

一类光滑函数在概率约束优化问题中的应用

王海森, 任咏红

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年8月7日; 录用日期: 2026年9月1日; 发布日期: 2026年9月10日

摘 要

概率约束优化问题(PCOP)在新能源调度、金融风险管理和网络优化等领域有广泛应用,但其非凸非光滑的特性给数值求解带来困难。本文基于光滑近似思想,提出了特征函数的一类光滑近似函数,讨论了该类函数中的两个具体函数的性质,包括极限逼近、单调性、凸凹性、无穷阶可微性等。基于这两个函数,编制了序列凸近似(SCA)算法的程序,用于求解概率约束优化问题。实验结果表明:两个实例在计算效率上表现优异(迭代次数极少),但收敛稳定性依赖于光滑参数的选取。这一发现为光滑函数的构造提供了新的见解:在数值算法中,纯粹的高阶“光滑性”可能并非越高越好。

关键词

光滑近似, 概率约束优化, SCA算法, 参数敏感性

Application of a Class of Smooth Functions to Probabilistically Constrained Optimization Problems

Haisen Wang, Yonghong Ren

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: August 7, 2026; accepted: September 1, 2026; published: September 10, 2026

Abstract

Probabilistically constrained optimization problems (PCOP) have wide applications in areas such as renewable energy dispatch, financial risk management, and network optimization; however, their nonconvex and nonsmooth nature brings difficulties to numerical solution. Based on the idea of smooth approximation, this paper proposes a class of smooth approximation functions for the characteristic function, and discusses the properties of two specific functions in this class, including limit approximation behavior, monotonicity, convexity/concavity, and infinite differentiability.

文章引用: 王海森, 任咏红. 一类光滑函数在概率约束优化问题中的应用[J]. 应用数学进展, 2026, 15(9): 70-80.
DOI: 10.12677/aam.2026.159374

Using these two functions, a program implementing the sequential convex approximation (SCA) algorithm is developed to solve probabilistically constrained optimization problems. Experimental results show that two test instances perform excellently in computational efficiency (with very few iterations), yet the convergence stability depends on the selection of the smoothing parameter. This finding provides new insight into the construction of smoothing functions: in numerical algorithms, purely higher-order “smoothness” may not necessarily be better.

Keywords

Smooth Approximation, Probabilistically Constrained Optimization, SCA Algorithm, Parameter Sensitivity

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

许多有重要价值的实际问题, 如新能源电力系统调度问题[1]、移动网络中的路线定位处理问题[2]、车辆调度问题[3] [4]、水库系统设计问题[5]、现金匹配问题[6]等, 均可建模为概率约束优化问题(Probabilistically Constrained Optimization Problem, PCOP)。在这类问题中, 要求一组随机约束同时被满足的概率至少达到给定的置信水平 $1-\alpha$ (通常 $\alpha = 0.01, 0.005$ 或 0.1)。

求解 PCOP 的困难主要体现在以下方面: 概率约束函数的非凸性、缺乏显式表达式、以及不可微性。

针对上述困难, 学者们提出了多种近似求解方法。凸保守近似方法[7]-[10]通过构造凸函数 $\bar{p}(x) \geq p(x)$ 来近似概率约束, 代表性方法包括二次近似[7]、条件风险值(CVaR)近似[8]和 Bernstein 近似[9]。然而, 这类方法通常只能得到原问题的次优可行解, 且往往需要借助 Boole 不等式将联合概率约束分解为多个单约束, 导致近似过于保守。

为克服凸近似的不足, Hong 等人[11]提出了 D.C. (Difference of Convex functions)近似方法, 利用 D.C. 函数 $\pi(z, t) = \psi(z, t) - \phi(z, t)$ 来近似特征函数 $1_{(0, +\infty)}(z)$ 。该方法将概率约束函数近似为两个凸函数之差, 进而通过序列凸近似(Sequential Convex Approximation, SCA)算法求解。然而, 该 D.C.近似函数是非光滑的, 给理论分析和数值计算带来不便。

在此基础上, Shan 等人[12]提出了一类光滑函数来近似特征函数, 并构建了相应的光滑近似问题。此后, 基于 Sigmoid 函数[13]、CHKS 光滑和函数[14]的光滑 D.C.近似方法相继被提出。以及 Pinar-Zenios 光滑和函数[15]的光滑 D.C.近似方法相继被提出。

本文在上述研究基础上, 提出了一类新型光滑近似函数的一般形式, 并给出了两个满足该形式的典型特例, 并将两个特例嵌入 SCA 算法框架进行数值实验。与以往研究侧重于构造新函数不同, 本文重点将这两类函数嵌入 SCA 算法框架进行系统的数值分析, 揭示了“理论光滑性”与“数值稳定性”之间可能存在的权衡关系, 为光滑函数的设计提供了新的见解。

本文的结构安排如下: 第 2 节给出概率约束优化问题的相关阐述; 第 3 节定义一类新型光滑函数, 并给出两个具体特例, 证明其性质; 第 4 节报告数值实验结果; 第 5 节给出结论。

