

基于混合梯度与稀疏先验的图像复原算法

董 伦, 赵 旭

长春光华学院数理教研部, 吉林 长春

收稿日期: 2026年8月11日; 录用日期: 2026年9月5日; 发布日期: 2026年9月16日

摘 要

针对泊松噪声下的图像的复原问题, 本文设计一种基于混合梯度与稀疏先验的复原算法。该算法模型采用Kullback-Leibler散度作为数据保真项, 可以有效地抑制泊松噪声; 在正则项上, 采用重叠组稀疏正则化约束图像的一阶梯度, 采用 L_1 和 L_P 范数联合约束图像的二阶梯度; 使用交替方向乘子法、最小化方法和迭代加权最小二乘法对算法模型进行求解。将本文复原算法与FOTV、HTVp-OGS、P-HONOGSTV三种算法进行实验对比。实验结果表明, 综合主观视觉和客观评价指标峰值信噪比和结构相似性上, 本文算法优于以上几种对比算法。

关键词

图像复原, 泊松噪声, 稀疏性先验, 正则化

Image Restoration Algorithm Based on Mixed Gradient and Sparse Priors

Lun Dong, Xu Zhao

Department of Mathematics and Physics, Changchun Guanghua University, Changchun Jilin

Received: August 11, 2026; accepted: September 5, 2026; published: September 16, 2026

Abstract

To address the problem of image restoration under Poisson noise, this paper designs a restoration algorithm based on mixed gradients and sparse priors. The algorithm model employs the Kullback-Leibler divergence as the data fidelity term, effectively suppressing Poisson noise. On the regularization term, overlapping group sparse regularization is used to constrain the first-order gradient of the image and L_1 and L_P norms are used to jointly constrain the second-order gradient of the image; the algorithm model is solved using alternating direction method of multipliers, minimization method, and iteratively reweighted least squares algorithm. Experimental comparisons are

conducted between our restoration algorithm and three algorithms: FOTV, HTVp-OGS, and P-HONOGSTV through experiments. The experimental results show that our algorithm outperforms the above compared algorithms in terms of subjective visual and objective evaluation indicators such as peak signal-to-noise ratio and structural similarity.

Keywords

Image Restoration, Poisson Noise, Sparse Priors, Regularization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在图像采集与传输过程中, 由于受到各种因素的影响, 从而导致我们观测到的图像往往同时存在模糊和噪声。这种退化的图像会严重影响人们和计算机对图像中信息的识别和提取, 进而影响对图像中重要信息的判断。图像目前在医学、农业等重要领域的广泛应用, 提高图像质量, 将退化图像复原成清晰图像[1] [2]这一研究是有重要意义的。

图像复原问题是一个高度不适定的逆问题, 尤其是噪声的形式不同、对图像信号依赖的程度不同, 导致使用图像复原框架形式和复杂程度也有不同。泊松噪声就是一种对信号具有强依赖性的噪声, 其噪声强度会随图像最大灰度变化而变化, 因此基于传统二次数据保真项的图像复原模型通常难以准确描述泊松噪声的统计特性。针对这一问题, 早期研究者[3]基于泊松分布的最大后验估计构建相对熵(即 Kullback-Leibler 散度), 并结合图像先验信息建立变分复原模型[4]。该框架也是去除泊松噪声的主流方法, 本文同样采用 Kullback-Leibler 散度作为数据保真项, 对含泊松噪声的模糊图像开展复原建模。

稀疏先验通常被用于构造图像复原模型, 其中全变分模型能够充分表示图像梯度的稀疏性, 在去除噪声的同时较好地保持边缘结构, 因而被广泛应用于图像复原问题[5]。但一阶全变分易在平滑区域产生阶梯效应, 高阶全变分虽能提升区域平滑性, 却可能导致边缘模糊[6]。为此分数阶全变分正则化也被诸多学者采用, 其在同时去除模糊和噪声的同时, 也体现出了保留丰富细节、抑制伪影的性能[7]。近年来, 重叠组稀疏正则化被大量应用于图像复原, 相较于传统全变分正则化, 该方法能进一步增强对图像局部结构的描述能力, 在保持平移不变性的同时有效抑制块状伪影[8] [9]。逐渐重叠组稀疏先验被引入泊松噪声图像复原问题, 并与高阶全变分、非凸正则化等相结合, 在边缘保持、阶梯效应抑制和细节恢复方面取得了较好的效果, 如 Lv 等人[10]使用具有重叠组稀疏性的全变分作为先验信息。所提出的方法可以避免阶梯效应, 并在恢复的图像中保留丰富边缘细节。Shi 等人[11]对图像梯度引入超拉普拉斯先验, 并利用重叠组稀疏先验构建图像的稀疏表示约束。该算法具备良好的收敛性能, 能够有效抑制阶梯伪影, 在削弱阶梯效应与保留图像细节之间实现了良好平衡。

尽管上述方法取得了一定进展, 但单一正则项依然难以同时兼顾平滑区域恢复、边缘保持和细节重建。为此近年来, 使用混合正则化构造复原模型成为了一种常用手段, 一些研究成果[12]-[14]证明使用混合正则化可以进一步提升泊松图像复原模型对稀疏结构的刻画能力。

为此, 本文结合重叠组稀疏先验与梯度域非凸稀疏先验, 构建一种用于泊松噪声图像复原的混合正则化模型。其中, 重叠组稀疏正则项约束图像的一阶梯度用于增强局部梯度结构的一致性, L_1 正则化与 L_p 正则项约束图像二阶梯度用于协调边缘保持与平滑区域恢复。针对所建立的非光滑、非凸优化图像复

