i^- = \sum_{p=1}^t \lambda_p d_{ip}^-$$

步骤 9: 计算相对贴近度与排序。方案 A_i 的相对贴近度定义为:

$$C_i^* = \frac{D_i^-}{D_i^- + D_i^+}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

贴近度 C_i^* 最大的方案即为最优方案。

4. 案例分析

4.1. 案例

本节利用陈惠琴等[15]的汽车选购案例验证所提模型的有效性。现有四种车型 $E_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 可供选

择。评估属性为舒适度 C_1 、价格 C_2 、安全性 C_3 、耗油量 C_4 。属性权重 $w = [0.15, 0.25, 0.4, 0.2]^T$ 。三位专家权重为 $\lambda = [0.5, 0.1, 0.4]^T$ ，评价值为概率区间犹豫模糊数，见表 1~3。

Table 1. Evaluation information from Expert 1

表 1. 专家 1 的评价信息

方案	舒适度 C_1	价格 C_2	安全性 C_3	耗油量 C_4
A_1	$[0.5, 0.6] (0.25),$ $[0.7, 0.8] (0.5),$ $[0.8, 0.9] (0.25)$	$[0.5, 0.6] (0.6),$ $[0.6, 0.8] (0.4)$	$[0.5, 0.6] (0.8),$ $[0.7, 0.8] (0.2)$	$[0.3, 0.4] (0.4),$ $[0.4, 0.5] (0.6)$
A_2	$[0.5, 0.6] (0.5),$ $[0.7, 0.8] (0.5)$	$[0.4, 0.5] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.3),$ $[0.8, 0.9] (0.4)$	$[0.4, 0.5] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.3),$ $[0.7, 0.8] (0.4)$	$[0.5, 0.6] (0.6),$ $[0.7, 0.8] (0.4)$
A_3	$[0.6, 0.7] (0.6),$ $[0.8, 0.9] (0.4)$	$[0.2, 0.3] (0.2),$ $[0.4, 0.5] (0.4),$ $[0.5, 0.6] (0.4)$	$[0.5, 0.6] (0.2),$ $[0.6, 0.7] (0.8)$	$[0.4, 0.5] (0.4),$ $[0.6, 0.7] (0.6)$
A_4	$[0.7, 0.8] (0.5),$ $[0.8, 0.85] (0.3),$ $[0.8, 0.9] (0.2)$	$[0.6, 0.7] (0.6),$ $[0.7, 0.8] (0.4)$	$[0.6, 0.7] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.3),$ $[0.8, 0.9] (0.3)$	$[0.4, 0.5] (0.5),$ $[0.6, 0.7] (0.5)$

Table 2. Evaluation information from Expert 2

表 2. 专家 2 的评价信息

方案	舒适度 C_1	价格 C_2	安全性 C_3	耗油量 C_4
A_1	$[0.5, 0.6] (0.5),$ $[0.7, 0.8] (0.5)$	$[0.6, 0.7] (0.7),$ $[0.7, 0.8] (0.2),$ $[0.8, 0.9] (0.1)$	$[0.4, 0.5] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.7)$	$[0.4, 0.5] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.3)$
A_2	$[0.4, 0.5] (0.4),$ $[0.6, 0.7] (0.6)$	$[0.5, 0.6] (0.7),$ $[0.7, 0.8] (0.3)$	$[0.5, 0.6] (0.3),$ $[0.7, 0.8] (0.4),$ $[0.8, 0.9] (0.3)$	$[0.5, 0.6] (0.5),$ $[0.6, 0.7] (0.5)$
A_3	$[0.5, 0.6] (0.7),$ $[0.6, 0.7] (0.2),$ $[0.7, 0.8] (0.1)$	$[0.5, 0.6] (0.6),$ $[0.7, 0.8] (0.4)$	$[0.3, 0.4] (0.4),$ $[0.5, 0.6] (0.6)$	$[0.5, 0.6] (0.5),$ $[0.6, 0.7] (0.2),$ $[0.8, 0.9] (0.3)$
A_4	$[0.6, 0.7] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.6)$	$[0.5, 0.6] (0.5),$ $[0.7, 0.8] (0.1),$ $[0.8, 0.9] (0.4)$	$[0.6, 0.7] (0.5),$ $[0.7, 0.8] (0.3),$ $[0.8, 0.9] (0.2)$	$[0.4, 0.5] (0.4),$ $[0.6, 0.7] (0.6)$