2. 概率约束优化问题

考虑如下形式的概率约束优化问题[11]:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} f(x) \\ & \text{s.t. } \Pr\{c_1(x, \xi) \leq 0, \dots, c_m(x, \xi) \leq 0\} \geq 1 - \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^d$ 是决策向量, $X \subset \mathbb{R}^d$ 是紧凸集; ξ 是支撑集为 $\Xi \subset \mathbb{R}^d$ 的随机向量; $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $c_i: \mathbb{R}^{d+k} \rightarrow \mathbb{R} (i=1, \dots, m)$ 是关于 x 的连续可微凸函数; $0 < \alpha < 1$ 为给定的风险水平。

记 $c(x, \xi) = \max\{c_1(x, \xi), \dots, c_m(x, \xi)\}$, 则 $c(x, \xi)$ 关于 x 是凸函数[11]。定义特征函数

$$1_{(0, +\infty)}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases},$$

则概率约束函数可表示为

$$p(x) = 1 - \Pr\{c(x, \xi) \leq 0\} = \Pr\{c(x, \xi) > 0\} = \mathbb{E}[1_{(0, +\infty)}(c(x, \xi))]$$

于是问题(1)可改写为

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} f(x) \\ & \text{s.t. } p(x) \leq \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Hong 等人[11]提出了求解问题(2)的 D.C.近似方法。令

$$\psi(z, t) = \frac{1}{t}[t + z]^+, \phi(z, t) = \frac{1}{t}[z]^+,$$

其中 $t > 0$, $a^+ = \max\{a, 0\}$ 。则 $\pi(z, t) = \psi(z, t) - \phi(z, t)$ 是特征函数 $1_{(0, +\infty)}(z)$ 的一个 D.C.保守近似[11]。基于此, 概率约束函数 $p(x)$ 可近似为

$$\tilde{p}(x, t) = \frac{1}{t}[\mathbb{E}[t + c(x, \xi)]^+ - \mathbb{E}]$$

令 $g_1(x, t) = \mathbb{E}[t + c(x, \xi)]^+$, $g_2(x, t) = \mathbb{E}[c(x, \xi)]^+$, 则 $\tilde{p}(x, t) = \frac{1}{t}[g_1(x, t) - g_2(x)]$ 。对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 问题(2)的 ε -近似问题为[11]:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} f(x) \\ & \text{s.t. } g_1(x, \varepsilon) - g_2(x) \leq \varepsilon \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $g_1(x, \varepsilon)$ 和 $g_2(x)$ 均为凸函数[11], 问题(3)是一个 D.C.形式。SCA 算法通过逐次求解凸子问题来逼近其 KKT 点[11][16]。对于固定的 $y \in X$, 定义凸子问题

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} f(x) \\ & \text{s.t. } g_1(x, \varepsilon) - \nabla g_2(y)^T (x - y) \leq \varepsilon \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

SCA 算法从初始可行解 x_0 出发, 在第 k 步求解子问题(4) (取 $y = x_k$)得到 x_{k+1} , 直至满足 KKT 条件[11][17]。

3. 一类新型光滑近似函数

3.1. 光滑近似函数的定义

定义 1 令 $\phi: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为非负实值函数。若 $\phi(z, \mu)$ 满足:

- (1) 对任意 $\mu > 0$, $\phi(z, \mu)$ 关于 $z \in \mathbb{R}$ 连续可微;
- (2) $\lim_{\mu \searrow 0} \phi(z, \mu) = 1_{(0, +\infty)}(z) (z \neq 0)$;

- (3) $\phi(0, \mu) = \frac{1}{2}$;
- (4) $\phi(z, \mu) \in [0, 1]$;
- (5) $\phi(z, \mu)$ 关于 z 单调递增;
- (6) 当 $z < 0$ 时 $\phi(z, \mu)$ 关于 z 是凸的, 当 $z > 0$ 时关于 z 是凹的;
- (7) 当 $z < 0$ 时 $\phi(z, \mu)$ 关于 μ 单调递增, 当 $z > 0$ 时关于 μ 单调递减。

则称 $\phi(z, \mu)$ 为特征函数 $1_{(0, +\infty)}(z)$ 的一类光滑近似函数。

该定义涵盖了已有文献中光滑近似函数所满足的基本性质[9][1]-[16]。下面给出满足该定义的两个具体函数实例。

3.2. 特例

例 1 考虑如下形式的函数:

$$\phi_1(z, \mu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\tanh \left(\frac{z}{\mu} \right) \right), \mu > 0 \quad (5)$$

例 1 在不同参数下的函数图像如图 1 所示。从图 1 可以看出, 函数关于点 $(0, 1/2)$ 中心对称, 且 μ 越小, 函数越接近特征函数 $1_{(0, +\infty)}(z)$; 当 $\mu = 0.001$ 时, 该函数几乎完全重合于特征函数; 当 μ 增大时, 过渡区逐渐变宽, 曲线趋于平缓。这一性质与定义 1 中的极限条件和单调性要求一致。

