

具有饱和发生率的Filippov戒烟模型及全局动力学分析

张红艳

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年7月25日; 录用日期: 2026年8月17日; 发布日期: 2026年8月28日

摘要

本文在经典传染病模型的基础上, 考虑了饱和发生率, 同时结合政府对吸烟的不连续干预策略, 建立了具有饱和发生率的Filippov戒烟模型。利用Filippov理论方法, 分析了该模型的滑模动力学行为, 探究了系统的全局动力学特性, 得到了系统无病平衡点、地方病平衡点或伪平衡点的全局渐近稳定性条件。结果表明, 一定的干预措施能够降低吸烟人数并将吸烟人数控制在阈值范围之内。

关键词

Filippov系统, 饱和发生率, 全局稳定性

Global Dynamics Analysis of a Filippov Smoking Cessation Model with Saturated Incidence Rate

Hongyan Zhang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: July 25, 2026; accepted: August 17, 2026; published: August 28, 2026

Abstract

Based on a classical epidemic model, this study develops a Filippov smoking cessation model incorporating a saturated incidence rate and government's discontinuous intervention strategies. By employing the approach of Filippov theory, we analyze the sliding mode dynamics and investigate the global dynamical behaviors of the system. Sufficient conditions are derived for the global asymptotical stability of a disease-free equilibrium, an endemic equilibrium, or a pseudo equilibrium. The results

indicate that appropriate intervention measures can reduce the number of smokers and keep them within a predetermined threshold level.

Keywords

Filippov System, Saturated Incidence Rate, Global Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

吸烟是世界迄今为止面临的巨大威胁之一。据世界卫生组织预估,吸烟人数到 2030 年将上升至 1000 万,即每 3 秒钟将有一人死于吸烟[1]。而吸烟者的吸烟行为影响着身边的同学、朋友、家人或同事,这种影响在青少年和同伴之间更加明显,在一项针对 12 岁至 14 岁青少年的研究表明,那些最好的朋友吸烟的青少年也吸烟的可能性是同龄人的四倍[2]。因此,许多学者借鉴流行病学理论,将吸烟行为视为一种可通过社交接触传播的现象,并利用传染病动力学模型对其传播机制进行建模分析[3]-[9]。

早在 1997 年,Castillo-Garsow 等人[10]将人群分为三类:潜在吸烟者、经常吸烟者和戒烟者,研究了青少年吸烟行为的传播过程,并采用了双线性发生率 βPS 。Sharomi 等人[11]对文献[10]的模型进行拓展,将戒烟者分为临时戒烟者和永久戒烟者,通过对模型进行动力学分析,研究了吸烟行为的传播情况。2013 年,Zeb 等人[12]基于平方根 SI 模型,提出了关于潜在吸烟者与吸烟者的平方根发生率 $\sqrt{PS}$ 。2015 年,Pang 等人[13]用饱和发生率 $\frac{\beta}{1+mS}$ 描述吸烟区内吸烟者的拥挤效应,其中 β 是关于香烟价格的函数,表示潜在吸烟者和吸烟者之间的有效接触影响率,研究了提高香烟价格与设置专门的吸烟区对吸烟行为传播的影响。2019 年,王霞等人[14]研究了一类具有非线性接触率的戒烟模型,其中 $\varphi(P,S)$ 表示潜在吸烟者与重度吸烟者的传染接触率为非线性函数。

除此之外,鉴于烟草使用对健康、社会和经济造成的巨大且可预防的损害,推行强有力的控烟措施已成为一项至关重要的公共卫生干预手段,采取包括立法、征税、宣传教育与提供戒烟服务在内的控烟策略,对于有效降低吸烟率、预防青少年初始吸烟行为以及保护非吸烟者权益至关重要。2015 年,Sharma 等人[15]建立了一个用于评估媒体宣传活动对社会吸烟率影响的数学模型。同年,Yadav 等人[16]研究了个人戒烟决心水平与教育对吸烟行为传播的影响,其中用 h 来衡量戒烟的决心程度。如果吸烟者的戒烟决心水平很低,那么戒烟者中一部分 $(1-h)\alpha S$ 会变成潜在吸烟者,剩下的一部分就成功变成戒烟者。2025 年,Maurya 等人[17]进一步深化了媒体宣传对戒烟影响的研究,通过构建数学模型研究了恐惧诱导型宣传项目对戒烟的影响。同年,Syata 等人[18]研究了家庭指导与抗尼古丁治疗这两种干预措施对吸烟行为传播的影响。在许多具有干预措施的吸烟模型中,干预策略的实施与变化是连续发生的,但这并不符合实际情况。因为过早或缺乏针对性地实施干预策略,可能因覆盖范围与真实需求不匹配而导致资源冗余;同时,过度干预也可能引发目标群体的心理抵触,反而会削弱干预效果。因此,通过设置合理的阈值策略,可以实现干预措施的有效作用,从而提高戒烟行为的扩散效率,实现干预效益的最大化。马慧丽等人[19]结合阈值策略,研究了具有媒体和政府干预的 Filippov 戒烟模型,其用双线性发生率刻画了媒体与政府对戒烟的影响,而本文使用非线性发生率刻画了吸烟传播的影响率。右端不连续的 Filippov 系统不仅能够准确地刻画这些不连续现象,而且由于所建 Filippov 模型的不连续性,使得系统具有更加丰富的动力学行为,从而揭

示出丰富具有重要生物意义的新结果。因此, 本文基于文献[16], 并且在饱和发生函数 $\frac{\beta PS}{1+kS}$ 的基础上考虑干预措施是不连续发生的, 从而引入了阈值策略, 构建了具有非线性发生率的 Filippov 戒烟模型。

综上所述, 本文大致框架如下: 第 2 节介绍了 Filippov 相关理论以及戒烟模型的基本框架, 同时分析了子系统平衡点的存在性、实虚情况以及局部稳定性。在第 3 节中, 我们基于 Filippov 凸方法, 研究了系统在滑模域的动力学, 伪平衡点的存在条件、类型以及稳定性。在第 4 节中, 进一步证明了平衡点的全局渐近稳定性, 并用数值模拟验证了相关结论。第 5 节则阐述了系统理论结果的生物意义。

