

变分不等式与不动点问题的惯性类Mann次梯度外梯度算法

冷震北

重庆对外经贸学院数学与计算机科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年8月29日; 录用日期: 2026年9月22日; 发布日期: 2026年9月30日

摘要

本文在实Hilbert空间中提出一种新的惯性次梯度外梯度算法, 用于求解变分不等式与拟非扩张映射不动点问题的公共解。该算法融合三类技术策略: 其一, 采用惯性加速步对历史迭代信息进行外推, 以提升收敛速率; 其二, 借助凸函数的次梯度信息构造包含可行集的半空间, 将投影算子从复杂可行集转移至结构简单的半空间, 有效降低每轮迭代的计算成本; 其三, 引入类Mann迭代格式生成新的迭代点, 增强算法对拟非扩张映射的适应性。步长通过线性搜索过程自适应获取, 无需预知映射的Lipschitz常数。在映射单调且Lipschitz连续、拟非扩张映射在零点处半闭等标准假设下, 建立了算法的弱收敛性。与现有算法相比, 本文方法在保持理论保证的同时, 通过次梯度投影策略显著减少了计算负担。数值实验验证了该算法相较于文献中相关算法的有效性与竞争力。

关键词

惯性次梯度外梯度算法, 类Mann迭代, 变分不等式, 弱收敛

Inertial Mann-Type Subgradient Extragradient Algorithm for Variational Inequalities and Fixed Point Problems

Zhenbei Leng

School of Mathematics and Computer Science, Chongqing College of International Business and Economics, Chongqing

Received: August 29, 2026; accepted: September 22, 2026; published: September 30, 2026

Abstract

This paper proposes a novel inertial subgradient extragradient algorithm in real Hilbert spaces for

finding a common solution to variational inequalities and fixed point problems of quasi-nonexpansive mappings. The algorithm integrates three key strategies: (i) an inertial extrapolation step that leverages historical iteration information to accelerate convergence; (ii) a half-space constructed via subgradient information of the convex function, which replaces the projection onto the original feasible set and substantially reduces computational cost per iteration; and (iii) a Mann-type update scheme that enhances adaptability to quasi-nonexpansive mappings. The step size is adaptively determined by a line search procedure, eliminating the need for prior knowledge of the Lipschitz constant. Under standard assumptions—including monotonicity and Lipschitz continuity of the mapping, and demiclosedness at zero of the quasi-nonexpansive mapping—weak convergence of the proposed algorithm is established. Compared with existing methods, the proposed approach significantly alleviates computational burden through the subgradient projection strategy while retaining theoretical guarantees. Numerical experiments demonstrate its effectiveness and competitiveness against recent algorithms in the literature.

Keywords

Inertial Subgradient Extragradient Algorithm, Mann-Type Iteration, Variational Inequality, Weak Convergence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 H 是实 Hilbert 空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 中的内积与范数. 关于变分不等式问题: 求 $x^* \in C$ 满足

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C, \quad (1)$$

其中 $F: H \rightarrow H$ 为映射, 可行集 C 是 H 中的非空闭凸子集. 记问题(1)的解集为 $SOL(F, C)$.

变分不等式是非线性分析非常重要分支, 与最优化理论及互补问题等有紧密联系. 近年来, 大量工作关注于发展高效和可实现的数值方法, 包括投影方法及其变体, 详见参考文献[1]-[12]. 当可行集结构复杂或投影难以计算时, 外梯度算法的效果显著减弱. 为简化投影操作文献[13] [14]提出了一种投影和收缩法, 其算法形式如下:

$$y_n = P_C(x_n - \tau_n F(x_n)),$$

然后通过以下方法生成下一个迭代的 x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \eta_n d(x_n, y_n),$$

其中 $\lambda \in (0, 2)$

$$\eta_n = \frac{\langle x_n - y_n, d(x_n, y_n) \rangle}{\|d(x_n, y_n)\|^2},$$

$d(x_n, y_n)$ 如下

$$d(x_n, y_n) = x_n - y_n - \tau_n (F(x_n) - F(y_n)),$$

$\tau_n \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$ 或者通过下面方式获取:

$$\tau_n \|F(x_n) - F(y_n)\| \leq \mu \|x_n - y_n\|, \mu \in (0, 1). \quad (2)$$

外梯度算法的改进为 Censor [15]等人提出次梯度外梯度算法(SEA), 在该算法中, 将可行集 C 上的第二个投影替换为一个包含 C 的简单可构造集上的投影, 新的迭代点 x_{n+1} :

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda F(x_n)), \\ T_n := \{\omega \in H : \langle x_n - \lambda F(x_n) - y_n, \omega - y_n \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda F(y_n)), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\lambda \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$ 。

另一方面, 关于不动点问题, 即求 $x \in H$, 使得 $Sx = x$, 则称点 x 为 S 的不动点。记 $\text{Fix}(S)$ 为 S 不动点解集。

为了在 Hilbert 中寻找 $\text{Fix}(S)$ 和(1)的解集 $\text{SOL}(F, C)$ 的一个公共解, 人们提出了许多迭代方法, 见 [16]-[20]和其他的参考文献。例如 Thong, [20]等提出如下算法:

$$\begin{cases} y_n = P_C(\omega_n - \lambda_n F(\omega_n)), \\ z_n = P_{T_n}(\omega_n - \lambda_n F(y_n)), \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n S z_n, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\omega_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1})$, $T_n := \{x \in H : \langle x_n - \lambda F(\omega_n) - y_n, x - y_n \rangle \leq 0\}$ 。步长 $\tau_n = \gamma l^{m_n}$, $\gamma > 0, l > 0, m_n$ 为满足下式:

$$\tau_n \|F(\omega_n) - F(y_n)\| \leq \mu \|\omega_n - y_n\|$$

其中 $\mu > 0$ 。算法(4)在映射是单调且 L -Lipschitz 时, 生成的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $\text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C)$ 。该算法应用了惯性加速技巧, 并利用线搜索过程选取步长, 无需计算 Lipschitz 常数。

当问题(1)的可行集具有以下结构时:

$$C := \{x \in H : c(x) \leq 0\}, \quad (5)$$

其中 $c: H \rightarrow R$ 是一个凸函数, He, Wu [21]在 Hilbert 空间提出了一种新的算法用于求解问题(1):

$$\begin{cases} y_n = P_{C_n}(x_n - \lambda_n F(x_n)), \\ C_n := \{\omega \in H : c(x_n) + \langle c'(x_n), \omega - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n F(y_n)), \\ T_n := \{\omega \in H : \langle x_n - \lambda_n F(x_n) - y_n, \omega - y_n \rangle \leq 0\}, \end{cases} \quad (6)$$