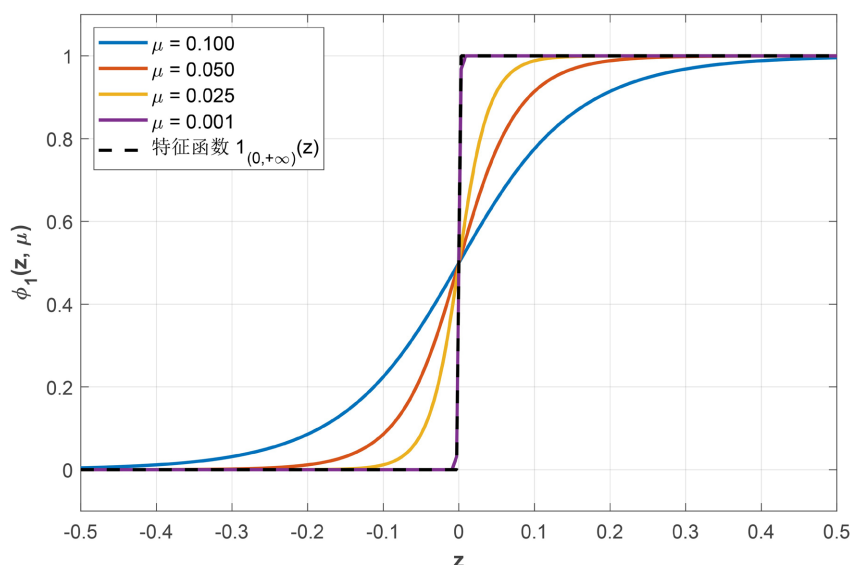


Figure 1. Approximation effect of $\phi_1(z, \mu)$ under different values of μ

图 1. $\phi_1(z, \mu)$ 在不同 μ 下的逼近效果

函数 $\phi_1(z, \mu)$ 具有如下性质:

- (1) 极限性质。当 $z < 0$ 时, $\tanh(z/\mu) \rightarrow -1$, $\arcsin(-1) = -\pi/2$, 故 $\phi_1(z, \mu) \rightarrow 0$; 当 $z > 0$ 时, $\tanh(z/\mu) \rightarrow 1$, $\arcsin(1) = \pi/2$, 故 $\phi_1(z, \mu) \rightarrow 1$ 。因此 $\lim_{\mu \searrow 0} \phi_1(z, \mu) = 1_{(0, +\infty)}(z)$ 。
- (2) 值域与零点。由于 $\tanh(z/\mu) \in (-1, 1)$, $\arcsin(\cdot) \in (-\pi/2, \pi/2)$, 故 $\phi_1(z, \mu) \in (0, 1)$ 特别地, $\phi_1(0, \mu) = 1/2 + \arcsin(0)/\pi = 1/2$ 。
- (3) 光滑性。由于 $\tanh(\cdot)$ 和 $\arcsin(\cdot)$ 均为 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 复合后 $\phi_1(z, \mu)$ 关于 z 是无穷阶可微的 (C^∞)。

(4) 单调性。对 z 求偏导:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{1}{\pi\mu} \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\mu}\right) > 0$$

故 $\phi_1(z, \mu)$ 关于 z 严格单调递增。

(5) 凸凹性。二阶偏导为

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{\pi\mu^2} \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\mu}\right) \tanh\left(\frac{z}{\mu}\right)$$

当 $z < 0$ 时 $\tanh(z/\mu) < 0$, 二阶导为正, 函数关于 z 是凸的; 当 $z > 0$ 时二阶导为负, 函数关于 z 是凹的。

(6) 关于 μ 的单调性。

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{1}{\pi\mu} \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\mu}\right) > 0$$

当 $z < 0$ 时 $\partial \phi_1 / \partial \mu > 0$, 当 $z > 0$ 时 $\partial \phi_1 / \partial \mu < 0$, 满足定义 1 的条件(7)。

例 2 考虑如下形式的函数:

$$\phi_2(z, \mu) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\mu}\right) \right), \mu > 0 \quad (6)$$

即标准正态分布的累积分布函数(CDF), 其中 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 标准误差函数。

例 2 在不同参数下的函数图像如图 2 所示。与图 1 类似, 函数关于点 $(0, 1/2)$ 中心对称, 且 μ 越小, 函数越接近特征函数; 当 μ 增大时, 曲线趋于平缓。

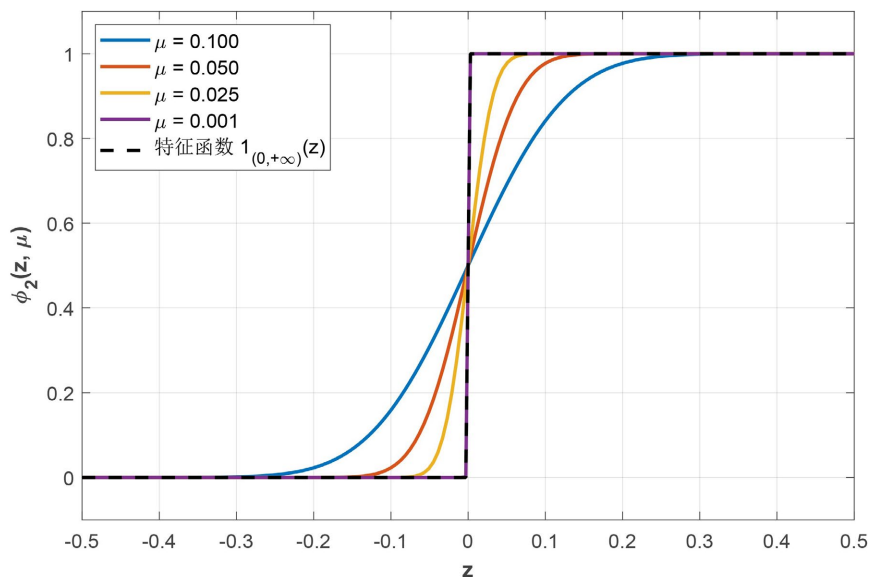


Figure 2. Approximation effect of $\phi_2(z, \mu)$ under different values of μ

图 2. $\phi_2(z, \mu)$ 在不同 μ 下的逼近效果

函数 $\phi_2(z, \mu)$ 具有如下性质:

