

二元函数的二重极限和累次极限关系的探讨

王晓静*, 唐雨灿, 张 艳, 刘茂省

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2026年8月4日; 录用日期: 2026年8月27日; 发布日期: 2026年9月7日

摘 要

二元函数的累次极限与二重极限的关系是多元函数微积分学中的一个重点和难点。本文通过五个具体实例, 系统归纳出二者之间存在的七种相互关系, 进而分析其对后续相关概念的引申影响, 为深入理解二元函数的全微分与偏导数、二重积分与累次积分之间的逻辑关系奠定基础。

关键词

二重极限, 累次极限, 二元函数, 全微分, 二重积分

Study on the Relationship between the Double Limit and the Repeated Limit of a Binary Function

Xiaojing Wang*, Yucan Tang, Yan Zhang, Maoxing Liu

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: August 4, 2026; accepted: August 27, 2026; published: September 7, 2026

Abstract

The relationship between the repeated limit and the double limit of a binary function is a key and challenging topic in the calculus of multivariable functions. In this paper, through five concrete examples, we systematically summarize seven possible interrelations between the two types of limits, and further analyze their extended implications for subsequent concepts, thereby laying a foundation for a deeper understanding of the logical relationship between the total differential and partial derivatives of a binary function, as well as the interrelationship between double integrals and

*通讯作者。

文章引用: 王晓静, 唐雨灿, 张艳, 刘茂省. 二元函数的二重极限和累次极限关系的探讨[J]. 应用数学进展, 2026, 15(9): 27-32. DOI: 10.12677/aam.2026.159371

iterated integrals.

Keywords

Double Limit, Repeated Limit, Binary Function, Total Differential, Double Integral

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

极限是研究函数性态的基本工具, 高等数学课程中绝大多数概念均以其为基础。在多元微积分部分, 二元函数的二重极限与累次极限之间的关系较为复杂, 二者既相互区别又紧密联系。文献[1]给出了重极限存在的若干充要条件; 文献[2]引入弱累次极限的概念, 并证明了弱累次极限存在可推出重极限存在; 文献[3]借助 Matlab 软件对重极限进行了数值探讨; 文献[4]则系统讨论了方向极限、重极限与累次极限三者之间的相互关系。上述研究从不同层面推进了我们对两类极限概念的深入理解, 也为本文的进一步探讨二重极限与累次极限之间的关系及其对后续概念的影响奠定了理论基础。

2. 基本概念

2.1. 二重极限的定义[5]

设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 为 D 的一个聚点, A 是一个实数, 如果对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P(x, y) \in D$, 当 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ 或 } f(x, y) \rightarrow A((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \text{ 或 } f(P) \rightarrow A(P \rightarrow P_0).$$

类似地, 可以在 D 上定义多元函数的重极限。

注: (1) 其中 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的方式是任意的;

(2) 定义中采用的是开圆盘邻域

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

也可以采用开菱形邻域 $0 < |x-x_0| + |y-y_0| < \delta$ 和开矩形邻域

$$0 < |x-x_0| < \delta \text{ 且 } 0 < |y-y_0| < \delta.$$

判断二重极限不存在的常用方法: 沿某个方向的极限不存在、沿不同路径的极限存在但不相等、极坐标变换后的极限值与极角有关。当二重极限存在时, 根据实际问题灵活运用定义法、夹逼定理、四则运算法则、常用极限、初等变形、变量替换、极坐标变换、初等函数的连续性等方法进行求解。

2.2. 累次极限的定义[5]

设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$ 是定义在 D 上的二元函数, D 在 x 轴和 y 轴上的投影区域分别为 X, Y , 即 $X = \{x | (x, y) \in D\}$, $Y = \{y | (x, y) \in D\}$, x_0, y_0 分别是 X, Y 的聚点, 如果对每一个 $y \in Y$ ($y \neq y_0$), 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 并且极限 $L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 则称此极限为二元函数 $f(x, y)$ 先对 x ($\rightarrow x_0$) 后对 y ($\rightarrow y_0$) 的累次积分, 记作

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = L.$$

类似地, 可以定义先对 y 后对 x 的累次积分

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = K.$$

注: (1) 累次极限包含两个一元函数的极限过程, 两个过程均存在极限累次极限才存在;