在适当的假设下, 作者验证了该算法弱收敛性。

近年来, 诸多学者开始采用次梯度法、惯性加速法及 Mann 迭代法等快速迭代策略。在文献[20][21]的基础上, 本文发展了一类融合线性搜索机制的惯性外梯度次梯度投影方法, 其可行集合如式(5)所示。该算法避免了对可行集进行直接投影操作, 转而借助次梯度信息构造半空间以替代原投影步骤, 从而显著简化了计算过程。同时, 文中给出了算法在 Hilbert 空间下的弱收敛性证明。数值实验结果说明, 与文献[20][21]中所提方法相比, 本算法在性能上具有更优表现。

2. 预备知识

本节回顾一些基本定理和定义。记为 $x_n \rightarrow x$ 为序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x ，记 $x_n \rightharpoonup x$ 为序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x 。

定义 2.1 [22] 假设 $F: H \rightarrow H$ ， C 是 H 非空闭凸子集：

(1) 如果 F 在 C 上是单调映射，则有

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in C.$$

(2) $F: H \rightarrow H$ 并且 $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ 在 C 上是拟非扩张映射，若

$$\|F(x) - u\| \leq L \|x - u\|, \forall x \in C, u \in \text{Fix}(F).$$

引理 2.1 [23] 假设 C 是 H 非空闭凸子集，对 $\forall x \in H$ ，有以下结论：

(1) $\langle P_C(x) - x, y - P_C(x) \rangle \geq 0, \forall y \in C$ ，

(2) $\|y - P_C(x)\|^2 \leq \|y - x\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2, \forall y \in C$ ，

(3) $\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 = \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2, \forall \alpha \in R, y \in H$ 。

引理 2.2 [24] 若 $x \in H$ ，对任意 $\{x_n\} \subset H$ 弱收敛到 x ，则有

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_n - y\|, \forall x \neq y.$$

引理 2.3 [25] 假设问题(1)的解集 $SOL(F, C)$ 非空且 C 是由(5)式定义，则 $u \in SOL(F, C)$ 当且仅当一下条件中的一个成立：

(1) $F(u) = 0$ ；

(2) $u \in \partial C$ 且存在一个正常数 η 满足 $F(u) = -\eta c'(u)$ 。

定义 2.2 [26] 设 $S: H \rightarrow H$ 是一个非线性算子且 $\text{Fix}(S) \neq \emptyset$ ，若对任意的序列 $\{x_n\} \in H$ 有以下关系成立：

$$x_n \rightharpoonup x \text{ 且 } (I - S)x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x \in \text{Fix}(S),$$

则称 $I - S$ 在 0 点处是半闭的。

引理 2.4 [27] 假设 $\{\varphi_n\}, \{\delta_n\}, \{\alpha_n\}$ 是 $[0, +\infty)$ 数列满足

$$\varphi_{n+1} \leq \alpha_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \delta_n, \forall n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < +\infty,$$

且对 $\forall n \geq 1$ 存在实数 α 使得 $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$ ，则下列结论成立：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n - \varphi_{n-1}]_+ < +\infty$ ，其中 $[t]_+ := \max\{t, 0\}$ ；

(2) 存在 $\varphi^* \in [0, +\infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi^*$ 。

引理 2.5 [27] (Opail) 假设 C 是 H 的一个非空闭子集，序列 $\{x_n\} \in H$ 满足以下两个条件：

(1) 对于 $\forall x \in C$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$ 存在；

(2) 序列 $\{x_n\}$ 的每一个弱收敛点在 C 中，

则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 C 中的一个点。

3. 具有线搜索的惯性梯度外梯度算法

本节提出了一种算法，使用增加了一个惯性加速技术，使算法更快找到问题的解。在映射为单调的

假设下, 所提出算法生成的序列弱收敛于 $\text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C)$ 。

本文假设以下条件成立:

(C1) 映射 $F: H \rightarrow H$ 是单调 L -Lipschitz 连续的。

(C2) 映射 $S: H \rightarrow H$ 是拟非扩张映射。

(C3) 解集非空, 即 $\text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C) \neq \emptyset$ 。

(C4) 可行集 C 是由(5)式定义。

(C5) 存在 $L_2 > 0$ 使得 $\|F(x)\| \leq L_2 \|c'(x)\|, \forall x \in \partial C$, 其中 ∂C 表示 C 的边界。

(C6) 假设序列 α_n, β_n 是两个非减的序列且分别满足 $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < \frac{1}{3}, 0 < \beta \leq \beta_n \leq \frac{1}{2}$ 。

本文算法结构如下。

3.1. 惯性类 Mann 次梯度外梯度算法

初始化: 设任意 $x_0, x_1 \in H$ 与参数 $\gamma > 0, l \in (0, 1), \mu \in (0, 1), \alpha_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \beta_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 设 $n = 1$ 。

step1: 设 $\omega_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1})$, 计算

$$y_n = P_{C_n}(\omega_n - \lambda_n F(x_n)),$$

其中 $C_n = \{x \in H : c(\omega_n) + \langle c'(\omega_n), x - \omega_n \rangle \leq 0\}, \lambda_n = \gamma l^{m_n}, m_n$ 满足下式最小整数

$$\lambda_n^2 \|F(x_n) - F(y_n)\|^2 + 2M\lambda_n \|\omega_n - y_n\|^2 \leq \mu \|\omega_n - y_n\|^2, \quad (7)$$

其中 $M = L_1 L_2$ 。

step2: 计算

$$z_n = P_{T_n}(\omega_n - \lambda_n F(y_n)),$$

其中 $T_n = \{x \in H : \langle \omega_n - \lambda_n F(x_n) - y_n, x - y_n \rangle \leq 0\}$,

step3: 计算

$$x_{n+1} = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n S z_n,$$

注 1: (1) $C \subseteq C_n, \forall n \geq 1$ 。对任意的 $x \in C$, 有 $c(\omega_n) + \langle c'(\omega_n), x - \omega_n \rangle \leq c(x) \leq 0$ 。因此, $x \in C_n$, 从而有 $C \subseteq C_n$ 。(2) $C \subseteq T_n, \forall n \geq 1$ 。事实上, 假设存在 $z \in C_n \setminus T_n$, 则有 $\langle \omega_n - \lambda_n F(x_n) - y_n, z - y_n \rangle > 0$ 与 $y_n = P_{C_n}(\omega_n - \lambda_n F(x_n))$ 矛盾。因此 $C_n \subseteq T_n$ 。