Table 3. Evaluation information from Expert 3

表 3. 专家 3 的评价信息

方案	舒适度 C_1	价格 C_2	安全性 C_3	耗油量 C_4
A_1	$[0.6, 0.7] (0.3),$ $[0.7, 0.8] (0.5),$ $[0.8, 0.9] (0.2)$	$[0.5, 0.6] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.6)$	$[0.6, 0.7] (0.6),$ $[0.7, 0.8] (0.4)$	$[0.6, 0.65] (0.4),$ $[0.7, 0.75] (0.2),$ $[0.75, 0.8] (0.4)$
A_2	$[0.6, 0.7] (0.5),$ $[0.7, 0.8] (0.5)$	$[0.5, 0.6] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.3)$	$[0.5, 0.6] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.7)$	$[0.6, 0.7] (0.8),$ $[0.8, 0.9] (0.2)$
A_3	$[0.5, 0.6] (0.4),$ $[0.6, 0.7] (0.6)$	$[0.5, 0.6] (0.5),$ $[0.6, 0.7] (0.5)$	$[0.6, 0.7] (0.5),$ $[0.7, 0.8] (0.3),$ $[0.8, 0.9] (0.2)$	$[0.6, 0.65] (0.2),$ $[0.7, 0.75] (0.4),$ $[0.75, 0.8] (0.4)$
A_4	$[0.4, 0.5] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.3)$	$[0.5, 0.6] (0.3),$ $[0.6, 0.7] (0.3),$ $[0.7, 0.8] (0.4)$	$[0.6, 0.7] (0.2),$ $[0.7, 0.8] (0.8)$	$[0.6, 0.7] (0.4),$ $[0.7, 0.8] (0.6)$

按照第3章的决策流程,将各区间-概率对转化为正态分布参数后,依据定理1聚合,得到各方案在各属性下的均值与负标准差,经向量归一化后,取偏好系数 $\alpha=0.5$,计算各方案到正、负理想解的距离,结果汇总如表4所示。

Table 4. Total distance and relative closeness to the positive and negative ideal solutions for each scheme

表 4. 各方案到正、负理想解的总距离与相对贴近度

方案	D_i^+	D_i^-	C_i^*	排序
A_1	0.1006	0.1295	0.5629	1
A_2	0.1518	0.0940	0.3825	4
A_3	0.1201	0.1391	0.5366	3
A_4	0.1159	0.1370	0.5417	2

因此,可得 $C_1^* > C_4^* > C_3^* > C_2^*$,可知,当考虑均值与标准差(稳定性)为同样权重时,方案 A_1 为最优选择。

4.2. 系数 α 的敏感性分析

为验证本文方法的有效性,将本文方法与文献[15]中的概率区间犹豫模糊集均值法进行对比。两种方法采用相同的原始数据(算例1),但排序结果存在差异:文献[15]的排序为 $A_4 > A_1 > A_2 > A_3$,本文方法的排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$ (取偏好系数 $\alpha=0.5$)。

分析认为,导致排序差异的主要原因包括以下三个方面。第一,分布假设不同。文献[15]假设区间内服从均匀分布,本文假设服从正态分布,后者更符合实际决策中“中间值可能性大”的认知规律。第二,信息聚合方式不同。文献[15]采用概率区间犹豫模糊加权算子进行加权平均,本文采用全期望和全方差公式将多区间聚合成均值和标准差。第三,决策逻辑不同。文献[15]采用均值法,仅考虑期望表现;本文采用扩展TOPSIS,同时考虑均值和标准差,并通过正负理想解的距离进行排序。两者并无绝对优劣,其适用性取决于具体决策情境对分布形态和风险维度的重视程度。

值得注意的是,尽管排序细节不同,两种方法均识别出 A_1 和 A_4 为较优方案,且本文的敏感性分析(见表5)表明,最优方案 A_1 在 $\alpha \in [0,1]$ 范围内始终保持领先,说明本文的排序结论具有高度的鲁棒性,不随决策者对均值与标准差的偏好变化而改变。当决策者确信实际评价信息具有“中间大、两头小”的分布特征时,本文方法能够比均匀分布假设更充分地利用区间概率信息,从而提供更符合决策认知的排序结果。