原模型, 本文采用交替方向乘法进行变量分裂, 并分别结合快速傅里叶变换、MM 算法和迭代加权最小二乘法求解相应子问题。实验结果表明, 本文方法能够有效去除泊松噪声和模糊, 并在峰值信噪比与结构相似度指标上获得较好的复原效果。

2. 相关工作

2.1. 泊松噪声与相对熵

泊松噪声是一种常见噪声, 是由于传感器在采集图像数据时, 会受自身携带的光子的影响。光子到达传感器单元上是相互独立的随机事件, 单位时间内抵达某像素的光子数目会服从泊松分布, 这种光子计数的随机波动, 最终形成了泊松噪声。

携带泊松噪声的退化图像的退化过程可以表示为:

$$f = \mathcal{P}(Ku). \quad (1)$$

其中 u 表示清晰图像, f 表示观测到的退化图像, K 表示模糊核, $\mathcal{P}(\cdot)$ 表示被泊松噪声污染的过程。根据泊松噪声的概率密度函数, 使用最大后验估计(Maximum A Posteriori, MAP)方法, 从退化图像 f 中估计出清晰图像 u , 即假设每个像素点 f_i 的测量数据均遵循泊松分布, 那么退化图像 f 的条件分布写为:

$$P(f | Ku) = \prod_{i=1}^N \frac{e^{-(Ku)_i} ((Ku)_i)^{f_i}}{f_i!}. \quad (2)$$

其中 i 表示第 i 个像素点, N 表示像素点总数。再根据贝叶斯公式, 可以得到:

$$P(Ku | f) = \frac{P(f | Ku)P(Ku)}{p(f)}. \quad (3)$$

再对公式(3)取负对数形式, 并将只含有 f 的部分单独分离出来则可以得到:

$$-\log P(Ku | f) = \left[\left(\sum_{i=1}^N (Ku)_i - f_i \log (Ku)_i \right) - \log P(Ku) \right] + \left[\left(\sum_{i=1}^N \log (f_i!) \right) + \log (P(f)) \right]. \quad (4)$$

由于观测到的退化图像 f 的所有信息都是已知的, 所以(4)中所有只关于 f 的项就可以视为常数, 而常数不影响讨论 u 的极小化问题, 所以在转化为 u 的极小化问题时, 只关于 f 的项就可以舍去。再转化为对数似然形式就可以得到去除泊松噪声的图像复原模型框架:

$$\min_{u \geq 0} \langle Ku - f, \log Ku, 1 \rangle + \phi(u). \quad (5)$$

其中, 保真项 $\langle Ku - f, \log Ku, 1 \rangle$ 被称作相对熵, 或 KL 散度(Kullback-Leibler Divergence); 正则项 $\phi(u)$ 是对 u 或其某种变换下的约束, 如稀疏性约束。本文则采用该模型框架, 设计适用于针对泊松噪声下的图像复原的模型。

2.2. 稀疏性先验

原始图像像素分布广泛, 拥有大量非零像素值, 所以原始图像本身通常不具有稀疏性, 但是将图像进行某种变换就具有稀疏性。下面介绍几种用于稀疏表示的重要的工具。

2.2.1. 离散差分算子

梯度是表示图像像素灰度的变化量, 图像的梯度仅在图像边缘处、病灶处和地物边界处梯度显非零, 在平滑区域梯度趋近于零。因此大多数像素的梯度为零, 梯度图像天然具备稀疏性。由于数字图像无连续导数, 通常使用离散差分算子近似图像的梯度算子, 下面给尺寸为 $m \times n$ 的图像对应的离散前向一阶

差分算子和离散后向一阶差分算子的定义:

$$\begin{aligned} (\nabla^+ u)_{i,j} &= \left((\nabla_x^+ u)_{i,j}, (\nabla_y^+ u)_{i,j} \right), \\ (\nabla^- u)_{i,j} &= \left((\nabla_x^- u)_{i,j}, (\nabla_y^- u)_{i,j} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} (\nabla_x^+ u)_{i,j} &= \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j}, & \text{if } i < m \\ u_{1,j} - u_{m,j}, & \text{if } i = m \end{cases}, & (\nabla_y^+ u)_{i,j} &= \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j}, & \text{if } j < n \\ u_{i,1} - u_{i,n}, & \text{if } j = n \end{cases}, \\ (\nabla_x^- u)_{i,j} &= \begin{cases} u_{i,j} - u_{i+1,j}, & \text{if } i < m \\ u_{m,j} - u_{1,j}, & \text{if } i = m \end{cases}, & (\nabla_y^- u)_{i,j} &= \begin{cases} u_{i,j} - u_{i,j+1}, & \text{if } j < n \\ u_{i,n} - u_{i,1}, & \text{if } j = n \end{cases}. \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $(\nabla_x^+ u)_{i,j}$ 、 $(\nabla_y^+ u)_{i,j}$ 分别表示水平、竖直方向上的离散前向一阶差分算子; $(\nabla_x^- u)_{i,j}$ 、 $(\nabla_y^- u)_{i,j}$ 分别表示水平、竖直方向上的离散后向一阶差分算子。本文对图像进行一阶梯度变换时均使用离散前向一阶差分算子。