注 2: 基于假设 C6 的参数设置参考文中(26)与(32)式, 为了使其两式成立, 因为设置参数的范围以保证本文的合理性。

3.2. 收敛性分析

引理 3.1 假设(C1~C6)成立。令 $\{\omega_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 是由算法 3.1 生成的序列, 对任意 $u \in \text{SOL}(F, C)$, 则有下列不等式成立:

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - (1 - \mu) \|\omega_n - y_n\|^2, \quad (8)$$

证明: 因为 $u \in \text{SOL}(F, C) \subseteq C \subseteq T_n$, 由 x_{n+1} 的定义有

$$\begin{aligned}
\|z_n - u\|^2 &\leq \|\omega_n - \lambda_n F(y_n) - u\|^2 - \|\omega_n - \lambda_n F(y_n) - z_n\|^2 \\
&= \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - z_n\|^2 + 2\lambda_n \langle F(y_n), u - z_n \rangle \\
&= \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 \\
&\quad - 2\langle \omega_n - y_n, y_n - z_n \rangle + 2\lambda_n \langle F(y_n), u - z_n \rangle \\
&= \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 + 2\lambda_n \langle F(y_n), u - y_n \rangle \\
&\quad + 2\lambda_n \langle F(y_n), u - z_n \rangle - 2\langle \omega_n - y_n, y_n - z_n \rangle \\
&= \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 + 2\lambda_n \langle F(y_n), u - y_n \rangle \\
&\quad + 2\langle \omega_n - \lambda_n F(x_n) - y_n, z_n - y_n \rangle + 2\lambda_n \langle F(x_n) - F(y_n), z_n - y_n \rangle.
\end{aligned} \tag{9}$$

由 T_n 的定义及事实 $z_n \subseteq C_n, C_n \in T_n$ 可知

$$\langle \omega_n - \lambda_n F(x_n) - y_n, z_n - y_n \rangle \leq 0. \tag{10}$$

由(9)与(10)式整理可得

$$\begin{aligned}
\|z_n - u\|^2 &\leq \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n \langle F(y_n), u - y_n \rangle + 2\lambda_n \langle F(x_n) - F(y_n), z_n - y_n \rangle.
\end{aligned} \tag{11}$$

因为 F 是单调的, 即 $\langle F(u) - F(y_n), u - y_n \rangle \geq 0$ 可知

$$\langle F(y_n), u - y_n \rangle \leq \langle F(u), u - y_n \rangle. \tag{12}$$

因此由(11)与(12)式整理可得

$$\begin{aligned}
\|z_n - u\|^2 &\leq \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n \langle F(u), u - y_n \rangle + 2\lambda_n \langle F(x_n) - F(y_n), z_n - y_n \rangle.
\end{aligned} \tag{13}$$

下面估计 $2\lambda_n \langle F(x_n) - F(y_n), z_n - y_n \rangle$, 由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$2\lambda_n \langle F(x_n) - F(y_n), z_n - y_n \rangle \leq 2\lambda_n \|F(x_n) - F(y_n)\| \|z_n - y_n\|. \tag{14}$$

将(14)式代入(13)式中整理得

$$\begin{aligned}
\|z_n - u\|^2 &\leq \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n \|F(x_n) - F(y_n)\| \|z_n - y_n\| + 2\lambda_n \langle F(u), u - y_n \rangle.
\end{aligned} \tag{15}$$

由 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 知

$$2\lambda_n \|F(x_n) - F(y_n)\| \|z_n - y_n\| - \|z_n - y_n\|^2 \leq \lambda_n^2 \|F(x_n) - F(y_n)\|^2. \tag{16}$$

结合上述不等式与(15)式可得

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 + \lambda_n^2 \|F(x_n) - F(y_n)\|^2 + 2\lambda_n \langle F(u), u - y_n \rangle. \tag{17}$$

若 $F(u) \neq 0$, 则由引理 2.3(2)知有 $F(u) = -\eta_u c'(u)$, 并且 $u \in \partial C$, $c(x)$ 是连续的, 从而 $c(u) = 0$. 因为 $c(x)$ 是凸函数, 则有

$$c(y_n) \geq c(u) + \langle c'(u), y_n - u \rangle = -\frac{1}{\eta_u} \langle F(u), y_n - u \rangle.$$

因此有

$$\langle F(u), u - y_n \rangle \leq \eta_u c(y_n). \quad (18)$$

由 C_n 的定义与 $y_n \in C_n$ 可得

$$c(\omega_n) + \langle c'(\omega_n), y_n - \omega_n \rangle \leq 0.$$

由 $c(x)$ 的凸性有

$$\langle c'(y_n), \omega_n - y_n \rangle + c(y_n) \leq c(\omega_n).$$

结合以上两个不等式有

$$c(y_n) \leq \langle c'(\omega_n) - c'(y_n), \omega_n - y_n \rangle. \quad (19)$$

从而由 Cauchy-Schwartz 不等式与假设(B4)整理(18), (19)式可知

$$\begin{aligned} \langle F(u), u - y_n \rangle &\leq \eta_u c(y_n) \leq \eta_u \langle c'(\omega_n) - c'(y_n), \omega_n - y_n \rangle \\ &\leq \eta_u \|c'(\omega_n) - c'(y_n)\| \|\omega_n - y_n\| \\ &\leq \eta_u L_1 \|\omega_n - y_n\|^2. \end{aligned}$$

另一方面, 由引理 2.3(2)与假设(C5)有 L_2 式 η_u 的一个上界, 结合上述不等式可得

$$\langle F(u), u - y_n \rangle \leq \eta_u L_1 \|\omega_n - y_n\|^2 \leq M \|\omega_n - y_n\|^2. \quad (20)$$

其中 $M = L_1 L_2 > 0$, 结合(17)与(20)式有

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 + \lambda_n^2 \|F(x_n) - F(y_n)\|^2 + 2\lambda_n M \|\omega_n - y_n\|^2 \quad (21)$$

结合算法 3.1 中(7)式与(21)式整理有

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - (1 - \mu) \|\omega_n - y_n\|^2.$$

如果 $F(u) = 0$, 由(17)式知

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - \|\omega_n - y_n\|^2 + \lambda_n^2 \|F(x_n) - F(y_n)\|^2.$$

再由(7)式有

$$\lambda_n^2 \|F(x_n) - F(y_n)\|^2 \leq \mu \|\omega_n - y_n\|^2.$$

因此由以上两个不等式可知

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - (1 - \mu) \|\omega_n - y_n\|^2.$$

综上引理 3.1 成立。

引理 3.2 若假设条件(C1~C6)成立。设为由算法 3.1 生成的序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{\omega_n\}$, 则对任意, 下列结论恒成立。