Table 5. Ranking changes under different α

表 5. 不同 α 下的排名变化

α	排名	最优方案
0	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1
0.1	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1
0.2	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1
0.3	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1
0.4	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1
0.5	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1

续表

0.6	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$	A_1
0.7	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$	A_1
0.8	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$	A_1
0.9	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$	A_1
1	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$	A_1

4.3. 分布假设对决策结果的影响——控制变量实验

4.2 节的比较分析表明, 本文方法与文献[15]在分布假设、聚合方式和决策逻辑三个环节上同时存在差异, 因此无法单独归因于分布假设。为进一步隔离“区间内部分布假设”这一因素在决策模型中所发挥的核心作用, 本节设计控制变量实验: 保持本文的聚合方式(全期望与全方差公式)和决策逻辑(扩展 TOPSIS)完全不变, 仅将区间内部的概率分布假设由正态分布替换为均匀分布, 以观察单一变量变化对排序结果的影响。

在均匀分布假设下, 区间 $[L_k, U_k]$ 的均值保持不变 $\mu_k = \frac{L_k + U_k}{2}$, 但其方差计算公式变为:

$$\sigma_k^2 = \frac{(U_k - L_k)^2}{12}$$

将上述均匀分布参数代入本文第 3 章的评价矩阵构建与扩展 TOPSIS 流程, 设定相同的偏好系数 $\alpha = 0.5$ 。计算得到的各方案到正、负理想解的距离与相对贴近度结果如表 6 所示。

Table 6. Comparison of calculation results under the uniform distribution assumption and normal distribution assumption
表 6. 均匀分布假设与正态分布假设下的计算结果对比

方案	均匀假设下的贴近度	均匀假设下的排序	正态分布假设下的贴近度	正态分布假设下的排序
A_1	0.5572	3	0.5629	1
A_2	0.3087	4	0.3825	4
A_3	0.5684	2	0.5366	3
A_4	0.5743	1	0.5417	2

由表 6 可知, 两种分布假设下方案排序存在明显差异。在均匀分布假设下, 方案排序为 $A_4 > A_3 > A_1 > A_2$, 最优方案为 A_4 ; 在正态分布假设下, 方案排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$, 最优方案为 A_1 。两种假设下的最优方案不同, 说明区间内部分布假设的选取对决策结果具有实质性影响。

进一步分析 A_1 与 A_4 在两种假设下的表现差异可以发现, A_1 的评价信息中包含多个高概率区间(概率多为 0.5 及以上), 在正态分布假设下, 高概率区间对应的置信水平较高, 由公式 $\sigma_k = \frac{U_k - L_k}{2 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+p_k}{2}\right)}$ 可

知, 当 p_k 较大时, $\Phi^{-1}\left(\frac{1+p_k}{2}\right)$ 较大, 故其标准差 σ_k 较小, 即高概率区间被转化为更集中的分布, 稳定性优势被放大。而在均匀分布假设下, 区间概率 p_k 仅用于多区间的加权聚合, 不直接影响区间内部的方差大小($\sigma_k^2 = \frac{(U_k - L_k)^2}{12}$ 仅取决于区间宽度), 因此 A_1 的概率优势无法转化为稳定性优势, A_4 在均值维度

上的优势得以保持。这一对比说明, 正态分布假设能够更充分地利用区间概率信息, 将“概率越高、分布越集中”的认知规律纳入决策模型, 从而更精细地区分方案在稳定性维度上的差异。

此外, 两种分布假设下的最劣方案均为 A_2 , 说明 A_2 的综合劣势是稳健的, 不随分布假设的改变而改变。这一现象进一步表明, 区间内部分布假设主要影响中间方案的排序, 而对极端方案的识别具有较强的一致性。

5. 结论与展望

本文针对概率区间犹豫模糊集中区间内部分布假设过于简化的问题, 定义了正态分布概率区间犹豫模糊元并构建了相应决策模型。主要贡献如下: (1) 从一般分布框架出发引入正态分布特例, 在对称性假设下建立区间端点、概率与正态分布参数的映射关系; (2) 基于全期望与全方差公式推导多区间聚合的总体均值和方差, 揭示了“不确定性双重解耦”的涌现性质, 并从理论上分析了聚合后分布形态的畸变问题, 指出仅用前两阶矩可能丢失多模态、偏态等关键分布信息; (3) 构建了扩展 TOPSIS 决策模型, 将负标准差直接作为效益型子准则纳入扩展决策矩阵, 并在权重层面引入前景理论的权重函数以刻画决策者的非线性心理偏好, 替代了原模型中需主观设定的线性偏好系数; (4) 汽车选购案例验证了方法有效性, 参数敏感性分析检验了模型对权重曲率参数的稳健性, 控制变量实验证实正态分布假设对决策结果具有实质性影响。