2. 模型介绍

当青少年吸烟人数超过一定水平时, 政府、媒体和学校等机构会采取系统性的干预措施, 通过提升青少年对吸烟危害的认知, 降低青少年烟草使用意愿并增强戒烟决心, 从而有效地降低吸烟率, 本文使用饱和函数来表示政府和媒体等采取干预措施后人群的接触影响率, 并考虑青少年的戒烟决心程度。我们将人群分为三种类型: 潜在吸烟者、吸烟者和戒烟者。设 $P(t)$ 、 $S(t)$ 、 $Q(t)$ 分别表示 t 时刻潜在吸烟者、吸烟者和戒烟者的数量。本节结合阈值策略, 考虑了如下具有饱和函数发生率的 Filippov 戒烟模型:

$$\begin{cases} \dot{P} = \mu - \frac{\beta PS}{1+\varepsilon kS} - d_1 P + (1-h)\alpha S, \\ \dot{S} = \frac{\beta PS}{1+\varepsilon kS} - d_2 S - \alpha S, \\ \dot{Q} = \alpha h S - d_3 Q. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中所有参数均为正数, $\varepsilon(S)$ 为控制函数, $S_c > 0$ 为控制阈值, 表示当经常吸烟者的数量大于控制阈值 S_c 时, 政府采取干预措施, 如提高烟草税收和价格、媒体宣传吸烟的危害和禁烟广告等, 来降低青少年吸烟者的数量; 如果经常吸烟者的数量低于控制阈值 S_c 时, 则不采取任何措施。其中

$$\varepsilon(S) = \begin{cases} 0, & S < S_c, \\ 1, & S > S_c. \end{cases}$$

由于系统(2.1)前两个方程不含有 Q , 因此只需要考虑(2.1)前两个方程构成的系统

$$\begin{cases} \dot{P} = \mu - \frac{\beta PS}{1+\varepsilon kS} - d_1 P + (1-h)\alpha S, \\ \dot{S} = \frac{\beta PS}{1+\varepsilon kS} - d_2 S - \alpha S, \end{cases} \quad (2.2)$$

的动力学性质, 记 $\mathbb{R}_+^2 = \{(P, S) \in \mathbb{R}^2 : P > 0, S > 0\}$, 将 $(P, S) \in \mathbb{R}_+^2$ 分为三个区域:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(P, S) | (P, S) \in \mathbb{R}_+^2, S = S_c\}, \\ G_1 &= \{(P, S) | (P, S) \in \mathbb{R}_+^2 : S < S_c\}, \\ G_2 &= \{(P, S) | (P, S) \in \mathbb{R}_+^2 : S > S_c\}, \end{aligned}$$

则称 Σ 为系统(2.2)的切换线。

记 $H(Z) = S - S_c$, $Z = (P, S)$ 且

$$\begin{aligned} F_1 &= (\mu - \beta PS - d_1 P + (1-h)\alpha S, \beta PS - d_2 S - \alpha S), \\ F_2 &= \left(\mu - \frac{\beta PS}{1+kS} - d_1 P + (1-h)\alpha S, \frac{\beta PS}{1+kS} - d_2 S - \alpha S \right). \end{aligned}$$

于是, 系统(2.2)可以写成下面的 Filippov 系统:

$$\left(\frac{dP}{dt}, \frac{dS}{dt}\right)^T = \begin{cases} F_1(P, S), (P, S)^T \in G_1, \\ F_2(P, S), (P, S)^T \in G_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

由于向量场的不连续性, 本文将讨论系统(2.2) Filippov 意义下的解[20], 其定义如下:

定义 2.1 若向量函数 $(P(t), S(t))$ 在 $(0, T)$ 的任意有界闭子区间 $[t_1, t_2]$ 上绝对连续 $(0 < T < +\infty)$, 满足 $P(0) = P_0$ 和 $S(0) = S_0$, 且存在可测函数 $\gamma = \gamma(t): [0, T] \rightarrow [0, 1]$ 使得对几乎所有的 $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{cases} \dot{P} = \mu - \frac{\beta PS}{1 + \gamma k S} - d_1 P + (1 - h)\alpha S, \\ \dot{S} = \frac{\beta PS}{1 + \gamma k S} - d_2 S - \alpha S, \end{cases} \quad (2.4)$$

那么称向量函数 $(P(t), S(t))$ 是系统(2.2)过初始值 (P_0, S_0) 的解。

记 $L_{F_i} H(Z) = \langle \nabla H(Z), F_i(Z) \rangle$ 表示函数 $H(Z)$ 在向量场 $F_i(Z)$ 上的李导数, 这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。根据文献[16]-[19], 可定义切换线上的区域如下:

(1) 若切换线 Σ 上的点 Z 满足 $F_1 H(Z) \cdot F_2 H(Z) > 0$, 那么称 Z 为穿越点。所有穿越点构成的集合称为穿越区域, 记为 Σ_c ;

(2) 若切换线 Σ 上的点 Z 满足 $F_1 H(Z) > 0, F_2 H(Z) < 0$, 那么称 Z 为滑模点。所有滑模点构成的集合称为滑模区域, 记为 Σ_s ;

(3) 若切换线 Σ 上的点 Z 满足 $F_1 H(Z) < 0, F_2 H(Z) > 0$, 那么称 Z 为逃逸点。所有逃逸点构成的集合称为逃逸区域, 记为 Σ_e 。

根据 Filippov 凸方法, 可以得到 Filippov 系统在切换线 Σ 上的滑模方程:

$$\frac{dZ}{dP} = f(Z) = \lambda F_1(Z) + (1 - \lambda) F_2(Z), Z \in \Sigma_s$$

其中

$$\lambda = \frac{\langle \nabla H(Z), F_2(Z) \rangle}{\langle \nabla H(Z), F_2(Z) - F_1(Z) \rangle}.$$

接下来给出本文中涉及到的平面 Filippov 系统的平衡点类型。

定义 2.2 Filippov 系统(2.2)平衡点

(1) 若 $F_1(Z^*) = 0, H(Z^*) < 0$ 或 $F_2(Z^*) = 0, H(Z^*) > 0$ 成立, 则称 Z^* 为实平衡点;