$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ 并且序列 $\{\|x_n - u\|\}$ 的极限存在;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|y_n - z_n\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \|S z_n - z_n\| = 0;$$

序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{\omega_n\}$ 与 $\{c'(\omega_n)\}$ 为有界序列;

序列 $\{x_n\}$ 的弱聚点属于 $\text{Fix}(S)$ 。

证明 (1) 假设 $u \in \text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C)$ 由引理 3.1 可知

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2. \quad (22)$$

因为 S 为拟非扩张映射

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\|^2 &= \|(1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n Sz_n - u\|^2 \\ &= \|(1 - \beta_n)(\omega_n - u) + \beta_n(Sz_n - u)\|^2 \\ &= (1 - \beta_n)\|\omega_n - u\|^2 + \beta_n\|Sz_n - u\|^2 - (1 - \beta_n)\beta_n\|Sz_n - \omega_n\|^2 \\ &\leq (1 - \beta_n)\|\omega_n - u\|^2 + \beta_n\|z_n - u\|^2 - (1 - \beta_n)\beta_n\|Sz_n - \omega_n\|^2 \\ &\leq (1 - \beta_n)\|\omega_n - u\|^2 + \beta_n\|\omega_n - u\|^2 - (1 - \beta_n)\beta_n\|Sz_n - \omega_n\|^2 \\ &= \|\omega_n - u\|^2 - (1 - \beta_n)\beta_n\|Sz_n - \omega_n\|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

其中由(22)知第二个不等式成立。

另外由 x_{n+1} 的定义知

$$Sz_n - \omega_n = \frac{1}{\beta_n}(x_{n+1} - \omega_n). \quad (24)$$

由(24)、(23)式有

$$\|x_{n+1} - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - \frac{1 - \beta_n}{\beta_n}\|x_{n+1} - \omega_n\|^2. \quad (25)$$

由假设(C6)有 $\beta_n \leq \frac{1}{2}$, 因此有 $\frac{1 - \beta_n}{\beta_n} \geq 1$, 从而下列不等式成立

$$\|x_{n+1} - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - \|x_{n+1} - \omega_n\|^2. \quad (26)$$

下面由 ω_n 的定义知

$$\begin{aligned} \|\omega_n - u\|^2 &= \|x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) - u\|^2 \\ &= \|(1 + \alpha_n)(x_n - u) - \alpha_n(x_{n-1} - u)\|^2 \\ &= (1 + \alpha_n)\|x_n - u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1} - u\|^2 + (1 + \alpha_n)\alpha_n\|x_n - x_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

另一方面有不等式

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \omega_n\|^2 &= \|x_{n+1} - x_n - \alpha_n(x_n - x_{n-1})\|^2 \\ &= \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \alpha_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 - 2\alpha_n\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1} \rangle \\ &\geq \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \alpha_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 - 2\alpha_n\|x_{n+1} - x_n\|\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\geq (1 - \alpha_n)\|x_{n+1} - x_n\|^2 + (\alpha_n^2 - \alpha_n)\|x_n - x_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

通过(26)与(27), (28)式整理可得

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-u\|^2 &= (1+\alpha_n)\|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 + (1+\alpha_n)\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\
&\quad - (1-\alpha_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2 - (\alpha_n^2-\alpha_n)\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\
&= (1+\alpha_n)\|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2 \\
&\quad + [\alpha_n(1+\alpha_n) - (\alpha_n^2-\alpha_n)]\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\
&= (1+\alpha_n)\|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\
&\leq (1+\alpha_{n+1})\|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{29}$$

因此由(29)式可得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-u\|^2 - \alpha_{n+1}\|x_n-u\|^2 + 2\alpha_{n+1}\|x_{n+1}-u\|^2 \\
&\leq \|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 + 2\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_{n+1}\|x_{n+1}-x_n\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2.
\end{aligned} \tag{30}$$

令 $\Phi_n = \|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 + 2\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|^2$ ，从而有

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n \leq -(1-\alpha_n-2\alpha_{n+1})\|x_{n+1}-x_n\|^2. \tag{31}$$

由假设(C6) $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < \frac{1}{3}$ ，从而有 $1-\alpha_n-2\alpha_{n+1} > 0$ ，因此有

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n \leq -\sigma\|x_{n+1}-x_n\|^2 \leq 0. \tag{32}$$

其中 $\sigma = 1-3\alpha > 0$ ，即序列 Φ_n 是非增的，由其定义知

$$\begin{aligned}
\Phi_n &= \|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 + 2\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\
&\geq \|x_n-u\|^2 - \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2.
\end{aligned} \tag{33}$$

从而由(33)式可得

$$\begin{aligned}
\|x_n-u\|^2 &\leq \alpha_n\|x_{n-1}-u\|^2 + \Phi_n \\
&\leq \alpha\|x_n-u\|^2 + \Phi_1 \\
&\leq \alpha^2\|x_n-u\|^2 + \Phi_1(1+\alpha) \\
&\leq \dots \leq \alpha^n\|x_0-u\|^2 + \Phi_1(1+\alpha+\dots+\alpha^{n-1}) \\
&\leq \alpha^n\|x_0-u\|^2 + \frac{\Phi_1}{1-\alpha}.
\end{aligned} \tag{34}$$

另一方面由 Φ_{n+1} 可知

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1} &= \|x_{n+1}-u\|^2 - \alpha_{n+1}\|x_n-u\|^2 + 2\alpha_{n+1}\|x_{n+1}-x_n\|^2 \\
&\geq -\alpha_{n+1}\|x_n-u\|^2.
\end{aligned} \tag{35}$$

结合(34)与(35)式可得

$$-\Phi_{n+1} \leq \alpha_{n+1}\|x_n-u\|^2 \leq \alpha\|x_n-u\|^2 \leq \alpha^{n+1}\|x_0-u\|^2 + \frac{\alpha\Phi_1}{1-\alpha}.$$

由上述不等式与(32)式有

$$\begin{aligned}\sigma \sum_{n=1}^k \|x_{n+1} - x_n\|^2 &\leq \Phi_1 - \Phi_{k+1} \\ &\leq \alpha^{k+1} \|x_0 - u\|^2 + \frac{\Phi_1}{1-\alpha} \\ &\leq \|x_0 - u\|^2 + \frac{\Phi_1}{1-\alpha}.\end{aligned}\quad (36)$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty. \quad (37)$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 = 0$ ，由此可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ 。

因为 α_n 有界，通过(29)式有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u\|^2 &\leq (1 + \alpha_n) \|x_n - u\|^2 - \alpha_n \|x_{n-1} - u\|^2 + 2\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &= \|x_n - u\|^2 + \alpha_n (\|x_n - u\|^2 - \|x_{n-1} - u\|^2) + 2\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\|^2.\end{aligned}\quad (38)$$