(1) 极限性质。当 $z < 0$ 时 $\operatorname{erf}(z/(\sqrt{2}\mu)) \rightarrow -1, \phi_2 \rightarrow 0$; 当 $z > 0$ 时 $\operatorname{erf}(z/(\sqrt{2}\mu)) \rightarrow 1, \phi_2 \rightarrow 1$ 。

- (2) 值域与零点。 $\phi_2(z, \mu) \in (0, 1)$, $\phi_2(0, \mu) = 1/2$ 。
 (3) 光滑性。误差函数为 C^∞ 函数, 故 $\phi_2(z, \mu)$ 关于 z 是无穷阶可微的。
 (4) 单调性。

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\mu^2}\right) > 0$$

- (5) 凸凹性。

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = -\frac{z}{\sqrt{2\pi\mu^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\mu^2}\right)$$

当 $z < 0$ 时, $-z > 0$, 二阶导为正(凸); 当 $z > 0$ 时, $-z < 0$, 二阶导为负(凹)。

- (6) 关于 μ 的单调性。

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \mu} = -\frac{z}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\mu^2}\right)$$

当 $z < 0$ 时 $\partial \phi_2 / \partial \mu > 0$, 当 $z > 0$ 时 $\partial \phi_2 / \partial \mu < 0$, 满足定义 1 的条件(7)。

从图 1 和图 2 可以看出, 两个函数均关于点 $(0, 1/2)$ 中心对称, 且 μ 越小, 函数越接近特征函数 $1_{(0, +\infty)}(z)$: 当 $\mu = 0.001$ 时, 两者几乎完全重合于特征函数; 当 μ 增大时, 过渡区逐渐变宽, 曲线趋于平缓。这一性质与定义 1 中的极限条件和单调性要求一致。

4. 数值实验

Hong 等人[11]提出的 SCA 算法给出了求解概率约束优化问题的一类有效途径。本节将上一节提出的两个光滑近似函数分别嵌入 SCA 算法框架, 用于求解概率约束优化问题。为检验两个函数的实际计算表现, 以经典的 l_1 范数概率约束优化问题为算例, 从收敛速度、稳定性及参数敏感性等方面对算法性能进行系统评估。

基于本文的两个光滑函数, 我们编制了相应的 SCA 算法 MATLAB 程序[17]。在算法的每一次迭代中, 使用 MATLAB 优化工具箱中的 fmincon 函数求解凸子问题(8), 并采用样本平均近似(SAA)方法处理期望值。本节所有的算法程序均在 Intel(R) Core(TM) i7-6600U CPU @ 2.60GHz (2.81 GHz)和 16.0 GB 内存的计算机上, 使用 MATLAB R2023b 完成。

考虑如下 l_1 范数概率约束优化问题[11]:

$$\begin{aligned} \min & -\sum_{j=1}^d x_j \\ \text{s.t.} & \Pr\left\{\sum_{j=1}^d \xi_{ij}^2 x_j^2 \leq 100, i=1, \dots, m\right\} \geq 1-\alpha \\ & x_j \geq 0, j=1, \dots, d \end{aligned} \quad (7)$$

其中 ξ_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, d$) 为独立同分布的标准正态随机变量。由对称性可知, 最优解满足 $x_1 = \dots = x_d$ 。当 $d=10, m=10, \alpha=0.1$ 时, 理论最优解为 $(2.082, \dots, 2.082)^T$, 理论最优值为 -20.82 [11]。

4.1. 数值结果分析

4.1.1. 收敛行为分析

图 3 展示了两个光滑函数在 $\mu = 0.001$ 时, 一次运行下的收敛曲线。

从迭代次数看, ϕ_1 与 ϕ_2 约 3 到 5 次即终止, 收敛速度较快。但这种极速收敛并非好事——它恰恰说

明 SCA 子问题的可行域在 μ 较小时变得过于狭窄, 使得子问题最优解 x_{k+1} 在第一步或第二步就撞上约束边界, 随后因线性化梯度在边界附近变化剧烈而无法继续改善目标。