(2) 若 $F_1(Z^*) = 0, H(Z^*) > 0$ 或 $F_2(Z^*) = 0, H(Z^*) < 0$ 成立, 则称 Z^* 为虚平衡点;

(3) 若 $\lambda F_1(Z^*) + (1 - \lambda) F_2(Z^*) = 0$, 且 $Z^* \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$, 则称 Z^* 为伪平衡点;

(4) 若 $F_1(Z^*) = 0$ 或 $F_2(Z^*) = 0$, $H(Z^*) = 0$, 则称 Z^* 为边界平衡点。

定义 2.3 若 $Z \in \Sigma$ 满足 $L_{F_1} H(Z) = 0$ 且 $F_2(Z) \neq 0$ 或 $L_{F_2} H(Z) = 0$ 且 $F_1(Z) \neq 0$, 则称点 Z 为 Filippov 系统(2.4)的切点。

为了考虑模型(2.1)的生物意义, 需分析系统(2.2)解的有界性和正性, 其证明由下面这个命题给出:

命题 2.4 令 $(P(t), S(t))$ 是系统(2.1)满足初始条件 $P(0) = P_0 \geq 0$, $S(0) = S_0 \geq 0$ 的解。存在区间为 $[0, T)$, 其中 $T \in (0, +\infty]$, 则对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $P(t) \geq 0$, $S(t) \geq 0$ 。

证明 若 $S_0 = 0$, 则对所有的 $t \in [0, T)$, 都有 $S(t) = 0$; 若 $S_0 > 0$, 假设存在 t_1 , 使得 $P(t_1) < 0$, 则存在 $t_* \in (0, t_1)$, 使得 $S(t_*) = 0$, 且对任意的 $t \in [0, t_*)$, 有 $S(t) > 0$ 。由系统(2.1)第二个式子可得

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\beta PS}{1+\gamma kS} - d_2 S - \alpha S \\ &= S \left(\frac{\beta P}{1+\gamma kS} - d_2 - \alpha \right).\end{aligned}$$

则当 $t \in [0, t_*]$, 有

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{\beta P}{1+\gamma kS} - d_2 - \alpha \right) dt \right\} > 0.$$

这与 $S(t_*) = 0$ 矛盾。根据系统(2.1)的第一个方程, 得

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{P=0} = \mu + (1-h)\alpha S.$$

上面已证明了对任意的 $t \in [0, T)$, 有 $S(t) \geq 0$, 则

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{P=0} > 0.$$

又由于 $P(0) = P_0 \geq 0$, 则对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $P(t) \geq 0$ 。证毕。

命题 2.5 系统(2.4)满足初始条件 $P(0) = P_0 \geq 0$, $S(0) = S_0 \geq 0$ 的解 $(P(t), S(t))$ 的最大存在区间为 $[0, +\infty)$, 且在 $[0, +\infty)$ 上有界。

证明 令 $(P(t), S(t))$ 为系统(2.4)满足初始条件 $P(0) = P_0 \geq 0$, $S(0) = S_0 \geq 0$ 的解, 存在区间为 $[0, T)$, 其中 $T \in [0, +\infty)$ 。由命题(2.4)可知, 对任意的 $t \in [0, T)$ 都有 $P(t) \geq 0$, $S(t) \geq 0$ 。由(2.4)得

$$\frac{d(P+S)}{dt} = \mu - d_1 P - d_2 S - \alpha h S,$$

令 $d = \max\{d_1, d_2\}$, 则

$$\frac{d(P+S)}{dt} \leq \mu - d(P+S).$$

因此

$$P+S \leq \frac{\mu}{d} + \left(P(0)+S(0) - \frac{\mu}{d} \right) e^{-dt}.$$

对上式取极限得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)+S(t)) \leq \frac{\mu}{d}$, 所以 $(P(t), S(t))$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界。证毕。

在区域 G_1 上的子系统为

$$\begin{cases} \dot{P} = \mu - \beta PS - d_1 P + (1-h)\alpha S, \\ \dot{S} = \beta PS - d_2 S - \alpha S. \end{cases} \quad (2.5)$$

在区域 G_2 上的子系统为

$$\begin{cases} \dot{P} = \mu - \frac{\beta PS}{1+kS} - d_1 P + (1-h)\alpha S, \\ \dot{S} = \frac{\beta PS}{1+kS} - d_2 S - \alpha S. \end{cases} \quad (2.6)$$

对于子系统(2.5), 基本再生数为 $R_1 = \frac{\beta\mu}{d_1(\alpha+d_2)}$, 存在无烟平衡点 $E_0^1 = \left(\frac{\mu}{d_1}, 0 \right)$, 且当 $R_1 > 1$ 时存在

地方病平衡点 $E_1 = (P_1, S_1) = \left(\frac{\alpha + d_2}{\beta}, \frac{\beta\mu - (\alpha + d_2)d_1}{\beta(\alpha h + d_2)} \right)$, 而 E_0^1 为稳定的结点, E_1 为稳定的焦点或结点。

对于子系统(2.6), 基本再生数为 $R_2 = \frac{\beta\mu}{d_1(\alpha + d_2)}$, 存在无烟平衡点 $E_0^2 = \left(\frac{\mu}{d_1}, 0 \right)$, 且当 $R_1 > 1$ 时存在地方病平衡点 $E_2 = (P_2, S_2) = \left(\frac{(\alpha + d_2)(1 + kS)}{\beta}, \frac{\beta\mu - (\alpha + d_2)d_1}{d_2\beta + \alpha\beta h + (\alpha + d_2)d_1 k} \right)$, 而 E_0^2 为稳定的结点, E_2 为稳定的焦点或结点。

对于系统(2.2), E_0^1 是实平衡点, E_0^2 是虚平衡点; 当 $0 < S_1 < S_c$ 时, E_1 是实平衡点, 当 $S_1 > S_c$ 时, E_1 是虚平衡点, 当 $S_1 = S_c$ 时, E_1 是边界平衡点; 当 $S_2 > S_c$ 时, E_2 是实平衡点, 当 $0 < S_2 < S_c$ 时, E_2 是虚平衡点, 当 $S_2 = S_c$ 时, E_2 是边界平衡点。