由引理 2.5 与(37)式知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - u\|^2 = p,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ 存在。

由(1)知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ ，则

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - \omega_n\| &= \|x_{n+1} - x_n - \alpha_n (x_n - x_{n-1})\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \alpha \|x_n - x_{n-1}\|.\end{aligned}\quad (39)$$

对(39)式两边同时取极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - \omega_n\| = 0. \quad (40)$$

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - u\|^2 = p$ ，对(26)式取极限并且结合 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 = 0$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - u\|^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - u\|^2 = p. \quad (41)$$

另外由(23)式的第一个不等式有

$$\|x_{n+1} - u\|^2 \leq (1 - \beta_n) \|\omega_n - u\|^2 + \beta_n \|z_n - u\|^2.$$

从而可得

$$\|z_n - u\|^2 \geq \frac{\|x_{n+1} - u\|^2 - \|\omega_n - u\|^2}{\beta_n} + \|\omega_n - u\|^2.$$

因为 β_n 有界，并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - u\|^2 = p$ ，所以由上述不等式有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|z_n - u\|^2 \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - u\|^2.$$

再通过(22)与(41)式和上述不等式, 因此有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|z_n - u\|^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - u\|^2. \quad (42)$$

由(11)式可得

$$(1-\mu)\|\omega_n - y_n\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - \|z_n - u\|^2. \quad (43)$$

结合(42)式有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\|^2 = 0$, 因此有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\| = 0. \quad (44)$$

通过不等式 $\|x_{n+1} - y_n\| \leq \|x_{n+1} - \omega_n\| + \|\omega_n - y_n\|$, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0$, 同理再结合不等式 $\|x_n - y_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - y_n\|$, 由(1)的结论有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (45)$$

对(7)式两边取极限可得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(y_n)\|^2 = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(y_n)\| = 0. \quad (46)$$

另外结合(42)式与(46)式以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\|^2 = 0$, 对(21)式两边取极限, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|z_n - y_n\| = 0. \quad (47)$$

由(45)式与(47)式以及不等式 $\|x_n - z_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - z_n\|$, 因此可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0. \quad (48)$$

因为 $\beta_n \geq \beta$, 则由(24)式有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|S z_n - x_n\| = 0$, 再结合(48)式可得

$$\|S z_n - z_n\| \leq \|S z_n - x_n\| + \|x_n - z_n\| \rightarrow 0. \quad (49)$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|S z_n - z_n\| = 0$.

接下来证明各序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{\omega_n\}$ 和 $\{c'(\omega_n)\}$ 是有界的。事实上, 对于 $u \in \text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C)$, 由(1)结论知序列 $\{\|x_n - u\|\}$ 的极限存在, 进而可知 $\{x_n\}$ 有界。又因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ 知序列 $\{y_n\}, \{\omega_n\}$ 有界。由于 $c'(\omega_n)$ 是 Lipschitz 连续以及序列 $\{\omega_n\}$ 有界, 则结论成立。

因为 $\{x_n\}$ 是有界, 存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 和 $x^* \in H$, 使得 $x_{n_k} \rightharpoonup x^*$ 。由(45)式有 $y_{n_k} \rightharpoonup x^*$, 同理结合(44)式 $\omega_{n_k} \rightharpoonup x^*$, 通过(47)式可得 $z_{n_k} \rightharpoonup x^*$ 。根据(48)式与 $I - S$ 半闭性, 因此 $x^* \in \text{Fix}(S)$ 。

引理 3.3 如果算法 3.1 中 $\omega_n = x_{n+1} = z_n$ 成立, 则有 $\omega_n \in \text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C)$ 。

证明 取 $u \in \text{Fix}(S) \cap \text{SOL}(F, C)$, 通过引理 3.1 有

$$\|z_n - u\|^2 \leq \|\omega_n - u\|^2 - (1-\mu)\|\omega_n - y_n\|^2$$

由于 $\omega_n = z_n$, 从而 $\|\omega_n - y_n\| = 0$, 即 $\omega_n = y_n$, 因此 $y_n = P_{C_n}(y_n - \lambda_n F(y_n))$, 从而 $y_n \in C_n$ 。由 C_n 的定义, $y_n \in C_n$ 以及 $\omega_n = y_n$ 可得

$$c(y_n) = c(y_n) + \langle c'(y_n), y_n - y_n \rangle \leq 0$$

因此 $y_n \in C$ 。

下面证明 $y_n \in SOL(F, C)$, 由 $y_n = P_{C_n}(y_n - \lambda_n F(y_n))$ 可得

$$\langle y_n - \lambda_n F(y_n) - y_n, y - y_n \rangle \leq 0, \forall y \in C_n.$$

因此有

$$\lambda_n \langle F(y_n), y - y_n \rangle \geq 0, \forall y \in C_n.$$

又根据注 1 可知 $C \subseteq C_n$, 且 $\lambda_n > 0$, 故有

$$\langle F(y_n), y - y_n \rangle \geq 0, \forall y \in C_n.$$

所以 $y_n \in SOL(F, C)$ 。又由 $\omega_n = y_n$, 则有 $\omega_n \in SOL(F, C)$ 。另一方面, 如果 $\omega_n = x_{n+1} = z_n$, 通过步骤 3 知 $\omega_n = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n S\omega_n$, 因此 $S\omega_n = \omega_n$, 即 $\omega_n \in Fix(S)$, 所以 $\omega_n \in Fix(S) \cap SOL(F, C)$ 。

定理 3.1 若假设条件(C1-C6)成立, 则由算法 3.1 生成的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $SOL(F, C)$ 。

证明 由引理 3.2(3)知序列 $\{x_n\}$ 是有界的。因此存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \rightharpoonup x^*$ 。结合(3)中知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ 有子列 $\{y_{n_k}\}, \{\omega_{n_k}\}$ 也弱收敛到 x^* 。由半空间 C_{n_k} 定义与 $y_{n_k} \in C_{n_k}$ 可得

$$c(\omega_{n_k}) + \langle c'(\omega_{n_k}), y_{n_k} - \omega_{n_k} \rangle \leq 0.$$

由引理 3.2(3) $\{c'(\omega_n)\}$ 是有界, 从而知存在 $M > 0$ 满足 $\|c'(\omega_n)\| \leq M$ 。由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$c(\omega_{n_k}) \leq \|c'(\omega_{n_k})\| \|y_{n_k} - \omega_{n_k}\| \leq M \|y_{n_k} - \omega_{n_k}\|. \quad (50)$$