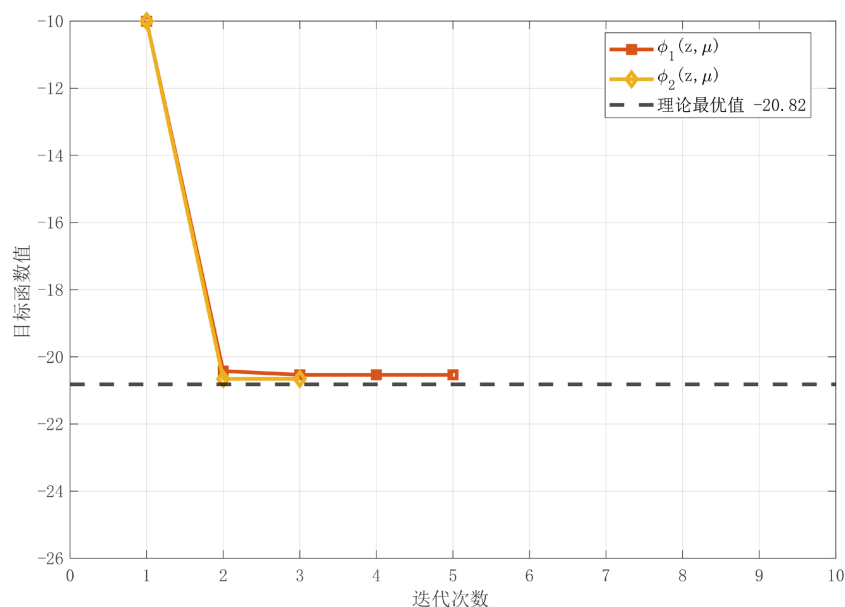


Figure 3. Convergence curves of the two smoothing functions under $\mu = 0.001$

图 3. 两个光滑函数在 $\mu = 0.001$ 下的收敛曲线对比

4.1.2. 稳定性分析

图 4 展示了两个光滑函数在 $\mu = 0.001$ 下 10 次独立运行的最优值箱线图。分析可知:

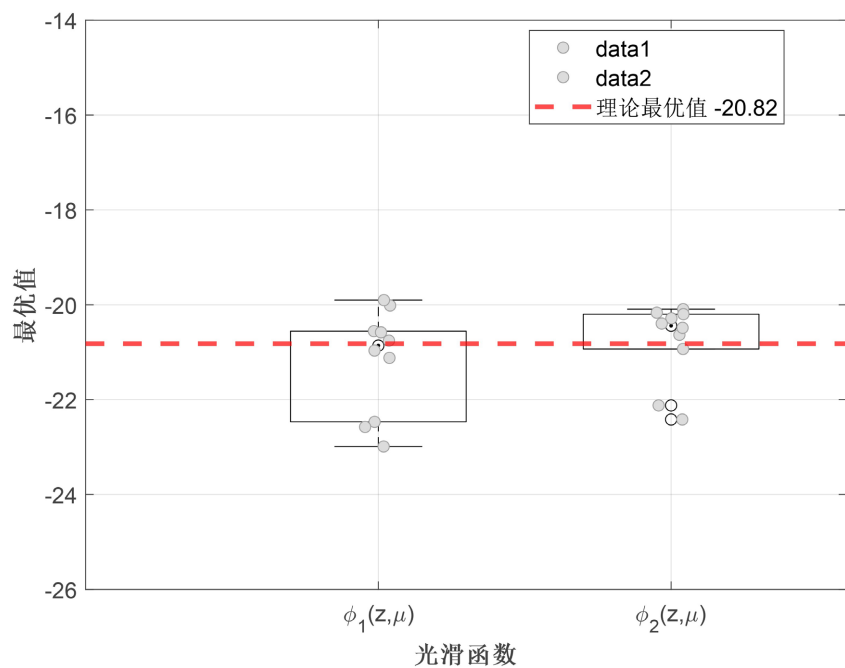


Figure 4. Boxplots of optimal values for the two smoothing functions under $\mu = 0.001$

图 4. 两个光滑函数在 $\mu = 0.001$ 下的最优值分布箱线图

- (1) $\phi_1(z, \mu)$ 的箱体较宽, 标准差为 4.166。
- (2) $\phi_2(z, \mu)$ 的箱体较窄, 标准差为 2.614。

4.1.3. 子问题形状诊断

为可视化 SCA 子问题在迭代后期的数值形态, 本文对一次运行中的最后一次迭代子问题进行了形状诊断。固定基点 $y = x_k$, 沿方向 $d = x_{k+1} - x_k$ 定义一维截面:

$$f(t) = f(x_k + td), \quad c_{lin}(t) = g_1(x_k + td) - [g_2(x_k) + \nabla g_2(x_k)^T td] - \varepsilon \alpha,$$