以下给出基本再生数 R_1 的计算过程: 子系统(2.5)的 Jacobian 矩阵为

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\beta S - d_1 & -\beta P + \alpha(1-h) \\ \beta S & \beta P - \alpha - d_2 \end{pmatrix}$$

那么

$$J_1 = \begin{pmatrix} -d_1 & -\beta\mu d_1 + \alpha(1-h) \\ 0 & \frac{\beta\mu}{d_1} - \alpha - d_2 \end{pmatrix}$$

于是 $\frac{\beta\mu}{d_1} - \alpha - d_2 < 0$, 即 $\frac{\beta\mu}{d_1(\alpha + d_2)} < 1$ 。

从而基本再生数 $R_1 = \frac{\beta\mu}{d_1(\alpha + d_2)}$, 同理可得基本再生数 R_2 。

引理 2.6 关于子系统(2.5)和(2.6), 下面的结论成立:

- (1) 对于子系统(2.5), 当 $R_1 < 1$ 时, E_0^1 全局渐近稳定, 而当 $R_1 > 1$ 时, E_1 全局渐近稳定;
- (2) 对于子系统(2.6), 当 $R_2 < 1$ 时, E_0^2 全局渐近稳定, 而当 $R_2 > 1$ 时, E_2 全局渐近稳定。

证明 设 Dulac 函数 $B(P, S) = \frac{1}{PS}$, 则发散量

$$\operatorname{div}(BF_{11}, BF_{12}) = \frac{\partial(BF_{11})}{\partial P} + \frac{\partial(BF_{12})}{\partial S} = -\frac{\mu}{P^2 S} - \frac{\alpha(1-h)}{P^2} < 0.$$

由解的正性可得, $\operatorname{div}(BF_{11}, BF_{12})$ 在 G_1 中定号。再根据 Bendixson-Dulac 法则知, 子系统(2.5)不存在全部位于 G_1 内的极限环, 也不会存在全部位于 G_1 内含有有限个点的奇异闭轨线。又因为 E_0^1 为稳定的结点, E_1 为稳定的焦点或结点, 从而结论(1)成立。同理可得, 子系统(2.6)不存在全部位于 G_2 内的极限环。再根据 E_2 为稳定的焦点或结点, E_0^2 为稳定的结点可得, E_0^2 和 E_2 均为全局渐近稳定。结论(2)成立。证毕。

引理 2.7 如果系统(2.4)的正半轨 T^+ 是有界的, 那么它的极限集 $\Omega(T)$ 要么包含一个平衡点, 要么包含一个闭轨。

3. 滑模的存在性及其动力学

本节将讨论滑模的存在性, 及其动力学行为。

$$\langle \nabla H_z, F_1(Z) \rangle = \beta S \left(P - \frac{\alpha + d_2}{\beta} \right) = \beta S (P - P_1),$$

$$\langle \nabla H_z, F_2(Z) \rangle = \frac{\beta S}{1+kS} \left(P - \frac{(\alpha+d_2)(1+kS)}{\beta} \right) = \frac{\beta S}{1+kS} (P - P_2),$$

则系统(2.4)存在两个切点 $T_1 = (P_1^l, S_c) = \left(\frac{\alpha+d_2}{\beta}, S_c \right)$, $T_2 = (P_2^r, S_c) = \left(\frac{(\alpha+d_2)(1+kS_c)}{\beta}, S_c \right)$, 从而系统(2.4)的切换线 Σ 可分为穿越域 $\Sigma_c = \Sigma_{c1} \cup \Sigma_{c2}$ 和滑模域 Σ_s 两个部分, 其中

$$\Sigma_{c1} = \{(P, S) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < P < P_1^l\}, \quad \Sigma_{c2} = \{(P, S) \in \mathbb{R}_+^2 : P > P_2^r\},$$

和

$$\Sigma_s = \{(P, S) \in \mathbb{R}_+^2 : P_1^l < P < P_2^r\}.$$

根据 Filippov 凸方法可得系统(2.4)在滑模区域 Σ_s 上的滑模动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \mu - d_1 P - d_2 S_c - \alpha h S_c \triangleq f(P), \\ \frac{dS}{dt} = 0. \end{cases}$$

若存在 $P^* \in (P_1^l, P_2^r)$ 使得 $f(P^*) = 0$, 则称 (P^*, S_c) 为系统(2.2)的伪平衡点。而 $f(P)$ 存在正根

$$P^* = \frac{\mu - (d_2 + \alpha h) S_c}{d_1}, \quad (3.1)$$

因此系统(2.2)可能的伪平衡点仅为 (P^*, S_c) 。

命题 3.1 设 P^* 由(3.1)所定义, 则系统(2.2)

- (1) 当 $S_2 < S_c < S_1$ 时, 存在唯一的伪平衡点 $E_p = (P^*, S_c)$, 且从 Σ_s 出发的解沿 Σ_s 收敛到 E_p ;
- (2) 当 $S_c > S_1$ 时, 不存在伪平衡点, 且从 Σ_s 出发的解沿 Σ_s 在有限时间内到达 T_1 ;
- (3) 当 $S_2 > S_c$ 时, 不存在伪平衡点, 且从 Σ_s 出发的解沿 Σ_s 在有限时间内到达 T_2 。

证明 经计算可得

$$f(P_1^l) = (\alpha h + d_2)(S_1 - S_c), \quad f(P_2^r) = \frac{(\alpha + d_2)d_1 k + (\alpha h + d_2)\beta}{\beta} (S_2 - S_c) \quad (3.2)$$

则当 $S_2 < S_c < S_1$ 时, 有 $f(P_1^l)f(P_2^r) < 0$, 从而方程 $f(P) = 0$ 有唯一的正根 P^* , 从而当 $P_1^l < P^* < P_2^r$, 即系统(2.2)存在唯一的伪平衡 $E_p = (P^*, S_c)$ 。又由(3.2)式可以推出, 当 $P \in (P_1^l, P^*)$ 时, 有 $f(P_1^l) > 0$, 而当 $P \in (P^*, P_2^r)$ 时, $f(P) < 0$, 因此结论(1)成立。