有假设(C4)知 $c(x)$ 是连续的, 因此 $c(x)$ 弱下半连续。结合(50)式与 $\omega_{n_k} \rightharpoonup x^*$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_{n_k} - y_{n_k}\| = 0$, 由定义 2.4 可知

$$c(x^*) \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} c(\omega_{n_k}) \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} M \|\omega_{n_k} - y_{n_k}\| = 0,$$

则由 C 的定义知 $x^* \in C$ 。

下面证明 $x^* \in SOL(F, C)$, 令

$$T(x) := \begin{cases} F(x) + N_C(x) & x \in C; \\ \emptyset & x \notin C, \end{cases}$$

其中 $N_C(x)$ 为 C 在 x 处的法锥, 即 $N_C(x) := \{\varepsilon \in H : \langle \varepsilon, z - x \rangle \leq 0, \forall z \in C\}$ 。因为 T 是极大单调算子, 则有

$$y \in T(x) = F(x) + N_C(x),$$

以上关系等价于

$$y - F(x) \in N_C(x),$$

则由 $N_C(x)$ 的定义及 $x^* \in C$ 可得

$$\langle y - F(x), x^* - x \rangle \leq 0, (x, y) \in gra T.$$

整理可得

$$\langle y, x - x^* \rangle \geq \langle F(x), x - x^* \rangle, (x, y) \in gra T. \quad (51)$$

由 T_n 的定义以及 $x \in C \subseteq T_n$ 可得

$$\langle \omega_n - \lambda_n F(x) - y_n, x - y_n \rangle \leq 0,$$

又因为 $\lambda_n > 0$ ，则通过以上不等式整理有

$$\left\langle \frac{\omega_n - y_n}{\lambda_n} - F(x), x - y_n \right\rangle \leq 0. \quad (52)$$

结合(51)与(52)式可得

$$\begin{aligned} \langle y, x - x^* \rangle &\geq \langle F(x), x - x^* \rangle + \left\langle \frac{y_{n_k} - \omega_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + F(x), y_{n_k} - x \right\rangle \\ &= \langle F(x), x - y_{n_k} + y_{n_k} - x^* \rangle + \left\langle \frac{y_{n_k} - \omega_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + F(x), y_{n_k} - x \right\rangle \\ &= \langle F(x), x - y_{n_k} \rangle + \langle F(x), y_{n_k} - x^* \rangle \\ &\quad + \left\langle F(x_{n_k}), y_{n_k} - x \right\rangle + \left\langle \frac{y_{n_k} - \omega_{n_k}}{\lambda_{n_k}}, y_{n_k} - x \right\rangle \\ &= \langle F(x) - F(y_{n_k}), x - y_{n_k} \rangle + \langle F(y_{n_k}) - F(x_{n_k}), x - y_{n_k} \rangle \\ &\quad + \langle F(x_{n_k}), y_{n_k} - x \rangle + \left\langle \frac{y_{n_k} - \omega_{n_k}}{\lambda_{n_k}}, y_{n_k} - x \right\rangle \\ &\geq \langle F(x), y_{n_k} - x^* \rangle + \langle F(y_{n_k}) - F(x_{n_k}), x - y_{n_k} \rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{y_{n_k} - \omega_{n_k}}{\lambda_{n_k}}, y_{n_k} - x \right\rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

其中由 F 的单调性知第二个不等式成立。因此有

$$\begin{aligned} \langle y, x - x^* \rangle &\geq \langle F(x), y_{n_k} - x^* \rangle + \langle F(y_{n_k}) - F(x_{n_k}), x - y_{n_k} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{n_k}} \langle y_{n_k} - \omega_{n_k}, y_{n_k} - x \rangle. \end{aligned} \quad (54)$$

另外由引理 3.3(2)知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\omega_n - y_n\| = 0$ ，及序列 $\{y_n\}$ 有界，从而有

$$\langle y_{n_k} - \omega_{n_k}, y_{n_k} - x \rangle \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (55)$$

因为 F 是 Lipschitz 连续，由引理 3.2(2)知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ 以及 $\{y_n\}$ 有界，因此有

$$\langle F(y_{n_k}) - F(x_{n_k}), x - y_{n_k} \rangle \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (56)$$

因为由引理 3.2 知 $y_{n_k} \rightharpoonup x^*$ ，所以

$$\langle F(x), y_{n_k} - x \rangle \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (57)$$

通过(55)~(57)式，并且对(54)式取极限可得

$$\langle y, x - x^* \rangle \geq 0, \forall (x, y) \in \text{gra} T.$$

由于 T 为极大单调算子，因此由上述不等式可得 $0 \in T(x^*)$ ，从而 $x^* \in T'(0) = \text{SOL}(F, C)$ 。

若序列 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{m_k}\}$ 分别弱收敛于弱聚点 $x^*, \bar{x} \in SOL(F, C)$, 对任意 $x^* \in SOL(F, C)$ 。通过引理 3.2 知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| &= \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x^*\| = \liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x^*\| \\ &< \liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{x}\| = \liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{x}\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_m - \bar{x}\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \bar{x}\| \\ &< \liminf_{x \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x^*\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - x^*\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|. \end{aligned}$$

因此有不等式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| < \lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 不成立, 故与假设矛盾, 所以 $x^* = \bar{x}$ 。综上 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x^* \in SOL(F, C)$ 。

定理 3.2 若假设条件(C1-C6)成立, 由算法 3.1 生成的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $Fix(S) \cap SOL(F, C)$ 。

证明 由引理 3.2(1)知对任意 $u \in Fix(S) \cap SOL(F, C)$ 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ 的极限存在。通过定理 3.1 可知有 $x_{n_k} \rightharpoonup x^* \in SOL(F, C)$, 结合引理 3.2(4)有 $x^* \in Fix(S)$, 从而有 $x \in Fix(S) \cap SOL(F, C)$ 。因此由引理 2.7 知 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $Fix(S) \cap SOL(F, C)$ 。

3.3. 数值结果

本节通过一个具体的数值算例, 验证算法 3.1 (记为 A3.1)的有效性, 并与文献[20]中的算法 2 (记为 A2)及文献[21]中的算法 1 (记为 A1)进行对比。所有实验均在配置为 AMD Ryzen 7 4700U @ 2.0 GHz、16 GB 内存的笔记本电脑上, 使用 MATLAB R2021b 实现。终止准则统一设为