根据离散前向后向一阶差分算子的定义, 我们也可以进一步得到离散二阶梯度变换算子的定义:

$$(\nabla^2 u)_{i,j} = \left((\nabla_{xx}^+ u)_{i,j}, (\nabla_{xy}^+ u)_{i,j}, (\nabla_{yx}^+ u)_{i,j}, (\nabla_{yy}^+ u)_{i,j} \right). \quad (8)$$

2.2.2. 重叠组稀疏正则化

重叠组稀疏正则化(Overlapping group sparsity, OGS)相比较传统 TV 正则化具有显著的优势, 在利用稀疏先验条件进行图像复原的过程中, 可以有效地抑制块状伪影的产生。

设对于任意中心位置为 (i, j) 尺寸为 $n \times n$ 的图像块 $\tilde{x}(i, j)_n$, 其数学表达式为:

$$\tilde{u}(i, j)_n = \begin{pmatrix} x(i-m_1, j-m_1) & x(i-m_1, j-m_1+1) & \cdots & x(i-m_1, j+m_2) \\ x(i-m_1+1, j-m_1) & x(i-m_1+1, j-m_1+1) & \cdots & x(i-m_1+1, j+m_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(i+m_2, j-m_1) & x(i+m_2, j-m_1+1) & \cdots & x(i+m_2, j+m_2) \end{pmatrix} \in R^{n \times n}. \quad (9)$$

再通过将图像块 $\tilde{x}(i, j)_n$ 拉成的维数为 n^2 的向量记作 $\mathbf{u}(i, j)_n$, 就可以得到二维重叠组稀疏正则化算子:

$$\Xi(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^N \left\| \mathbf{u}(i, j)_n \right\|_2. \quad (10)$$

3. 本文模型及求解

3.1. 模型构建

基于梯度图像具有稀疏性的特征, 结合去除含有泊松噪声的图像的复原模型框架, 本文提出的针对泊松噪声下的图像的复原模型为:

$$\min_{u \geq 0} \langle Ku - f, \log Ku, 1 \rangle + \mu_1 \Xi(\nabla u) + \mu_2 \left(\left\| \nabla^2 u \right\|_1 + \gamma \left\| \nabla^2 u \right\|_p^p \right). \quad (11)$$

其中 μ_1 , μ_2 是平衡正则项的参数, γ 为调节 L_1 范数和 L_p 范数 ($0 < p < 1$) 权重的调节参数。

3.2. 模型求解

本文采用交替方向乘子法(Alternating Direction Multiplier Method, ADMM)对模型(11)进行求解, 引入

辅助变量将极小化问题(11)转化为带有约束形式的极小化问题, 这里设置辅助变量为 d 、 z 、 c :

$$\min_{u \geq 0} \langle z - f \circ \log z, 1 \rangle + \mu_1 \Xi(d) + \mu_2 \left(|c|_1 + \gamma |c|_p^p \right), \text{ s.t. } z = Ku - f, d = \nabla u, c = \nabla^2 u. \quad (12)$$

再引入拉格朗日乘数 λ_z 、 λ_d 、 λ_c , 将问题(12)转化为无约束问题:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha(u, d, c, z, \lambda_d, \lambda_c, \lambda_z) = & \langle (z - f \circ \log z), 1 \rangle + \mu_1 \Xi(d) + \mu_2 \left(|c|_1 + \gamma |c|_p^p \right) + \langle Ku - f - z, \lambda_z \rangle \\ & + \frac{\alpha_1}{2} \|Ku - f - z\|_2^2 + \langle \nabla u - d, \lambda_d \rangle + \frac{\alpha_2}{2} \|\nabla u - d\|_2^2 \\ & + \langle \nabla^2 u - c, \lambda_c \rangle + \frac{\alpha_3}{2} \|\nabla^2 u - c\|_2^2, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\alpha_i (i=1,2,3) > 0$ 是各罚函数项的参数。再根据 ADMM 算法可以分离得到各子问题

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \langle Ku - f - z^k, \lambda_z^k \rangle + \frac{\alpha_1}{2} \|Ku - f - z^k\|_2^2 + \langle \nabla u - d^k, \lambda_d^k \rangle + \frac{\alpha_2}{2} \|\nabla u - d^k\|_2^2 \\ \quad + \langle \nabla^2 u - c^k, \lambda_c^k \rangle + \frac{\alpha_3}{2} \|\nabla^2 u - c^k\|_2^2 \\ d^{k+1} = \arg \min_d \mu_1 \Xi(d) + \langle \nabla u^{k+1} - d, \lambda_d^k \rangle + \frac{\alpha_2}{2} \|\nabla u^{k+1} - d\|_2^2 \\ c^{k+1} = \arg \min_c \mu_2 \left(|c|_1 + \gamma |c|_p^p \right) + \langle \nabla^2 u^{k+1} - c, \lambda_c^k \rangle + \frac{\alpha_3}{2} \|\nabla^2 u^{k+1} - c\|_2^2 \\ z^{k+1} = \arg \min_z \langle (z - f \circ \log z), 1 \rangle + \langle Ku^{k+1} - f - z, \lambda_z^k \rangle + \frac{\alpha_1}{2} \|Ku^{k+1} - f - z\|_2^2 \\ \lambda_d^{k+1} = \lambda_d^k + \alpha_2 (\nabla u^{k+1} - d^{k+1}) \\ \lambda_c^{k+1} = \lambda_c^k + \alpha_3 (\nabla^2 u^{k+1} - c^{k+1}) \\ \lambda_z^{k+1} = \lambda_z^k + \alpha_1 (Ku^{k+1} - f - z^{k+1}) \end{cases} \quad (14)$$