(2) 两个累次极限不一定相等;

(3) 其中 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的方式不是任意的。

整合文献[4]-[7]的多维视角, 并辅以具体实例加以说明, 本文梳理出二重极限与累次极限相互关系的七种情形(含两个推论), 以期在教学与应用中形成清晰、可操作的判别依据。

3. 二重极限和累次极限的关系

3.1. 单个或两个累次极限存在不能推出二重极限存在

例 1 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

证明 显然

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y),$$

但 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$, 因此二重极限不存在。

例 1 的结论说明两个累次极限存在且相等时, 二重极限也可能不存在。

3.2. 二重极限存在不能推出任一累次极限存在

例 2 $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

证明 对任意的 $x \neq 0$, 极限

$$\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

不存在, 因此累次极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

不存在。

同理可证 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 不存在。

由于 $0 \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x+y|$, 由夹逼定理可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x+y| = 0$, 即二重极限为 0。

3.3. 一个累次极限存在不能推出另一个累次极限存在, 但二重极限可能存在

例 3 $f(x, y) = y^2 \cos \frac{1}{x}$

证明 对任意的 $x \neq 0$, 极限 $\lim_{y \rightarrow 0} y^2 \cos \frac{1}{x} = 0$, 因此极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y^2 \cos \frac{1}{x} = 0$ 。

对任意的 $y \neq 0$, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} y^2 \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 因此极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y^2 \cos \frac{1}{x}$ 不存在。

由于 $0 \leq \left| y^2 \cos \frac{1}{x} \right| \leq y^2$, 根据夹逼定理可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y^2 \cos \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y^2 = 0$ 。

3.4. 若二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在且等于 A , 且当 y 在 y_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(y_0; \delta_0)$ 时有

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \phi(y)$, 则 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A$

证明 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当

$$|x - x_0| < \delta_1, \quad |y - y_0| < \delta_1, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ 时, 有} \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon. \quad (1)$$

因为对任意的 $y: |y - y_0| < \delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \phi(y)$, 所以在(1)式中令 $x \rightarrow x_0$ 得 $|\phi(y) - A| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = A.$$

推论(1) [6] 若二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个累次极限和二重极限均存在, 则三者必然相等, 即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

推论(2) [6] 若二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个累次极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在但不相等, 则二重极限不存在。

例 4 $f(x, y) = |y|^{|x|}$

证明 显然对任意的 $x \neq 0$, 极限 $\lim_{y \rightarrow 0} |y|^{|x|} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{|x| \ln |y|} = 0$, 因此极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} |y|^{|x|} = 0.$$

对任意的 $y \neq 0$, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} |y|^{|x|} = |y|^0 = 1$, 因此极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} |y|^{|x|} = 1$, 两个累次极限均存在但不相等, 由推论(2)可知二重极限不存在。

由例 1 可知即使二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个累次极限均存在且相等, 二重极限也可能不存在。

3.5. 二重极限和两个累次极限可能都不存在

例 5 $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{\sin xy}$

证明 对任意的 $x \neq 0$, 极限

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^x - e^y}{\sin xy} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y \frac{e^{x-y} - 1}{x-y} \frac{x-y}{xy} \frac{xy}{\sin xy} = \infty,$$

因此累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^x - e^y}{\sin xy}$ 不存在。

同理可得, 对任意的 $y \neq 0$, 累次极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^y}{\sin xy}$ 不存在。

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{x-y}{xy} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=2x}} \frac{x-y}{xy} = \infty$, 所以二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^x - e^y}{\sin xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^y \frac{e^{x-y} - 1}{x-y} \frac{x-y}{xy} \frac{xy}{\sin xy}$$

不存在。

4. 二重极限与累次极限的关系对后续概念的影响

前文通过实例揭示了二重极限与累次极限的本质区别: 前者要求动点沿任意路径趋于定点, 后者则限定为两条“折线”(先沿一轴再沿另一轴), 这与多元微积分中多个核心概念的逻辑结构紧密相关。