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq 10^{-7}$$

迭代次数上限设为 2000。运行时间以 CPU 秒(s)为单位, 迭代次数记为 Iter。

例 3.1 设实 Hilbert 空间为 R^2 , 定义映射为 $R^2 \rightarrow R^2$ 为:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ -x_1 + x_2 + \sin x_2 \end{pmatrix},$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T$ 。可行集 C 由凸函数

$$c(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0。$$

定义, 即 $C = \{x \in R^2 : \|x\| \leq 1\}$ 。容易验证容易验证 F 在 C 上是单调且 Lipschitz 连续的。取拟非扩张映射 $S: R^2 \rightarrow R^2$ 分别为

$$S_1(x) = \frac{x}{2}, S_2(x) = \frac{x}{3}。$$

显然 S_1, S_2 均为拟非扩张映射, 且不动点集分别为 $\{0\}$, 公交解 $Fix(S) \cap SOL(F, C) = \{0\}$ 。

不同精度下的比较结果, 其中 $S_1(x) = \frac{x}{2}$, 见图 1。

不同精度下的比较结果见图 2, 其中 $S_2(x) = \frac{x}{3}$ 。

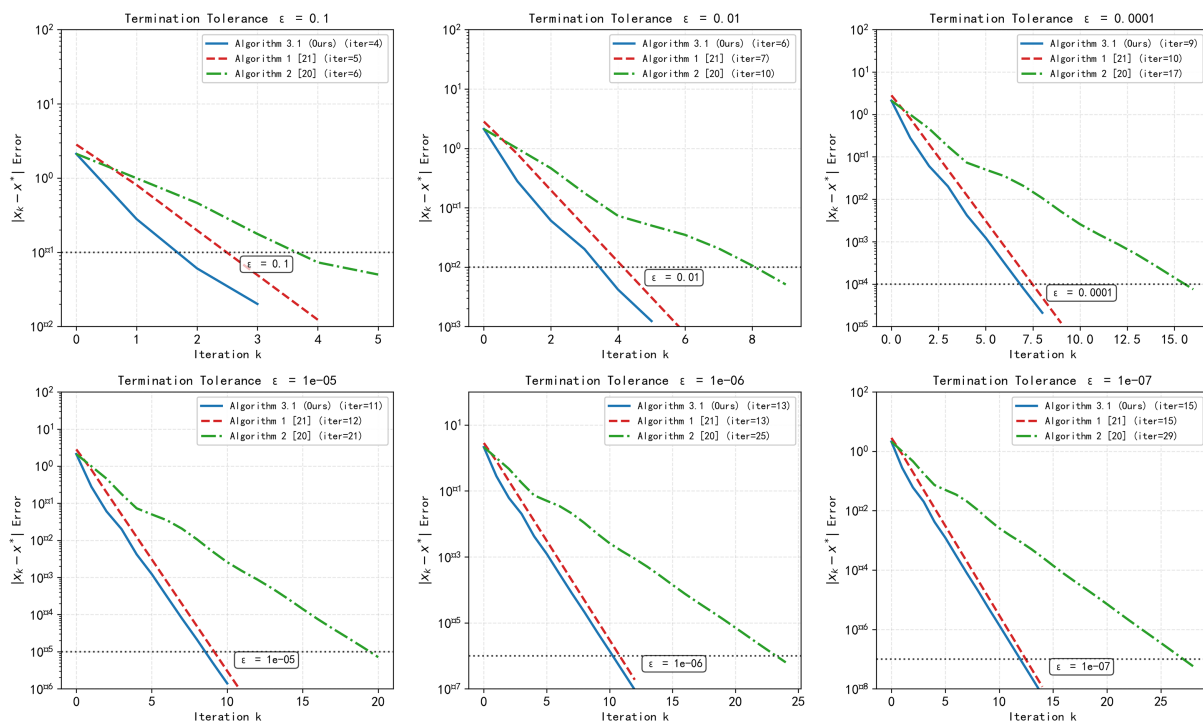


Figure 1. Convergence comparison at different tolerances ($S = S_1$)

图 1. 不同精度下的收敛性比较($S = S_1$)

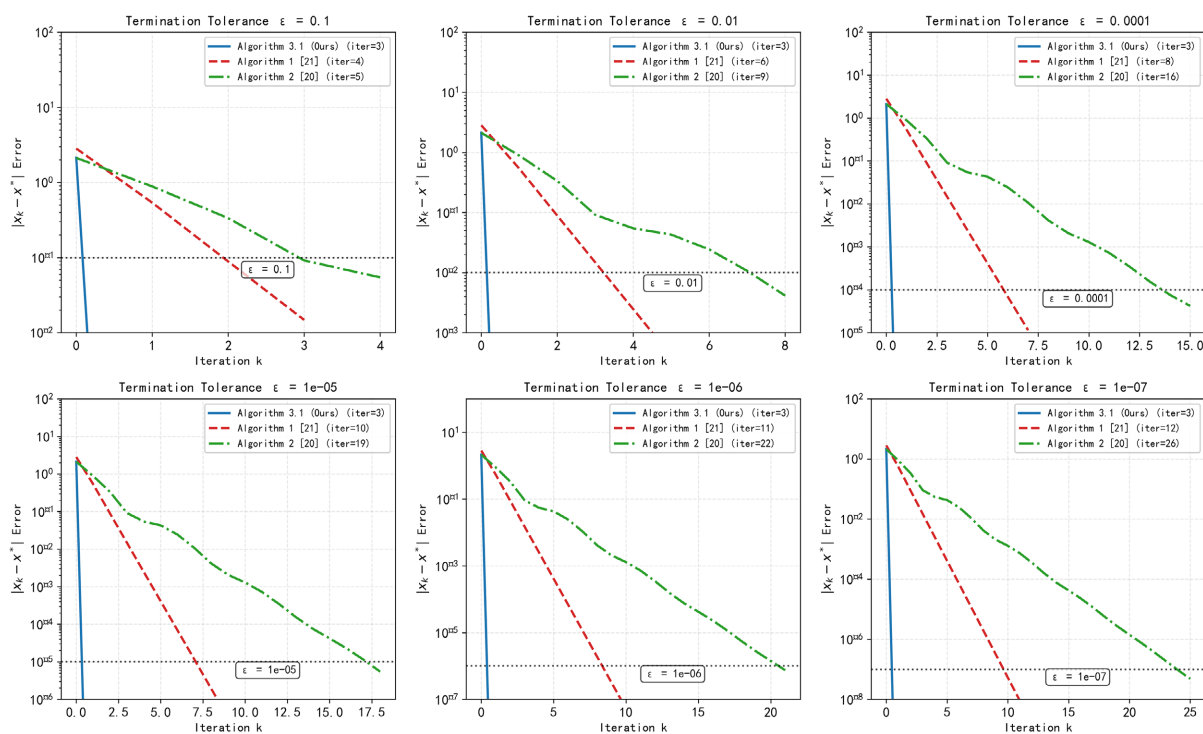


Figure 2. Convergence comparison at different tolerances ($S = S_2$)