关于求解 u 的子问题, 我们可以转化成下列方程求解:

$$\left(\alpha_1 K^T K + \alpha_2 \nabla^T \nabla + \alpha_3 (\nabla^2)^T \nabla^2 \right) u = K^T (\alpha_1 f + \alpha_1 z^k - \lambda_z^k) + \nabla^T (\alpha_2 d^k - \lambda_d^k) + (\nabla^2)^T (\alpha_3 c^k - \lambda_c^k). \quad (15)$$

对于(15)式使用快速傅立叶变换(Fast Fourier transform, FFT)进行计算, 则会得到最终结果:

$$u^{k+1} = F^{-1} \left(\frac{F \left(K^T (\alpha_1 f + \alpha_1 z^k - \lambda_z^k) \right) + F \left(\nabla^T (\alpha_2 d^k - \lambda_d^k) \right) + F \left((\nabla^2)^T (\alpha_3 c^k - \lambda_c^k) \right)}{\alpha_1 F(K^T K) + \alpha_2 F(\nabla^T \nabla) + \alpha_3 F((\nabla^2)^T \nabla^2)} \right). \quad (16)$$

其中 $F(\cdot)$ 、 $F^{-1}(\cdot)$ 表示快速傅立叶变换和快速傅立叶变换的逆变换。

关于求解 d 的子问题是关于重叠组稀疏正则化求解的问题, 使用最小化方法(Majorize-Minimization, MM)对其进行求解, 这里直接给出最终的迭代过程, 迭代过程请见表 1:

Table 1. Iterative process of subproblem d

表 1. d 子问题的迭代过程

MM 算法求解 d -子问题

输入 $\lambda > 0$, 迭代次数 $t = 0, 1, 2, \dots, \max$, $\lambda = \mu_1 / \alpha_2$

初始化 $d^0 = d_0 = \nabla u^{k+1} + \lambda_d^k / \alpha_2$, $t = 0$

续表

MM 内部迭代:**While** $t = 1 : \max$ **do**

- 1: $\Gamma(d^t)_{l,j} = \sqrt{\sum_{i,j=-m_1}^{m_2} \left(\sum_{k_1,k_2=-m_1}^m |d_{r_1-i+k_1,r_2-j+k_2}^t| \right)^{-1/2}}.$
- 2: $d^{t+1} = \left(I + \lambda \Gamma(d^t)^T \Gamma(d^t) \right)^{-1} d_0.$
- 3: $t = t + 1.$

End While**输出** $d^{k+1} = d'$

关于求解 c 的子问题, 该问题本质包含凸优化和非凸优化两个问题的求解, 分别为:

$$c_1^{k+1} = \arg \min_c \|c_1\| + \frac{\alpha_3}{2\mu_2} \left\| \nabla^2 u^{k+1} - c_1 + \frac{\lambda_c^k}{\alpha_3} \right\|_2^2. \quad (17)$$

$$c_2^{k+1} = \arg \min_c \|c_2\|_p^p + \frac{\alpha_3}{2\mu_2\gamma} \left\| \nabla^2 u^{k+1} - c_2 + \frac{\lambda_c^k}{\alpha_3} \right\|_2^2. \quad (18)$$

问题(17)是关于凸优化的问题, 可以直接采用软阈值迭代算法进行求解, 关于 c_1 的迭代结果为:

$$c_1^{k+1} = \operatorname{sgn} \left(\nabla^2 u^{k+1} + \frac{\lambda_c^k}{\alpha_3} \right) * \max \left(\left| \nabla^2 u^{k+1} + \frac{\lambda_c^k}{\alpha_3} \right| - \frac{\mu_2}{\alpha_3}, 0 \right). \quad (19)$$

问题(18)则是关于 L_p 非凸优化的问题, 采用迭代加权最小二乘法(Iteratively reweighted least squares algorithm, IRLS)对其进行求解计算, 最终得到 c_2 的迭代过程, 迭代过程见表 2:

Table 2. Iterative process of subproblem c_2 **表 2.** c_2 子问题的迭代过程IRLS 算法求解 c_2 子问题**输入:** $p \in (0,1), \quad \varsigma \ll 1$ **初始化:** $c_2^{(0)} = \nabla^2 u^{k+1} + \lambda_c^k / \alpha_3$, 迭代次数 $t = 1 : N_{\max}$ **迭代步骤如下:****While** 终止条件不满足 **do**

$$\begin{aligned} \xi^t &= (\gamma \mu_2 / \alpha_3) p \left((c_2^{(t)})^2 + \varsigma \right)^{(p/2)-1} \\ c_2^{(t+1)} &= \left(I + \operatorname{diag}(\xi^t) \right)^{-1} \left(\nabla^2 u^{k+1} + \lambda_c^k / \alpha_3 \right) \\ t &= t + 1 \end{aligned}$$

End while**输出:** $c_2^{k+1} = c_2^{(t)}.$

最终将 c_1 、 c_2 的求解结果进行加权处理, 就可以得到 c 子问题的求解结果:

$$c^{k+1} = \frac{1}{1+\gamma} c_1^{k+1} + \frac{\gamma}{1+\gamma} c_2^{k+1}. \quad (20)$$