其中 $t=0$ 对应旧点 y , $t=1$ 对应子问题最优解 x_{k+1} 。

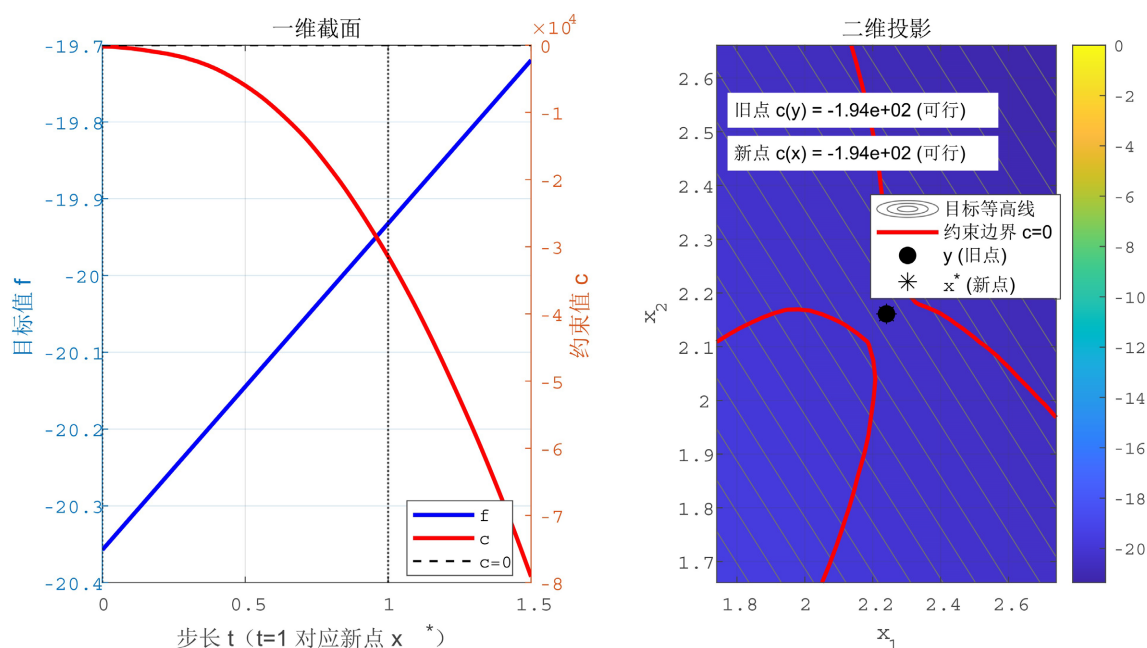


Figure 5. Shape diagnosis of the SCA subproblem objective function and constraint
图 5. SCA 子问题目标函数和约束

图 5(左)显示, 在该一维截面中线性化约束 $c_{lin}(t)$ 在整个考察区间内均满足 $c_{lin}(t) < 0$ 即该方向完全位于可行域内部, 但目标函数 $f(t)$ 沿此方向呈递增趋势, 因此子问题在该方向上无法获得下降。二维投影图(图 5(右))显示新旧两个迭代点几乎完全重合, 表明 $|x_{k+1} - x_k|$ 在数值上趋于零, 算法在迭代后期可能已无法产生有效步长。综合来看, 算法停滞的原因在于: 当前点附近的可行方向集合被压缩至极小范围, 而沿这些方向目标函数无法进一步下降, SCA 子问题的最优解只能在极小范围内移动。

4.1.4. KKT 残差追踪诊断

为精细刻画算法的停滞行为, 本文在每次迭代后记录了由优化器(fmincon)返回的 KKT 残差信息, 综合度量当前点是否满足子问题的最优性条件。

图 6 展示了 KKT 残差(对数坐标)与目标函数值随迭代次数的变化。结果显示, 目标函数在第 2 次迭代后趋于稳定, 变化幅度小于 10^{-3} , 但 KKT 残差始终在较高水平波动, 未随迭代同步收敛至零。这表明算法虽然因目标值变化微小而终止, 但当前点可能并未真正满足子问题的 KKT 条件——算法停止于一个数值上的“平坦区域”, 而非真正的最优点, 子问题的数值病态性是导致收敛不稳定的直接原因。