当 $S_c > S_1$ 时, 由 $S_1 > S_2$ 可得 $S_c > S_2$, 因此 $f(P_1^l) < 0$, $f(P_2^r) < 0$ 。所以, 当 $P \in (P_1^l, P_2^r)$ 时, 有 $f(P) < 0$, 因此结论(2)成立。

当 $S_2 > S_c$ 时, 由 $S_1 > S_2$ 可得 $S_1 > S_c$, 因此 $f(P_1^l) > 0$, $f(P_2^r) > 0$ 。所以, 当 $P \in (P_1^l, P_2^r)$ 时, 有 $f(P) > 0$, 因此结论(3)成立。证毕。

4. 全局动力学

引理 4.1 系统(2.2)不存在环绕滑模域 Σ_s 的穿越极限环。

证明 假设存在一条环绕滑模域 Σ_s 的闭轨 Γ 。记 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 其中 $\Gamma_1 = \Gamma \cap G_1$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap G_2$ 。用 D 表示由 Γ 围成的有界区域, 且 $\bar{D}_1 = D \cap G_1$, $\bar{D}_2 = D \cap G_2$ 。令 Γ 与 $S = S_c - \sigma$ 相交于 A_1, B_1 , Γ 与 $S = S_c + \sigma$ 相交于 A_2, B_2 , 记点 A, B, A_1, B_1, A_2, B_2 的横坐标分别为 $a, b, a - \sigma, b - \sigma, a + \sigma, b + \sigma$, 并且满足

$\lim_{\sigma \rightarrow 0}(a \pm \sigma) = a$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0}(b \pm \sigma) = b$ 。令 ∂D_1 表示 Γ_1 和 A_1B_1 所围成的区域 D_1 的边界, ∂D_2 表示 Γ_2 和 A_2B_2 所围成的区域 D_2 的边界, 如图 1 所示, 且满足 $D_i \rightarrow \bar{D}_i (\sigma \rightarrow 0, i=1, 2)$ 。

令 $F_1 = (F_{11}, F_{12})$, $F_2 = (F_{21}, F_{22})$ 。取 Dulac 函数为 $B = \frac{1}{PS}$, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial(BF_1)}{\partial P} + \frac{\partial(BF_2)}{\partial S} \right) dP dS = \sum_{i=1}^2 \iint_{D_i} \left(\frac{\partial(BF_{i1})}{\partial P} + \frac{\partial(BF_{i2})}{\partial S} \right) dP dS < 0. \quad (4.1)$$

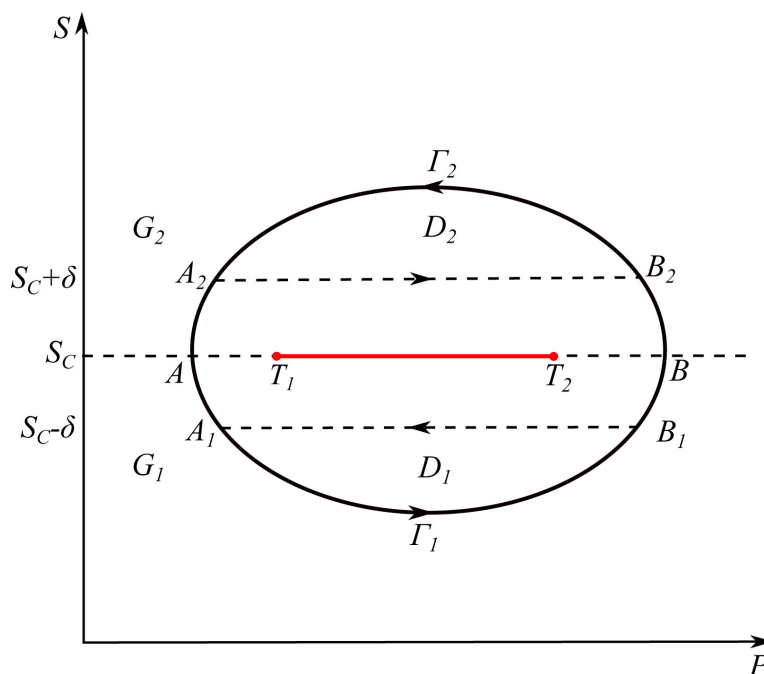


Figure 1. There exists a schematic diagram of a limit cycle containing Σ_s

图 1. 存在一个包含 Σ_s 的极限环示意图

在 D_1 中应用格林公式有

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left(\frac{\partial(BF_{11})}{\partial P} + \frac{\partial(BF_{12})}{\partial S} \right) dP dS &= \oint_{\partial D_1} BF_{11} dS - \oint_{\partial D_1} BF_{12} dP \\ &= \int_{\Gamma_1} BF_{11} dS - BF_{12} dP + \int_{B_1A_1} BF_{11} dS - \int_{B_1A_1} BF_{12} dP \\ &= \int_{\Gamma_1} (BF_{11}F_{12} - BF_{12}F_{11}) dt - \int_{B_1A_1} BF_{12} dP \\ &= - \int_{B_1A_1} BF_{12} dP. \end{aligned}$$

其中 $\frac{dP}{dt} = F_{11}$, $\frac{dS}{dt} = F_{12}$, $\int_{B_1A_1} BF_{11} dS = 0$ 。

类似地, 在 D_2 中应用格林公式有

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial(BF_{21})}{\partial P} + \frac{\partial(BF_{22})}{\partial S} \right) dP dS = - \int_{A_2B_2} BF_{22} dP.$$

由于 $\lim_{\sigma \rightarrow 0}(a \pm \sigma) = a$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0}(b \pm \sigma) = b$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} D_i = \bar{D}_i (i=1, 2)$, 因此

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \iint_{\bar{D}_i} \left(\frac{\partial(BF_{i1})}{\partial P} + \frac{\partial(BF_{i2})}{\partial S} \right) dP dS &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(-\int_{B_1 A_1} BF_{12} dP - \int_{A_2 B_2} BF_{22} dP \right) \\
&= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\int_{a-\sigma}^{b-\sigma} \left(\beta - \frac{\alpha+d_2}{\beta} \right) dP - \int_{a+\sigma}^{b+\sigma} \left(\frac{\beta}{1+kS} - \frac{\alpha+d_2}{P} \right) dP \right] \\
&= \int_a^b \left(\beta - \frac{\alpha+d_2}{\beta} \right) dP - \int_a^b \left(\frac{\beta}{1+kS} - \frac{\alpha+d_2}{P} \right) dP \\
&= \left(\beta - \frac{\beta}{1+kS} \right) \Big|_a^b \\
&= \frac{\beta k S}{1+kS} (b-a) > 0.
\end{aligned}$$