关于求解 z 的子问题的封闭解结果为:

$$z^{k+1} = \frac{Ku^{k+1} + \frac{\lambda_z^k}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1}I + \sqrt{\left(-Ku^{k+1} - \frac{\lambda_z^k}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1}I\right)^2 + \frac{4f}{\alpha_1}}}{2}. \quad (21)$$

拉格朗日乘数 λ_z 、 λ_d 、 λ_c 数按(14)中更新迭代。

3.3. 算法流程

算法：基于混合梯度与稀疏先验的图像复原算法

输入：含有泊松噪声的图像 f ，模糊算子 k ，各正则化参数

输出：复原后的图像 u

初始化： $u^0 = f$ ，拉格朗日乘数 λ_z^0 、 λ_d^0 、 λ_c^0

步骤 1：设置输出条件 $\|u^k - u^{k+1}\|/\|u^k\| \leq 10^{-4}$

步骤 2：通过(16)式更新 u

步骤 3：通过表 1 更新 d

步骤 4：通过(19)式更新 c_1 ，通过表 2 式更新 c_2

通过(20)式更新 c

步骤 5：通过(21)式更新 z

步骤 6：更新拉格朗日乘数
$$\begin{cases} \lambda_d^{k+1} = \lambda_d^k + \alpha_2 (\nabla u^{k+1} - d^{k+1}) \\ \lambda_c^{k+1} = \lambda_c^k + \alpha_3 (\nabla^2 u^{k+1} - c^{k+1}) \\ \lambda_z^{k+1} = \lambda_z^k + \alpha_1 (Ku^{k+1} - f - z^{k+1}) \end{cases}$$

4. 仿真实验

4.1. 实验数据集

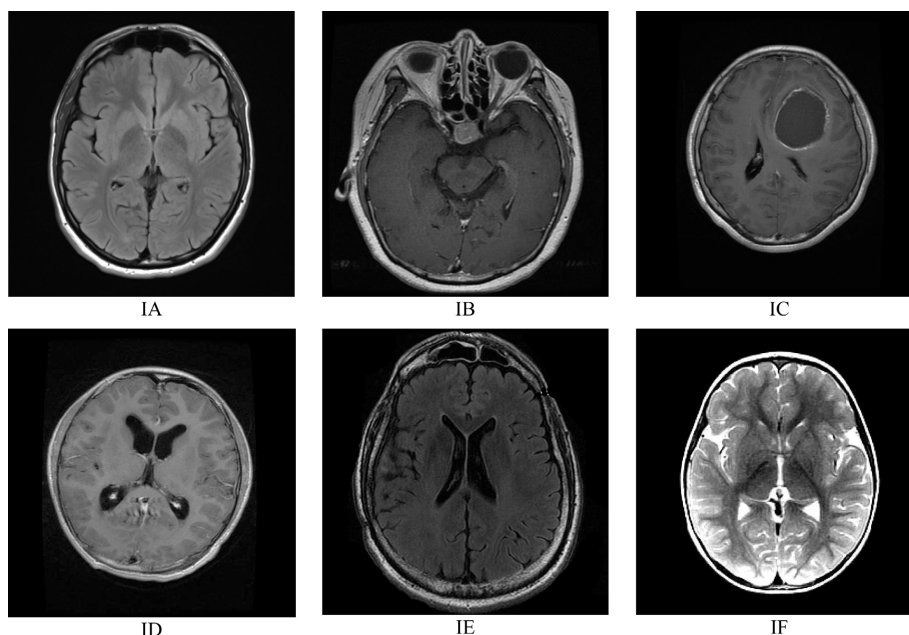


Figure 1. The clear MRI images used in this experiment

图 1. 本文实验使用的清晰 MRI 图像

为了验证所提出的算法模型在对含有泊松噪声的模糊图像的复原的性能, 本文在公开的 MRI 数据集中各选取 6 幅图像(IA、IB、IC、ID、IE、IF)进行模拟仿真。选取的图像见图 1。全部算法模型的实验均在 MATLAB R2020b 上进行, 且电脑配置为 Windows10, Intel(R) Core(TM) i5-6300 HQ CPU @ 2.30GHz, 以确保实验环境完全相同。

4.2. 结果客观评价指标和各项设置

为了客观反映本文算法的可行性, 本文使用峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)和结构相似度(Structure Similarity, SSIM)与对比试验的模型算法进行数值对比, 客观体现本文提出算法模型的复原性能。PSNR 值越高表示复原结果图像失真程度越低, 图像质量越好; SSIM 值越高说明复原结果图像与原始清晰图像越接近。

PSNR 定义为:

$$\text{PSNR}(x, y) = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right) (\text{dB}) \quad (22)$$

SSIM 定义为:

$$\text{SSIM}(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)} \quad (23)$$

其中 x 表示复原处理后得到的图像, y 表示原始清晰图像; μ_x 、 μ_y 分别表示 x 和 y 的像素点的均值, 反映图像的亮度; σ_x^2 和 σ_y^2 分别表示 x 和 y 的方差, 反映对比度; σ_{xy} 表示为 x 和 y 的协方差, 反映结构的相关性; c_1 和 c_2 为常数项, 为避免分母为 0 而设定; MSE 表示均方误差, 其表达式为

$$\text{MSE} = \frac{1}{H \times W} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^W [x(i, j) - y(i, j)]^2 \quad (24)$$