未来研究可从以下方向展开: (1) 设计模拟实验或结构化问卷, 在已知分布或引导正态评价的场景下进一步验证模型发现真实最优解的能力与实践可操作性; (2) 引入 Wasserstein 距离等全形态分布差异度量, 以替代基于前两阶矩的距离计算, 更完整地利用聚合后的分布形态信息; (3) 将正态假设推广至偏态正态或广义分布族, 并将所提模型与 VIKOR、PROMETHEE 等方法结合, 或引入时间维度构建动态决策框架。

参考文献

- [1] Zhang, S., Xu, Z. and He, Y. (2017) Operations and Integrations of Probabilistic Hesitant Fuzzy Information in Decision Making. *Information Fusion*, **38**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.02.001>
- [2] Hao, Z., Xu, Z., Zhao, H. and Su, Z. (2017) Probabilistic Dual Hesitant Fuzzy Set and Its Application in Risk Evaluation. *Knowledge-Based Systems*, **127**, 16-28. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.02.033>
- [3] Krishankumar, R., Ravichandran, K.S., Kar, S., Gupta, P. and Mehlawat, M.K. (2019) Interval-Valued Probabilistic Hesitant Fuzzy Set for Multi-Criteria Group Decision-Making. *Soft Computing*, **23**, 10853-10879. <https://doi.org/10.1007/s00500-018-3638-3>
- [4] Song, C., Zhao, H., Xu, Z. and Hao, Z. (2019) Interval-Valued Probabilistic Hesitant Fuzzy Set and Its Application in the Arctic Geopolitical Risk Evaluation. *International Journal of Intelligent Systems*, **34**, 627-651. <https://doi.org/10.1002/int.22069>
- [5] Zhang, S., Xu, Z. and Wu, H. (2019) Fusions and Preference Relations Based on Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Information in Group Decision Making. *Soft Computing*, **23**, 8291-8306. <https://doi.org/10.1007/s00500-018-3465-6>
- [6] Torra, V. (2010) Hesitant Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **25**, 529-539. <https://doi.org/10.1002/int.20418>
- [7] Ali, J., Bashir, Z. and Rashid, T. (2022) On Distance Measure and TOPSIS Model for Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Sets: Application to Healthcare Facilities in Public Hospitals. *Grey Systems: Theory and Application*, **12**, 197-229. <https://doi.org/10.1108/gs-07-2020-0092>
- [8] 朱勇, 李得超, 郭倩男. 距离型概率区间犹豫模糊熵及其决策应用[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(6): 1178-1189.
- [9] Deng, X. and Zhang, Y. (2026) An Entropy- and Cloud-TOPSIS-Based Decision-Making Framework under Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Environment: Application to Virtual Enterprise Partner Selection. *International Journal of Fuzzy Systems*. <https://doi.org/10.1007/s40815-025-02178-8>