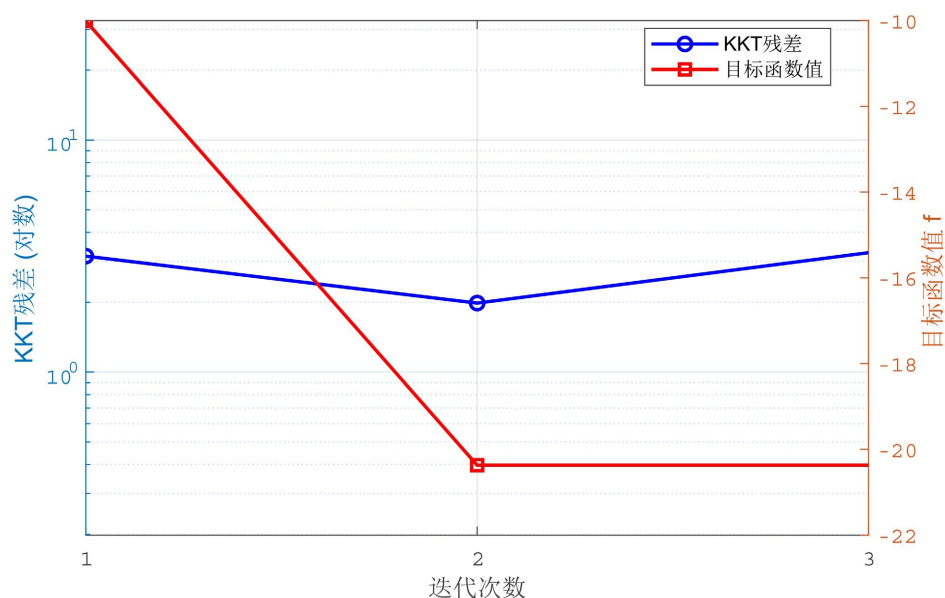


Figure 6. KKT residual and objective function values

图 6. KKT 残差与目标函数值

4.1.5. 参数敏感性分析

图 7 展示了两个光滑函数在不同 μ 值下, 各 10 次的平均最优值变化曲线。从图中可以清晰地看出, 曲线呈现明显起伏。具体均值数据如表 1 所示。

从逼近理论最优值 -20.82 的角度来看, $\phi_2(z, \mu)$ 在 $\mu = 0.025$ 时表现最佳(均值 -20.725 , 与理论值的偏差仅为 0.095), 在 $\mu = 0.001$ 时也表现良好(均值 -20.723 , 偏差 0.097); $\phi_1(z, \mu)$ 在 $\mu = 0.001$ 时表现最佳(均值 -20.330 , 偏差 0.490)。

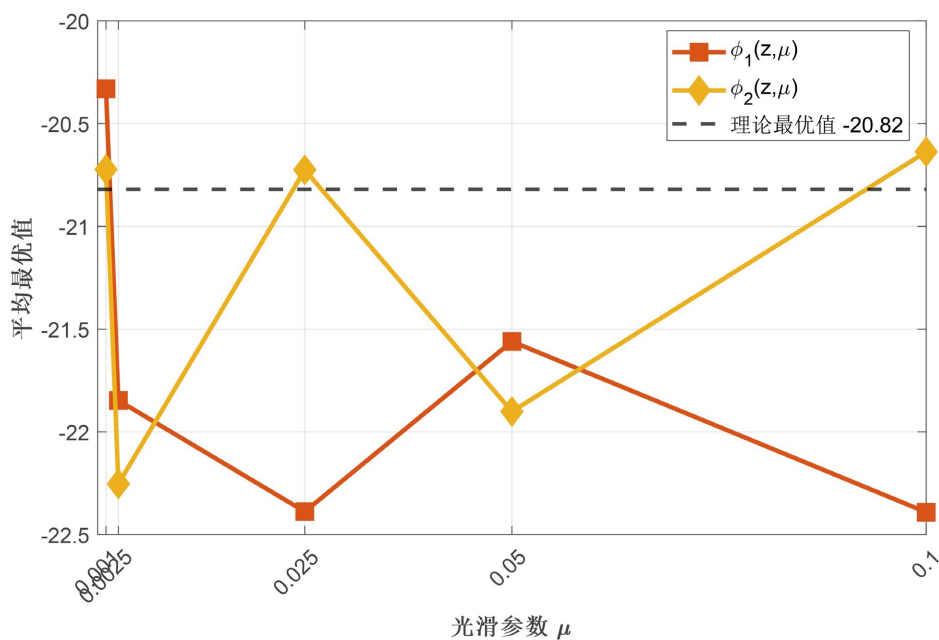


Figure 7. Parameter sensitivity curves of the two smoothing functions

图 7. 两个光滑函数的参数敏感性曲线

4.2. 数值结果

表 1 列出了各函数在不同 μ 下的平均最优值和标准差。

Table 1. Mean optimal values (standard deviations) of two smoothing functions for different μ

表 1. 两个光滑函数在不同 μ 下的平均最优值(标准差)

μ	$\phi_1(z, \mu)$	$\phi_2(z, \mu)$
0.001	-20.330 (4.166)	-20.723 (2.614)
0.0025	-21.847 (1.163)	-22.253 (2.493)
0.025	-22.388 (1.241)	-20.725 (4.408)
0.05	-21.560 (4.167)	-21.901 (0.807)
0.1	-22.391 (1.694)	-20.637 (5.498)

4.2.1. 光滑性与稳定性的权衡

上述数值实验揭示了一个值得关注的现象：本文提出的这类光滑函数虽然具有极高的理论光滑性 (C^∞)，但在 SCA 算法框架下却表现出强烈的参数敏感性和收敛不稳定性。

我们认为，本文给出的两个函数在整个实数轴上均具有非零梯度，处处“敏感”。这种设计虽然在理论上提供了无限阶可微性，但在数值算法中却导致 SCA 子问题的可行域边界过于“锋利”。当光滑参数 μ 选取不当时，算法容易“一步跳过头”或“卡在边界”，从而产生波动甚至发散。

这一观察表明：在构造用于数值算法的光滑近似函数时，“光滑性”可能并非越高越好。纯粹的高阶光滑性可能带来数值上的脆弱性。适当引入平坦区或饱和区(即在远离原点处使梯度趋近于零)，反而有助于为算法提供“数值缓冲”，提升其稳健性。

4.2.2. SAA 噪声与光滑函数梯度的相互影响

本文采用样本平均近似(SAA)处理概率约束中的期望值，但有限样本带来的估计误差与光滑函数的梯度特性之间存在相互影响。以 ϕ_1 为例，其梯度峰值 $1/(\pi\mu)$ 随 μ 减小而急剧增大，有效过渡区宽度仅为 $O(\mu)$ 。当 μ 过小时，SAA 的抽样波动足以将 $c(x, \xi)$ 的样本估计值反复推过这一极窄的过渡区，导致概率约束近似值在不同样本集之间剧烈变化。这一影响通过 SCA 迭代传递，最终表现为解的波动。表 1 中 $\mu = 0.001$ 时两类函数的标准差(4.166 和 2.614)显著大于 μ 较大时的情形，与上述分析一致。这表明光滑参数的选取需与样本容量相匹配，过小的 μ 虽提升理论光滑性，却可能放大 SAA 噪声的负面影响。