这里 H 和 W 表示图像的尺寸中行数和列数。

我们选择 FOTV [7]、HTVp-OGS [13]、P-HONOGSTV [14] 三种算法模型作为本文的对比实验, 对比试验的模型的各项参数均经过调优使复原结果达到最佳, 从而进一步客观反映本文提出的算法模型的可行性和实验对比的公平性。模拟仿真试验中我们选取选用宽度尺寸为 5、标准差为 1 的高斯模糊核用于模拟模糊情况, 选取峰值水平(peak)分别为 200、255、300 的情况下添加泊松噪声。本文提出的算法模型中部分参数 μ_1 、 μ_2 选取在 0.01~0.15 之间, 权重系数 γ 设置为 0.1。

4.3. 实验结果与分析

为了进一步充分验证本文提出的算法的可行性, 选取部分图像分别在不同 peak 值下的复原结果进行主观视觉对比, 在每幅图的右下角展示图像细节的复原情况。图 2 展示了 IA 在 peak = 200 时的复原结果对比, 图 3 展示了 IB 在 peak = 255 时的复原结果对比, 图 3 展示了 IC 在 peak = 300 时的复原结果对比。

表 3 和表 4 记录了 6 幅图像在三种 peak (200、255、300) 值下退化情况, 在本文算法和对比试验算法下复原后的 PSNR 和 SSIM 的所有结果, 每组实验的最大结果指标加粗标记。

为了确保对比公平, 使模型算法的性能的评估更加全面在表 5 中记录所有算法的平均运行时间。本文提出的算法在每种情况下复原所需要的时间均加粗标记。

从图 2、图 3、图 4 可以观察到, 本文提出的基于混合梯度与稀疏先验的图像复原算法对含有不同程

度泊松噪声的退化图像可以有效地进行复原, 复原结果相比较于其他 3 种对比试验算法更为清晰, 细节可以保留大量的细节, 图像信息更为丰富, 在图像复原问题中这是一个重要的评价标准, 同时与对比试验相比较, 本文算法可以有效地抑制伪影的产生。

从表 3、表 4 来看, 本文提出的算法除个别情况实验结果略低于对比试验, 绝大多数情况下, 本文算法的客观评价指标均高于对比试验的客观评价指标。

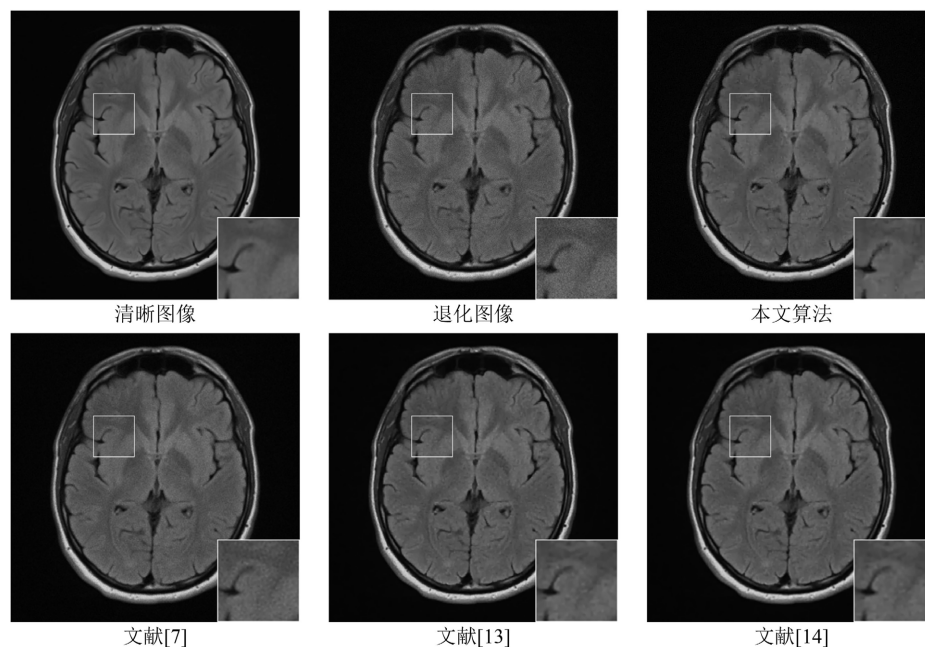


Figure 2. Comparison of restoration results of various algorithms for IA at peak value of 200