图 2. 不同精度下的收敛性比较($S = S_2$)

数值实验以例 3.1 为测试问题，两种拟非扩张映射，与相关文献[20] [21]系统比较。实验结果表明：

- (1) 在较低精度要求(0.001)下, 本文算法在 CPU 时间上与文献[20]相当, 明显优于文献[21];
- (2) 在较高精度要求(0.00001)下, 本文算法的 CPU 时间相比文献[20]减少约 44%~58%, 相比文献[21]减少约 65%~70%;
- (3) 当拟非扩张映射从 S_1 更换为 S_2 时, 本文算法的迭代次数增幅小于对比算法;
- (4) 本文算法虽然迭代次数略多于文献[20], 但每步计算成本更低, 总 CPU 时间显著减少, 验证了半空间投影策略在降低计算负担方面的有效性。

基金项目

- 项目资助 1: KYZK2024003 校级;
 项目资助 2: KJQN202502003 重庆市教委科技项目;
 项目资助 3: KJQN202602004 重庆市教委科技项目。

参考文献

- [1] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer.
- [2] Van Huy, P., Hien, N.D. and Anh, T.V. (2020) A Strongly Convergent Modified Halpern Subgradient Extragradient Method for Solving the Split Variational Inequality Problem. *Vietnam Journal of Mathematics*, **48**, 187-204. <https://doi.org/10.1007/s10013-019-00378-y>
- [3] Yang, J., Liu, H. and Li, G. (2019) Convergence of a Subgradient Extragradient Algorithm for Solving Monotone Variational Inequalities. *Numerical Algorithms*, **84**, 389-405. <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00759-x>
- [4] Xie, Z., Cai, G., Li, X. and Dong, Q. (2021) Strong Convergence of the Modified Inertial Extragradient Method with Line-Search Process for Solving Variational Inequality Problems in Hilbert Spaces. *Journal of Scientific Computing*, **88**, Article No. 50. <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01585-x>
- [5] Censor, Y., Gibali, A. and Reich, S. (2012) Extensions of Korpelevich's Extragradient Method for the Variational Inequality Problem in Euclidean Space. *Optimization*, **61**, 1119-1132. <https://doi.org/10.1080/02331934.2010.539689>
- [6] Shan, Z., Zhu, L., Wang, Y. and Yin, T. (2022) Modified Mann-Type Inertial Subgradient Extragradient Methods for Solving Variational Inequalities in Real Hilbert Spaces. *Filomat*, **36**, 1557-1572. <https://doi.org/10.2298/fil2205557s>
- [7] Malitsky, Y. (2015) Projected Reflected Gradient Methods for Monotone Variational Inequalities. *SIAM Journal on Optimization*, **25**, 502-520. <https://doi.org/10.1137/14097238x>
- [8] Maingé, P.E. and Gobindass, M.L. (2016) Convergence of One-Step Projected Gradient Methods for Variational Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **171**, 146-168. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0972-4>
- [9] Alber, Y.I. and Iusem, A.N. (2001) Extension of Subgradient Techniques for Nonsmooth Optimization in Banach Spaces. *Set-Valued Analysis*, **9**, 315-335. <https://doi.org/10.1023/a:1012665832688>
- [10] Yang, J., Liu, H. and Liu, Z. (2018) Modified Subgradient Extragradient Algorithms for Solving Monotone Variational Inequalities. *Optimization*, **67**, 2247-2258. <https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1523404>
- [11] Wang, Y.Q., Fang, X.L., Guan, J.L. and Kim, T.H. (2020) On Split Null Point and Common Fixed Point Problems for Multivalued Demicontractive Mappings. *Optimization*, **70**, 1121-1140.
- [12] Korpelevich, G.M. (1976) An Extragradient Method for Finding Saddle Points and for Other Problems. *Ekonomika i Matematicheskie Metody*, **12**, 747-756. <https://zbmath.org/0342.90044>
- [13] He, B. (1997) A Class of Projection and Contraction Methods for Monotone Variational Inequalities. *Applied Mathematics & Optimization*, **35**, 69-76. <https://doi.org/10.1007/bf02683320>
- [14] Sun, D. (1996) A Class of Iterative Methods for Solving Nonlinear Projection Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **91**, 123-140. <https://doi.org/10.1007/bf02192286>
- [15] Censor, Y., Gibali, A. and Reich, S. (2010) The Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **148**, 318-335. <https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3>
- [16] Halpern, B. (1967) Fixed Points of Nonexpanding Maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 957-961. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1967-11864-0>
- [17] Shehu, Y. and Choleamjiak, P. (2015) Another Look at the Split Common Fixed Point Problem for Demicontractive Operators. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **110**, 201-218.

- <https://doi.org/10.1007/s13398-015-0231-9>
- [18] Tan, B., Fan, J. and Qin, X. (2021) Inertial Extragradient Algorithms with Non-Monotonic Step Sizes for Solving Variational Inequalities and Fixed Point Problems. *Advances in Operator Theory*, **6**, Article No. 61. <https://doi.org/10.1007/s43036-021-00155-0>
 - [19] Kraikaew, R. and Saejung, S. (2013) Strong Convergence of the Halpern Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **163**, 399-412. <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0494-2>
 - [20] Thong, D.V. and Hieu, D.V. (2018) Inertial Subgradient Extragradient Algorithms with Line-Search Process for Solving Variational Inequality Problems and Fixed Point Problems. *Numerical Algorithms*, **80**, 1283-1307. <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0527-x>
 - [21] He, S. and Wu, T. (2017) A Modified Subgradient Extragradient Method for Solving Monotone Variational Inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, **2017**, Article No. 89. <https://doi.org/10.1186/s13660-017-1366-3>
 - [22] Hiriart-Urruty, J.B. and Lemarechal, C. (2001) Fundamentals of Convex Analysis. Springer.
 - [23] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2011) Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer.
 - [24] Opial, Z. (1967) Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 591-597. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1967-11761-0>
 - [25] Ye, M. (2018) An Improved Projection Method for Solving Generalized Variational Inequality Problems. *Optimization*, **67**, 1523-1533. <https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1478971>
 - [26] Rockafellar, R.T. (1970) On the Maximality of Sums of Nonlinear Monotone Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **149**, 75-88. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1970-0282272-5>
 - [27] He, S. and Xu, H. (2012) Uniqueness of Supporting Hyperplanes and an Alternative to Solutions of Variational Inequalities. *Journal of Global Optimization*, **57**, 1375-1384. <https://doi.org/10.1007/s10898-012-9995-z>