这与(4.1)式矛盾, 即系统(2.4)不存在围绕滑模域 Σ_s 的穿越极限环。证毕。

引理 4.2 系统(2.4)不存在包含部分滑模域 Σ_s 的滑模极限环。

证明 我们使用反证法证明。假设存在一条包含部分滑模域 Σ_s 的滑模极限环, 如图 2 所示, 则当 $S_c < S_2$ 时, E_1 为实平衡点, E_2 为虚平衡点。根据命题 3.1 可知, 伪平衡点不存在且从 Σ_s 出发的解沿 Σ_s 在有限时间内到达 T_1 , 那么从 T_1 出发的解在有限时间内到达滑模段, 从而形成滑模极限环。这与 E_1 的全局渐近稳定性矛盾, 即不存在包含部分滑模域 Σ_s 的滑模极限环。当 $S_c > S_1$ 时, 同理可得系统(2.4)不存在滑模极限环。

当 $S_2 < S_c < S_1$ 时, E_1 、 E_2 均为虚平衡点。根据命题 3.1 可知, 伪平衡点 E_p 存在且局部渐近稳定的。而根据假设存在包含部分滑模段 Σ_s 的极限环, 即轨线一旦到达滑模段就会收敛到极限环, 这与伪平衡点的局部渐近稳定性矛盾, 从而系统(2.4)不存在滑模极限环。证毕。

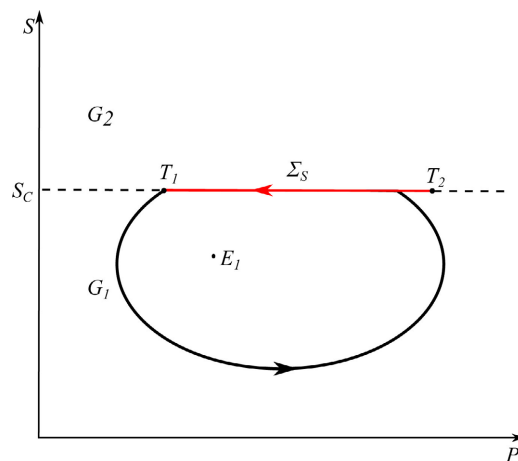


Figure 2. There exists a schematic diagram of a limit cycle that partially coincides with Σ_s

图 2. 存在一个与部分 Σ_s 重合的极限环示意图

下面分 $R_1 < 1$ 和 $R_1 > 1$ 两种情形分析系统(2.4)的全局动力学行为。

引理 4.3 如果 $R_1 < 1$, 那么无烟平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明 当 $R_1 < 1$ 时, $S_2 < S_1 < 0$ 。因此, 从命题(3.1)可以推出, 伪平衡点不存在且从滑模域 Σ_s 出发的轨线都沿滑模区域在有限时间内到达切点 T_1 , 这意味着 E_0 是系统(2.4)唯一的平衡点。又根据引理 4.1 和引理 4.2 可知系统(2.4)不存在滑模闭轨和穿越极限环, 则根据引理 2.7 可得, 无烟平衡点 E_0 是全局渐近

稳定的, 如图 3 所示。证毕。

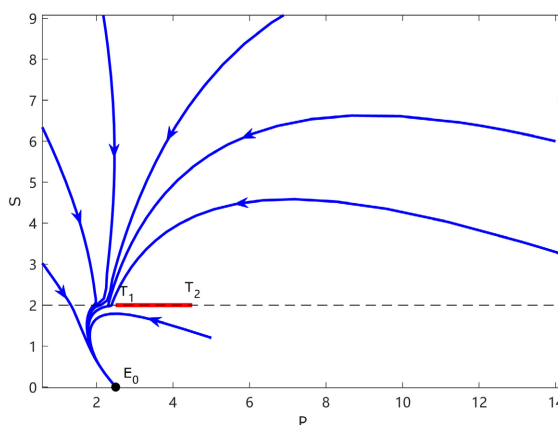


Figure 3. System (2.2) has a global asymptotically stable equilibrium E_0 . $\mu=2$, $\beta=0.4$, $k=0.4$, $h=0.15$, $\alpha=0.35$, $d_1=0.8$, $d_2=0.65$, $S_c=2$

图 3. 系统(2.2)存在全局渐近稳定的平衡点 E_0 。 $\mu=2$, $\beta=0.4$, $k=0.4$, $h=0.15$, $\alpha=0.35$, $d_1=0.8$, $d_2=0.65$, $S_c=2$

定理 4.4 如果 $R_1 > 1$, 那么下面的结论成立:

- (1) 如果 $S_1 < S_c$, 则吸烟平衡点 E_1 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内是全局渐近稳定的;
- (2) 如果 $S_c < S_2$, 则吸烟平衡点 E_2 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内是全局渐近稳定的;
- (3) 如果 $S_2 < S_c < S_1$, 则伪平衡点 E_p 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内是全局渐近稳定的。

证明 当 $S_2 < S_1 < S_c$ 时, E_2 为虚平衡点, E_1 为实平衡点。从命题 3.1 可以推出, 伪平衡点 E_p 不存在且从滑模域 Σ_s 出发的轨线都沿滑模区域在有限时间内到达切点 T_1 。根据引理 2.6 可得, E_1 为子系统(2.5)的全局渐近稳定平衡点, 再由引理 4.1 和引理 4.2 可知, 系统(2.4)不存在滑模极限环, 也不存在穿越极限环。因此, 由引理 2.7 可得, E_1 是全局渐近稳定的, 如图 4 所示。