图 2. IA 在峰值 $\text{peak} = 200$ 时各算法复原结果对比图

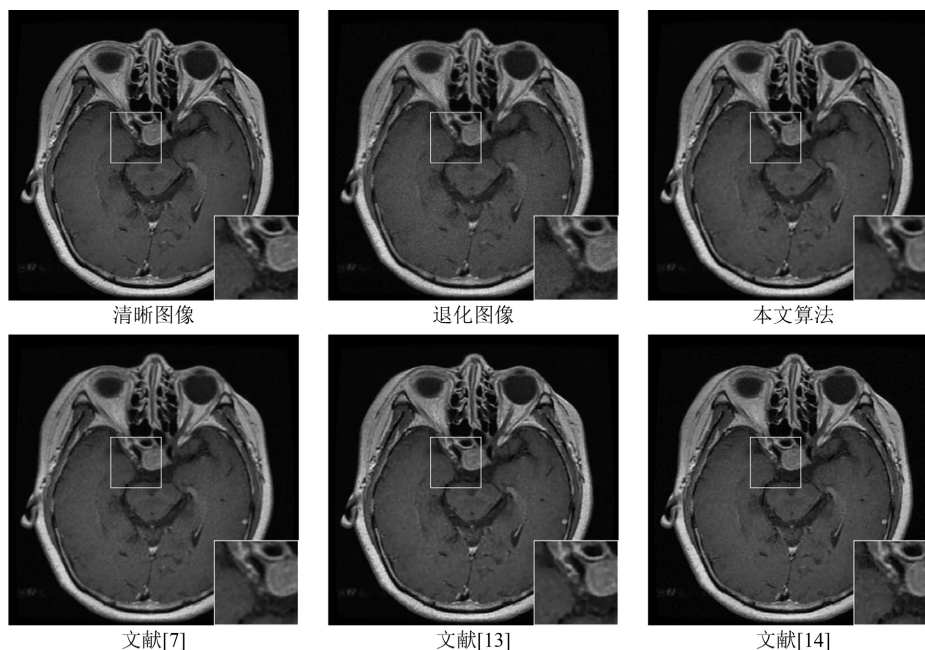


Figure 3. Comparison of restoration results of various algorithms for IB at peak value of 255

图 3. IB 在峰值 $\text{peak} = 255$ 时各算法复原结果对比图

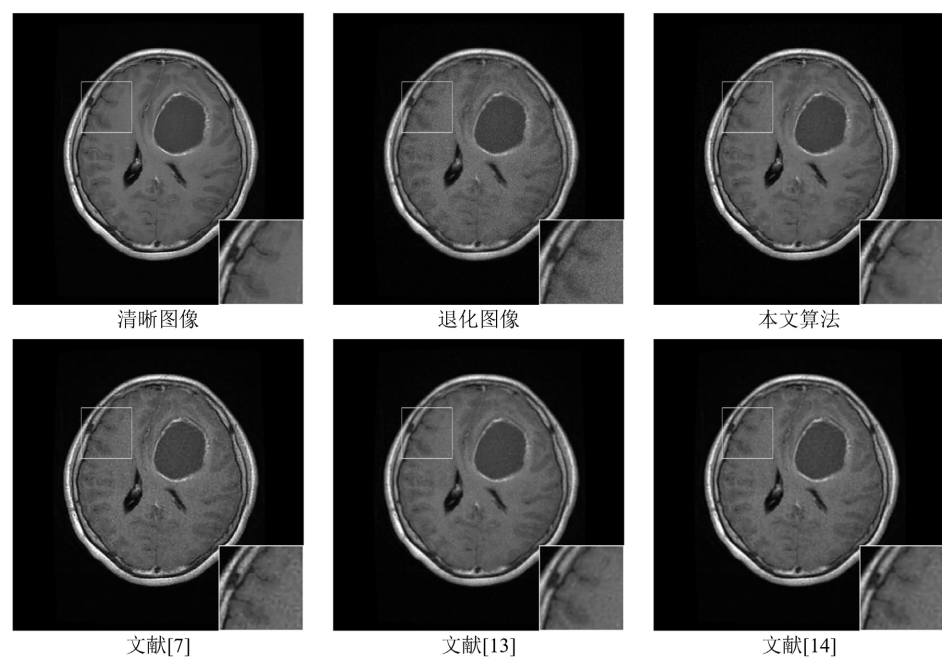


Figure 4. Comparison of restoration results of various algorithms for IC at peak value of 300
图 4. IC 在峰值 peak = 300 时各算法复原结果对比图

Table 3. PSNR comparison of restoration results from various algorithms
表 3. 各算法复原结果的 PSNR 对比

Image	Peak = 200				Peak = 255				Peak = 300			
	[7]	[13]	[14]	Ours	[7]	[13]	[14]	Ours	[7]	[13]	[14]	Ours
IA	36.90	37.13	37.39	37.62	37.17	37.26	37.38	37.89	37.31	37.35	37.60	37.99
IB	35.09	35.58	35.43	35.59	35.26	36.08	35.85	36.10	35.90	36.10	36.01	36.45
IC	37.46	37.60	37.56	37.62	37.62	37.88	37.80	37.97	37.87	37.92	37.89	38.01
ID	36.59	36.65	37.63	36.69	36.99	37.03	37.08	37.12	37.02	37.18	37.21	37.28
IE	32.37	32.40	32.62	32.45	32.60	32.83	32.68	32.78	32.73	32.88	32.86	32.91
IF	27.05	27.20	27.14	27.25	27.18	27.33	27.35	27.39	27.26	27.34	27.58	27.55

Table 4. SSIM comparison of restoration results from various algorithms
表 4. 各算法复原结果的 SSIM 对比

Image	Peak = 200				Peak = 255				Peak = 300			
	[7]	[13]	[14]	Ours	[7]	[13]	[14]	Ours	[7]	[13]	[14]	Ours
IA	0.927	0.954	0.928	0.956	0.916	0.954	0.924	0.958	0.909	0.948	0.921	0.959
IB	0.939	0.942	0.940	0.940	0.919	0.945	0.945	0.946	0.932	0.944	0.941	0.947
IC	0.950	0.960	0.957	0.962	0.952	0.961	0.959	0.963	0.957	0.961	0.960	0.963
ID	0.941	0.951	0.948	0.952	0.943	0.951	0.952	0.954	0.946	0.953	0.952	0.954
IE	0.917	0.921	0.925	0.923	0.917	0.928	0.925	0.929	0.920	0.930	0.927	0.931
IF	0.911	0.912	0.912	0.914	0.914	0.916	0.917	0.919	0.914	0.918	0.921	0.920