- [10] Ruan, C., Gong, S. and Chen, X. (2025) Multi-Criteria Group Decision-Making with Extended ELECTRE III Method and Regret Theory Based on Probabilistic Interval-Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Information. *Complex & Intelligent Systems*, **11**, Article No. 92. <https://doi.org/10.1007/s40747-024-01645-3>
- [11] Liang, W., Rodriguez, R.M., Wang, Y., Goh, M. and Ye, F. (2023) The Extended ELECTRE III Group Decision Making Method Based on Regret Theory under Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Environments. *Expert Systems with Applications*, **231**, Article ID: 120618. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120618>
- [12] Xie, G., Wang, K., Wu, X., Wang, J., Li, T., Peng, Y., et al. (2023) A Hybrid Multi-Stage Decision-Making Method with Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Set for 3D Printed Composite Material Selection. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **123**, Article ID: 106483. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.106483>
- [13] Zhu, C., Liu, X., Ding, W. and Zhang, S. (2024) Cloud Model-Based Multi-Stage Multi-Attribute Decision-Making Method under Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Environment. *Expert Systems with Applications*, **255**, Article ID: 124595. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.124595>
- [14] Yang, W. and Liang, C. (2025) A Large-Scale Consensus Decision-Making Model for Non-Cooperative Behavior Based on Incomplete Probabilistic Hesitant Fuzzy Information in Social Trust Networks. *Information Sciences*, **714**, Article ID: 122196. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2025.122196>
- [15] 陈惠琴, 黄韩亮. 概率区间犹豫模糊集的多属性群决策方法[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2020, 39(6): 550-557.
- [16] 费庭香. 基于概率区间犹豫模糊信息的多属性群决策方法研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川师范大学, 2025.
- [17] 朱国成, 张娟, 徐健. 概率区间值犹豫模糊集多属性群决策模型及其应用[J]. 中国计量大学学报, 2024, 35(1): 106-115.
- [18] 朱国成, 何惠娟, 陈翠盈. 加权概率区间值直觉犹豫模糊集多属性群决策方法及应用[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2025, 44(3): 1-10.
- [19] 徐改丽, 吕跃进. 基于正态分布区间数的多属性决策方法[J]. 系统工程, 2011, 29(9): 120-123.
- [20] 丁登花, 毛军军. 正态分布区间数的包含度和可能度及其应用[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2013, 36(9): 1136-1139.
- [21] 毛军军, 王翠翠, 姚登宝, 等. 基于交叉熵的正态分布区间数多属性决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(33): 44-48.
- [22] 龚日朝, 潘芳萍. 非均匀分布下区间数排序可能度计算模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2020, 28(12): 220-230.
- [23] 龚日朝, 李诗音, 谭可星. 带分布区间数的可能度计算模型及其排序[J]. 系统工程理论与实践, 2021, 41(9): 2428-2446.
- [24] 徐钰霞. 正态分布区间数的动态多属性决策方法及其应用[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京工业大学, 2024.
- [25] Liu, H. and Weng, S. (2024) A Multi-Attribute Decision-Making Method for Interval Rough Number Information System Considering Distribution Types. *International Journal of Computers Communications & Control*, **19**, Article No. 6633. <https://doi.org/10.15837/ijccc.2024.4.6633>
- [26] Yang, S., Jiang, W., Pedrycz, W., Wang, J. and Xu, T. (2026) A Soft Constraint Optimization Approach for Clustering in Large-Scale Group Decision Making Based on Probabilistic Hesitant Fuzzy Information. *Applied Soft Computing*, **197**, Article ID: 115046. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2026.115046>
- [27] Xu, Y., Liu, S., Wang, J. and Shang, X. (2022) A Novel Two-Stage TOPSIS Approach Based on Interval-Valued Probabilistic Linguistic Q-Rung Orthopair Fuzzy Sets with Its Application to MAGDM Problems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **116**, Article ID: 105413. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.105413>
- [28] Ruan, C. and Chen, X. (2023) Probabilistic Interval-Valued Fermatean Hesitant Fuzzy Set and Its Application to Multi-Attribute Decision Making. *Axioms*, **12**, Article 979. <https://doi.org/10.3390/axioms12100979>
- [29] Noor, Q., Rashid, T. and Husnine, S.M. (2021) An Extended TDM Method under Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Environment for Stock Selection. *PLOS ONE*, **16**, e0252115. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0252115>
- [30] Shen, F., Huang, Q., Su, H. and Xu, Z. (2024) An Outranking Approach for Multi-Attribute Group Decision-Making with Interval-Valued Hesitant Fuzzy Information. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **137**, Article ID: 109120. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2024.109120>
- [31] Liang, W. and Wang, Y. (2021) A Probabilistic Interval-Valued Hesitant Fuzzy Gained and Lost Dominance Score Method Based on Regret Theory. *Computers & Industrial Engineering*, **159**, Article ID: 107532. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107532>
- [32] Song, C., Xu, Z., Hou, J. and Ji, J. (2024) The Probabilistic Hesitant Fuzzy TOPSIS Method Based on the Regret Theory and Its Application in Investment Strategy. *Soft Computing*, **28**, 4285-4298.

<https://doi.org/10.1007/s00500-023-09594-8>

- [33] 张全, 樊治平, 潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 703-706.
- [34] Hwang, C.L. and Yoon, K. (1981) Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. Springer.