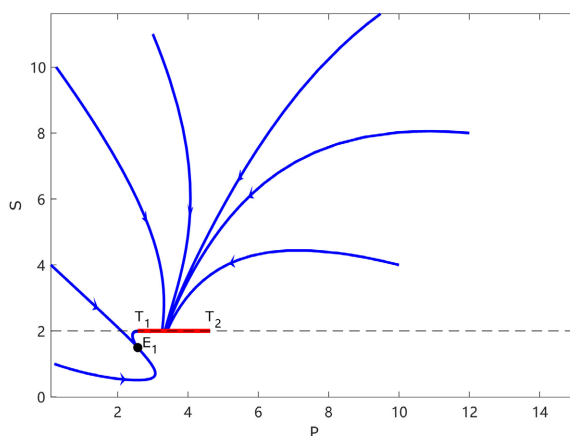


Figure 4. System (2.2) has a global asymptotically stable equilibrium E_1 . $\mu=2$, $\beta=0.35$, $k=0.4$, $h=0.35$, $\alpha=0.65$, $d_1=0.5$, $d_2=0.25$, $S_c=2$

图 4. 系统(2.2)存在全局渐近稳定的平衡点 E_1 。 $\mu=2$, $\beta=0.35$, $k=0.4$, $h=0.35$, $\alpha=0.65$, $d_1=0.5$, $d_2=0.25$, $S_c=2$

当 $S_c < S_2 < S_1$ 时, E_1 为虚平衡点, E_2 为实平衡点。从命题 3.1 可以推出, 伪平衡点 E_p 不存在且从滑模域 Σ_s 出发的轨线都沿滑模区域在有限时间内到达切点 T_2 。根据引理 2.6 可得, E_2 为子系统(2.6)的全局渐近稳定平衡点。再根据引理 4.1 和引理 4.2 可知, 系统(2.4)不存在滑模极限环, 也不存在穿越极限环。因此, 由引理 2.7 可得, E_2 是全局渐近稳定的, 如图 5 所示。

当 $S_2 < S_c < S_1$ 时, E_1 和 E_2 均为虚平衡点。从命题 3.1 可以推出, 伪平衡点 E_p 存在且为稳定的。根据引理 4.1 和引理 4.2 可知, 系统(2.4)不存在滑模极限环, 也不存在穿越极限环。因此, 由引理 4.1 可得, E_p 是全局渐近稳定的, 如图 6 所示。证毕。

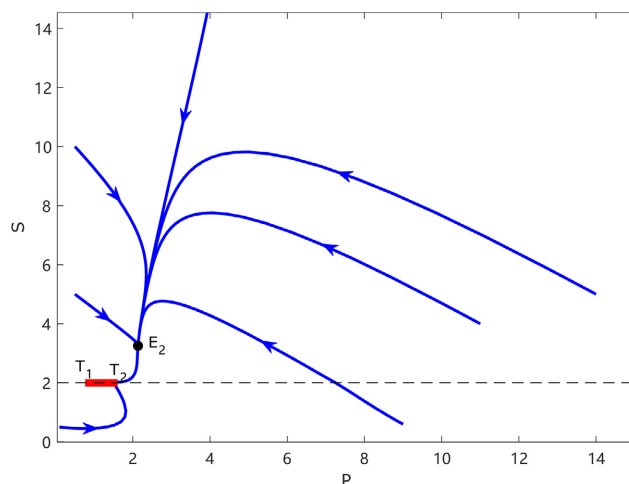


Figure 5. System (2.2) has a global asymptotically stable equilibrium E_2 . $\mu=2$, $\beta=0.85$, $k=0.55$, $h=0.15$, $\alpha=0.35$, $d_1=0.4$, $d_2=0.3$, $S_c=2$

图 5. 系统(2.2)存在全局渐近稳定的平衡点 E_2 。 $\mu=2$, $\beta=0.85$, $k=0.55$, $h=0.15$, $\alpha=0.35$, $d_1=0.4$, $d_2=0.3$, $S_c=2$

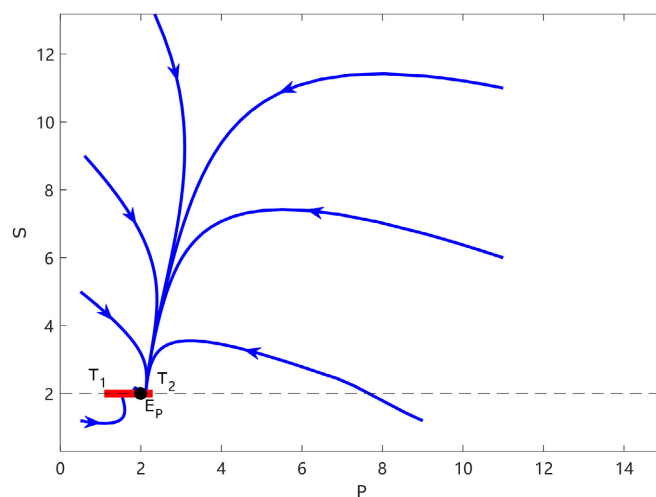


Figure 6. System (2.2) has a global asymptotically stable equilibrium E_p . $\mu=2$, $\beta=0.55$, $k=0.55$, $h=0.15$, $\alpha=0.35$, $d_1=0.7$, $d_2=0.25$, $S_c=2$

图 6. 系统(2.2)存在全局渐近稳定的平衡点 E_p 。 $\mu=2$, $\beta=0.55$, $k=0.55$, $h=0.15$, $\alpha=0.35$, $d_1=0.7$, $d_2=0.25$, $S_c=2$

5. 生物意义

本文旨在研究吸烟传播过程中, 政府所采取的干预措施以及吸烟者戒烟不彻底的现象对吸烟传播模型的影响机制, 利用 Filippov 的定性分析, 研究了具有饱和发生率的戒烟模型及全局动力学, 然后使用数值模拟验证了理论分析的结果, 并指出干预措施对抑制吸烟的传播具有一定的作用。