Table 5. The average running time of each algorithm**表 5.** 各算法的平均运行时间

Image	Peak = 200				Peak = 255				Peak = 300			
	[7]	[13]	[14]	Ours	[7]	[13]	[14]	Ours	[7]	[13]	[14]	Ours
IA	23.84	62.15	38.03	60.85	28.42	64.03	36.42	61.69	29.13	71.92	36.72	62.74
IB	19.69	42.64	25.42	42.03	20.37	43.06	26.32	42.05	20.14	51.06	25.63	50.28
IC	20.25	53.17	25.35	53.83	20.21	55.31	26.31	54.92	20.13	55.79	26.59	55.50
ID	20.02	38.48	30.45	37.15	20.29	41.07	30.77	39.17	20.04	53.28	30.81	50.80
IE	17.82	41.89	23.23	40.70	17.87	40.98	21.87	40.42	16.89	37.81	20.85	37.21
IF	30.70	90.29	45.02	81.89	30.45	78.62	44.78	81.64	30.24	76.64	44.02	81.44

从表 5 各算法运行时间对比结果来看, 在同一情况下的复原所需要的时间, 本文提出的算法要较高于文献[7]、文献[14]所需要的运行时间, 原因在于本文模型引入超拉普拉斯先验和重叠组稀疏约束, 以及一阶二阶梯度混合约束, 模型复杂程度上略有提高, 所以运行时间有所增加, 但是从客观评价指标 PSNR、SSIM 以及主观视觉效果可以看出, 该计算代价换取了更好的噪声抑制和细节保留的能力。该部分的时间开销是可以接受的。

所以综合主观视觉和客观评价两个方面来看, 本文提出的基于混合梯度与稀疏先验的图像复原算法对有效复原含有泊松噪声的退化图像是一种有效的解决方法。

5. 结论

本文所设计的基于混合梯度与稀疏先验的复原算法, 能够有效应对泊松噪声与图像模糊的联合退化问题, 在医学成像、光学探测等受泊松噪声影响的成像领域具有一定的理论参考价值与实际应用潜力。未来可进一步优化模型的泛化能力, 拓展至其他类型图像、动态图像与多模态数据的复原任务中。

基金项目

长春光华学院“励新”计划项目, LXJH2026013。

参考文献

- [1] Zhang, C., Jin, W. and Yen, K.S. (2025) An Unsupervised Denoising Model for Poisson Noise Using GSURE-Driven Deep Image Prior with Multi-Order Regularization for Medical Imaging. *The Visual Computer*, **42**, Article No. 96. <https://doi.org/10.1007/s00371-025-04320-x>
- [2] Kollem, S., Reddy, K.R. and Rao, D.S. (2023) A Novel Diffusivity Function-Based Image Denoising for MRI Medical Images. *Multimedia Tools and Applications*, **82**, 32057-32089. <https://doi.org/10.1007/s11042-023-14457-3>
- [3] Le, T., Chartrand, R. and Asaki, T.J. (2007) A Variational Approach to Reconstructing Images Corrupted by Poisson Noise. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **27**, 257-263. <https://doi.org/10.1007/s10851-007-0652-y>
- [4] Figueiredo, M.A.T. and Bioucas-Dias, J.M. (2010) Restoration of Poissonian Images Using Alternating Direction Optimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, **19**, 3133-3145. <https://doi.org/10.1109/tip.2010.2053941>
- [5] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-f](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-f)
- [6] Chan, T., Marquina, A. and Mulet, P. (2001) High-Order Total Variation-Based Image Restoration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **22**, 503-516. <https://doi.org/10.1137/s1064827598344169>
- [7] Chowdhury, M.R., Qin, J. and Lou, Y. (2020) Non-Blind and Blind Deconvolution under Poisson Noise Using Fractional-Order Total Variation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **62**, 1238-1255. <https://doi.org/10.1007/s10851-020-00987-0>

-
- [8] Yin, M., Adam, T., Paramesran, R., *et al.* (2022) An L_0 -Overlapping Group Sparse Total Variation for Impulse Noise Image Restoration. *Signal Processing: Image Communication*, **102**, Article 116620. <https://doi.org/10.1016/j.image.2021.116620>
 - [9] Adam, T., Paramesran, R., Mingming, Y. and Ratnavelu, K. (2021) Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Impulse Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **80**, 18503-18530. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-10583-y>.
 - [10] Lv, X., Jiang, L. and Liu, J. (2016) Deblurring Poisson Noisy Images by Total Variation with Overlapping Group Sparsity. *Applied Mathematics and Computation*, **289**, 132-148. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.03.029>
 - [11] Shi, M., Han, T. and Liu, S. (2016) Total Variation Image Restoration Using Hyper-Laplacian Prior with Overlapping Group Sparsity. *Signal Processing*, **126**, 65-76. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.11.022>
 - [12] Liu, X.W. and Lian, W.H. (2022) Restoration of Poissonian Images Using Nonconvex Regularizer with Overlapping Group Sparsity. *Informatica*, **33**, 573-592. <https://doi.org/10.15388/22-infor480>
 - [13] Jon, K., Liu, J., Lv, X. and Zhu, W. (2021) Poisson Noisy Image Restoration via Overlapping Group Sparse and Non-convex Second-Order Total Variation Priors. *PLOS ONE*, **16**, e0250260. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0250260>
 - [14] Adam, T., Paramesran, R. and Ratnavelu, K. (2022) A Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Poisson Noise Removal. *Computational and Applied Mathematics*, **41**, Article No. 130. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-01828-z>