4.1. 偏导数存在与函数可微

偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 本质上分别是固定 y 后对 x 的差商极限, 以及先固定 x 后对 y 的差商极限, 是沿坐标轴方向的特殊极限, 也是累次极限思维的体现。而函数在一点可微则要求全增量 $\Delta z - f_x \Delta x - f_y \Delta y$ 除以距离 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 的极限为 0, 正是沿任意方向趋近的二重极限。因此, 偏导数存在完全不能保证可微, 这与例中两个累次极限存在但二重极限不存在的情形完全类似。事实上, 例 1 中的函数 $f(x, y)$ (补充定义 $f(0, 0) = 0$) 在原点处两个偏导数均为 0, 但沿不同方向 $y = kx$ 的差商极限不同, 二重极限不存在, 故不可微, 这正是“累次极限”与“二重极限”关系在微分概念中的再现。

4.2. 累次积分与二重积分

二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 是分割区域后取所有子域直径趋于 0 时的极限, 本质上是一个积分和(黎曼和)极限; 而规则矩形区域上的累次积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ 则是先固定 x 对 y 积分, 再对 x 积分, 对应于两次一维定积分逐次计算的过程。Fubini 定理说明如果二重积分存在(f 绝对可积), 则两个累次积分存在且相等, 并等于二重积分, 但逆命题不一定成立: 即使两个累次积分均存在且相等, 二重积分也可能不存在。例如, 考虑区域 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $g(x, y) = x^2 - y^2 / (x^2 + y^2)^2$, 其两个累次积分分别为

$$\int_0^1 dx \int_0^1 g(x, y) dy = \frac{\pi}{4}, \int_0^1 dy \int_0^1 g(x, y) dx = -\frac{\pi}{4},$$

二者存在但不相等, 该函数的二重积分(作为瑕积分)不存在。这充分说明在没有二重极限存在或一致收敛的条件下, 积分顺序不可随意交换, 而本文归纳的二重极限与累次极限的七种关系, 为理解这种“交换条件”提供了判别直觉。

5. 小结

本文给出了两类极限之间七种可能的复杂关系。我们常常会对情形 3.2 感到困惑,从本质上讲,二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 是沿“任意路径”向定点 (x_0, y_0) 趋近时该函数变化的终极状态,其中变元的两个分量

是独立变化;而累次极限则有先后顺序,若 x 先变,即先沿横轴趋于固定点的横坐标,再让 y 沿纵轴去变化。总之,相当于平面区域上动点沿一条特殊的折线变化,逐步趋于某固定点,是沿“特定路径”的极限,因而二重极限若存在“似乎”可以推出两个累次极限存在。基于上面分析可知若无附加条件,累次极限的存在性与二重极限的存在性无关,因为两个分量独立变化,与一个分量先变(此时另一个相对不动),若有极限,另一个再变(此时有无极限不得而知),这两件事逻辑上没有包含关系。通过例 3 和情形 3.4 的相关解释可以帮助我们理解并纠正这种错觉,细心领会其中的逻辑论证。

本文通过五个实例的对比分析,揭示了二重极限与累次极限之间抽象区别的具体表现形式,并据此归纳出二重极限存在的判别准则与计算方法。该关系的澄清,构成了多元函数连续性、可微性与方向导数理论推演的基石,同时也为理解全微分与偏导数的内在联系、二重积分与累次积分的转换关系提供了逻辑支撑。本文所采用的分类对比与归纳分析方法,对于深化多元微积分中相关概念的理论认知具有积极意义。

基金项目

2026 年北京建筑大学研究生课程建设项目(A2026017); 2025 年北京建筑大学教育科学研究项目(Y2522)。

参考文献

- [1] 曹慧珍. 重极限存在的充要条件之注记[J]. 大学数学, 2012, 28(1): 75-79.
- [2] 成荣, 董宝华, 黄学平. 累次极限与重极限的一个注记[J]. 大学数学, 2023, 39(4): 86-90.
- [3] 邓宇龙. 基于 Matlab 的数学分析极限概念教学实践[J]. 大学数学, 2014, 30(1): 117-120.
- [4] 田振明, 曾凡辉. 多元函数方向极限、重极限与累次极限的关系研究[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 45-48.
- [5] 华东师范大学数学系. 数学分析: 下册[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 89-101.
- [6] 薛玉梅, 苑佳, 孙玉泉, 文晓, 杨义川. 工科数学分析: 下册[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2020: 90-95.
- [7] 李傅山, 王培合. 工科数学分析习题课讲义 3 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2021: 10-21.