5. 结论

本文提出了一类新型光滑近似函数的一般形式，并给出了两个典型特例，结果表明，它们满足光滑近似函数的全部理论性质。数值实验以经典的 l_1 范数概率约束优化问题为算例，将两个特例在 SCA 算法框架下进行测试。主要结论如下：

- (1) 两个函数在计算效率上表现优异，迭代次数极少。从逼近理论最优值的角度来看， $\phi_2(z, \mu)$ 在 $\mu = 0.025$ 时表现最佳(与 -20.82 的偏差仅为 0.095)， $\phi_1(z, \mu)$ 在 $\mu = 0.001$ 时表现最佳(偏差 0.490)。
- (2) 两个函数对光滑参数 μ 高度敏感，需要精细调参才能达到理想性能，且各自存在不同的最佳参数区间。
- (3) 实验结果表明，该类函数在远离原点处仍然保持非零梯度的设计，虽然提高了理论光滑性，但是可能削弱了算法的数值稳定性——即使均值接近理论值，标准差仍然较大，说明单次运行结果波动明显。这一发现揭示了光滑函数设计中“理论性质”与“数值性能”之间的重要权衡：在数值算法中，纯粹的

高阶“光滑性”可能并非越高越好。

基于上述发现, 后续可以继续研究的一个方向是: 在 origin 附近保持足够光滑性以利用梯度信息, 同时在远离 origin 处引入梯度饱和区以构建“数值缓冲”。设计具有此类分段或混合结构的光滑函数, 有望在计算效率和数值稳定性之间取得更好的平衡。

参考文献

- [1] 郭小璇, 龚仁喜, 鲍海波, 等. 含新能源电力系统机会约束经济调度的二阶锥规划方法[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(22): 85-91.
- [2] Shapiro, A., Dentcheva, D. and Ruszczyński, A. (2009). Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. 2nd Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718751>
- [3] Iwamura, K. and Liu, B. (1998) Chance Constrained Integer Programming Models for Capital Budgeting in Fuzzy Environments. *Journal of the Operational Research Society*, **49**, 854-860. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600576>
- [4] Iwamura, K. and Liu, B. (1999) Dependent-Chance Integer Programming Applied to Capital Budgeting. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42**, 117-127. <https://doi.org/10.15807/jorsj.42.117>
- [5] Prékopa, A., Rapcsák, T. and Zsuffa, I. (1978) Serially Linked Reservoir System Design Using Stochastic Programming. *Water Resources Research*, **14**, 672-678. <https://doi.org/10.1029/wr014i004p00672>
- [6] Dentcheva, D., Lai, B. and Ruszczyński, A. (2004) Dual Methods for Probabilistic Optimization Problems. *Mathematical Methods of Operational Research*, **60**, 331-346. <https://doi.org/10.1007/s001860400371>
- [7] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (2000) Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data. *Mathematical Programming*, **88**, 411-424. <https://doi.org/10.1007/pl00011380>
- [8] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, **2**, 21-41. <https://doi.org/10.21314/jor.2000.038>
- [9] Nemirovski, A. and Shapiro, A. (2006) Convex Approximations of Chance Constrained Programs. *SIAM Journal on Optimization*, **17**, 969-996. <https://doi.org/10.1137/050622328>
- [10] Chen, W., Sim, M., Sun, J. and Teo, C. (2010) From CVaR to Uncertainty Set: Implications in Joint Chance-Constrained Optimization. *Operations Research*, **58**, 470-485. <https://doi.org/10.1287/opre.1090.0712>
- [11] Hong, L.J., Yang, Y. and Zhang, L. (2011) Sequential Convex Approximations to Joint Chance Constrained Programs: A Monte Carlo Approach. *Operations Research*, **59**, 617-630. <https://doi.org/10.1287/opre.1100.0910>
- [12] Shan, F., Zhang, L.W. and Xiao, X.T. (2014) A Smoothing Function Approach to Joint Chance-Constrained Programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **163**, 181-199. <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0513-3>
- [13] 张晓有. 基于 Sigmoid 函数的概率约束优化问题的光滑近似[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2013.
- [14] 王佳. 基于 Chen-Harker-Kanzow-Smale 光滑和函数的概率约束优化问题的光滑 D.C.近似[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2015.
- [15] 任咏红, 曹丽娜. 概率约束优化问题的一个光滑 D.C.近似[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2018, 41(1): 17-21.
- [16] 池慧. 基于 Pinar-Zenios 光滑和函数的概率约束优化问题的光滑 D.C.近似[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2017.
- [17] Ren, Y.H., Sun, Y.C., Li, D.C. and Guo, F. (2024) A D.C. Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints Based on Chen-Harker-Kanzow-Smale Smooth plus Function. *Mathematical Methods of Operations Research*, **99**, 179-203. <https://doi.org/10.1007/s00186-024-00859-y>