当基本再生数 $R_1 < 1$ 时, 定理 4.3 表明 E_0 全局渐近稳定, 这表明吸烟这种现象最终会消亡, 从而实现控制目标。当基本再生数 $R_1 > 1$ 且 $S_c > S_1$ 时, 定理 4.4 表明 E_1 是全局渐近稳定, 即政府在采取干预措施的情形下, 吸烟人数最终可以控制在不超过阈值 S_c 下, 从而实现控制目标; 当 $S_c < S_2$ 时, 定理 4.4 表明 E_2 全局渐近稳定, 尽管政府采取了一定的干预措施, 吸烟人数最终仍超过控制阈值并稳定在一定的数量下, 同时有效遏制了吸烟人数的急剧上升; 但当 $S_2 < S_c < S_1$ 时, E_p 全局渐近稳定, 这表明在单一的阈值控制策略下, 政府采取一定干预措施, 吸烟人数最终稳定在控制阈值 S_c , 不会达到吸烟人数为零或下降的趋势, 但可以避免吸烟这种现象爆发。综上, 政府可以在合适的控制阈值采取相应的干预措施, 从而使吸烟人数可以稳定在控制阈值或低于控制阈值, 从而实现控制目标。

采取如上的阈值控制策略, 政府的成本可控, 并且机制简单, 不需要长期不间断高强度控烟, 仅在监测到经常吸烟者数量超过 S_c 时, 集中出台政策; 当经常吸烟者的数量回落就降低管控力度, 适合地方政府分阶段实施。这种控制所带来的局限有, 不能持续降低吸烟人群, 控烟政策落地、生效需要时间, 时滞可能引发吸烟者数量吸烟人数反复暴涨回落; 控制阈值 S_c 是人为选取的, 若阈值设太低: 政策频繁启动、持续高压管控, 社会阻力、经济成本大幅上升; 若阈值设太高: 控烟形同虚设, 大量吸烟者长期存在。该模型只考虑了双线性发生率以及戒烟决心对模型的影响, 并没有考虑具体的具有非线性的治疗措施、隔离措施等多方面措施对吸烟传播的影响, 因此该模型还有待进一步完善。

参考文献

- [1] 赵保路. 吸烟, 自由基与健康[J]. 生物物理学报, 2012, 28(4): 332-340.
- [2] Elders, M.J., Perry, C.L., Eriksen, M.P. and Giovino, G.A. (1994) The Report of the Surgeon General: Preventing Tobacco Use among Young People. *American Journal of Public Health*, **84**, 543-547. <https://doi.org/10.2105/ajph.84.4.543>
- [3] Khan, Z.A., Rahman, M.U. and Shah, K. (2021) Study of a Fractal-Fractional Smoking Models with Relapse and Harmonic Mean Type Incidence Rate. *Journal of Function Spaces*, **2021**, 1-11. <https://doi.org/10.1155/2021/6344079>
- [4] Alzahrani, E. and Zeb, A. (2020) Stability Analysis and Prevention Strategies of Tobacco Smoking Model. *Boundary Value Problems*, **2020**, Article No. 3. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-01315-1>
- [5] van Voorn, G.A.K. and Kooi, B.W. (2013) Smoking Epidemic Eradication in a Eco-Epidemiological Dynamical Model. *Ecological Complexity*, **14**, 180-189. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2013.01.008>
- [6] Acevedo-Estephania, C.A., Gonzalez, C., Riosoto, K.R., et al. (2000) A Mathematical Model for Lung Cancer: The Effects of Second-Hand Smoke and Education. Biometrics Unit Technical Reports No. BU-1525-M, Department of Biometrics, Cornell University. https://www.researchgate.net/publication/221711448_A_Mathematical_Model_for_Lung_Cancer_The_Effects_of_Second-Hand_Smoke_and_Education
- [7] Bhunu, C.P. and Mushayabasa, S. (2012) A Theoretical Analysis of Smoking and Alcoholism. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, **11**, 387-408. <https://doi.org/10.1007/s10852-012-9195-3>
- [8] Guerrero, F., Santonja, F.J. and Villanueva, R.J. (2013) Solving a Model for the Evolution of Smoking Habit in Spain with Homotopy Analysis Method. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **14**, 549-558. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.07.015>
- [9] Rowe, D.C., Chassin, L., Presson, C.C., Edwards, D. and Sherman, S.J. (1992) An "Epidemic" Model of Adolescent Cigarette Smoking. *Journal of Applied Social Psychology*, **22**, 261-285. <https://doi.org/10.1111/j.1559-1816.1992.tb01539.x>
- [10] Castillo-Garsow, C., Jordán-Salivia, G. and Rodríguez-Herrera, A. (1997) Mathematical Models for the Dynamics of Tobacco Use, Recovery, and Relapse. Technical Reports No. BU-1505-M, Cornell University. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:89440950>
- [11] Sharomi, O. and Gumel, A.B. (2008) Curtailing Smoking Dynamics: A Mathematical Modeling Approach. *Applied*

- Mathematics and Computation*, **195**, 475-499. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.05.012>
- [12] Zeb, A., Zaman, G. and Momani, S. (2013) Square-Root Dynamics of a Giving up Smoking Model. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 5326-5334. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.005>
- [13] Pang, L., Zhao, Z., Liu, S. and Zhang, X. (2015) A Mathematical Model Approach for Tobacco Control in China. *Applied Mathematics and Computation*, **259**, 497-509. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.078>
- [14] 王霞, 李保林, 葛情. 一类具有非线性接触率的戒烟模型[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2019, 32(3): 362-366.
- [15] Sharma, A. and Misra, A.K. (2015) Backward Bifurcation in a Smoking Cessation Model with Media Campaigns. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 1087-1098. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.022>
- [16] Yadav, A., Srivastava, P.K. and Kumar, A. (2015) Mathematical Model for Smoking: Effect of Determination and Education. *International Journal of Biomathematics*, **8**, Article 1550001. <https://doi.org/10.1142/s1793524515500011>
- [17] Maurya, J., Kumari, M. and Misra, A.K. (2025) Modeling the Effect of Fear-Inducing Awareness Programs on Smoking Cessation. *Journal of Computational Science*, **87**, Article 102584. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2025.102584>
- [18] Syata, I., Toaha, S. and Firman, F. (2025) Stability Analysis and Optimal Control as Strategies Reducing Smokers in Model of Addicted Smoking with Incident Rate Holling Type Function. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, **29**, 313-331.
- [19] 马慧丽, 黄立宏, 王佳伏. 有干预措施的 Filippov 戒烟模型的全局动力学[J]. 经济数学, 2020, 37(3): 208-213.
- [20] Filippov, A.F. (1988) *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Kluwer Academic Publishers.