

引入法向一致性约束的多尺度邻域漂移点云法向估计算法

于佳鑫

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年8月21日; 录用日期: 2026年9月14日; 发布日期: 2026年9月22日

摘要

法向量能够描述点云的局部结构, 是点云处理中一项重要的几何属性。因此, 快速准确地估计法向量是十分关键的。现有基于多尺度邻域漂移的方法通过评估候选邻域的平坦度和空间距离筛选最优邻域, 在光滑区域和简单特征上表现良好。然而, 该类方法忽略了候选邻域法向与当前点初始法向的一致性, 导致在尖锐特征附近容易误选跨越不同曲面的邻域, 估计误差较大。因此, 本文引入法向一致性约束, 对现有算法进行改进, 以提高尖锐特征附近法向估计的准确性和可靠性。实验表明, 本文方法能够提升最优邻域的筛选效果, 有效降低尖锐特征附近的法向估计误差, 对形状较为复杂的模型表现出更好的鲁棒性。

关键词

法向估计, 邻域漂移, 最优邻域

Point Cloud Normal Estimation via Multi-Scale Neighborhood Shift with a Normal Consistency Constraint

Jiaxin Yu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: August 21, 2026; accepted: September 14, 2026; published: September 22, 2026

Abstract

Normal vectors describe the local structure of point clouds and are an important geometric attribute in point cloud processing. Therefore, a fast and accurate normal estimation is crucial. Existing

文章引用: 于佳鑫. 引入法向一致性约束的多尺度邻域漂移点云法向估计算法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(9): 184-198.
DOI: 10.12677/aam.2026.159384

methods based on multi-scale neighborhood shift select the optimal neighborhood by evaluating the flatness and spatial distance of candidate neighborhoods. These methods perform well on smooth regions and simple features. However, such methods ignore the consistency between the normals of candidate neighborhoods and the initial normal of the current point. This easily leads to the incorrect selection of neighborhoods that cross different surfaces near sharp features, resulting in large estimation errors. Therefore, this paper introduces a normal consistency constraint to improve existing algorithms, thereby enhancing the accuracy and reliability of normal estimation near sharp features. Experimental results show that the proposed method can improve the effectiveness of the optimal neighborhood selection and effectively reduce normal estimation errors near sharp features. Furthermore, it exhibits better robustness to models with more complex shapes.

Keywords

Normal Estimation, Neighborhood Shift, Optimal Neighborhood

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

点云是三维空间中的离散点集，用于表示物体或场景的表面几何信息。随着各种三维激光扫描仪的普及与发展，点云的获取变得越来越方便。然而，扫描所得点云仅包含点的空间位置信息，且常伴有噪声、采样不均匀等问题，缺乏法向等局部表面几何属性。法向量作为点云的重要几何属性之一，在点云的重建、渲染以及特征检测和提取等工作中有着重要作用[1]。高质量的法向信息能够显著提升点云后续处理的准确性和鲁棒性。因此，研究高质量的点云法向估计方法仍是一项关键任务。

近些年，学者们提出了多种点云法向估计的方法，大致可分为以下几类：基于 Voronoi/Delaunay 的算法[2]-[5]、基于法向修正的算法[6]-[10]、基于局部邻域拟合的算法[11]-[14]。

基于 Voronoi/Delaunay 的算法[2]-[5]通常先对点云进行 Delaunay 三角剖分，从而建立点与点之间的拓扑邻接关系，然后在该拓扑结构的基础上估计每个点的法向量。但是这类方法仅对无噪声点云或小噪声点云效果良好，处理含有离群点和尖锐特征点云存在一定困难[15]。

基于法向修正的算法[6]-[10]是一类对于初始法向进行优化的法向估计算法。Jones 等人[6]提出了一种基于双边滤波的点云法向优化算法。该算法通过迭代，将每个点的法向更新为其邻域内所有初始法向的双边滤波加权平均，以此优化法向。Calderon 等人[7]提出了一种局部邻域重组算法(Normal Estimation with Neighborhood Reorganization, NENR)。该算法根据初始法向，先逐步迭代优化近邻点，然后基于重组后的邻域重新计算法向。Han 等人[10]提出迭代引导法向滤波方法，该方法反复以当前法向场为引导，应用双边滤波对法向进行迭代修正，从而提升法向估计质量。然而，这类算法需依赖良好的初始法向，并且迭代优化的过程以及许多参数的调节在实际应用中都较为繁琐[16]。

基于局部邻域拟合的算法[11]-[14]是当前研究最为广泛的一类方法。该类方法最早由 Hoppe 等人[11]提出，利用主成分分析法(Principal Component Analysis, PCA)实现局部平面拟合，最终将拟合平面的法向作为该点的法向。PCA 方法在光滑曲面上能够得到较准确的法向。但是，当点位于尖锐特征附近时，其邻域点往往来自多个曲面，这使得拟合结果过度平滑，最终导致估计的法向不准确。随后许多学者在 PCA 方法的基础上展开研究。Pauly 等人[12]提出一种加权平面拟合方法，利用高斯函数为邻域点分配距离权重，距离当前点越近的邻域点权重越高，使该邻域点在平面拟合过程中发挥更大的作用。为了得到更好

的拟合效果,有学者提出将平面替换为其他曲面进行拟合。Cazals 等人[13]和 Guennebaud 等人[14]分别使用球面和二次曲面进行局部邻域的拟合。但是,这些方法选取的邻域依然是各向同性的,仍会导致尖锐特征处法向的过度光滑,法向估计的效果依旧不理想[17]。

为了使得参与拟合的邻域点与当前点来自同一个光滑曲面,各向异性的邻域选取开始被广泛研究。Mederos 等人[18]引入 M-估计器(M-estimator),为拟合残差较大的邻域点分配较低权重,降低其对平面拟合的影响。然而该方法需手动调节全局参数[19]。Li 等人[16]提出一种基于鲁棒统计的点云法向估计算法(Robust Normal Estimation, RNE),但是带宽参数的精确计算存在一定的困难[15],同时计算代价较高[19]。还有学者提出将各向同性的邻域进行分割。Zhang 等人[20]利用低秩子空间聚类(Low Rank Representation, LRR)对邻域进行分割。但是该方法的计算成本较高[21]。为此, Liu 等人[22]提出了 LRR 的加速版本(Fast Low Rank Representation, LRRfast)。Boulch 和 Marlet [23]提出了一种基于随机化 Hough 变换的鲁棒法向估计算法(Hough Transform, HF),该方法通过在邻域内随机采样三点构造候选平面,并采用三种不同策略投票选取最优切平面。然而,该算法在运行时需反复对法向空间进行离散化与投票,且不确定参数较多,导致计算成本较高[1]。

然而,这些算法均以当前点为中心构造邻域,对于尖锐特征处的点,其邻域不可避免地会包含来自多个曲面的点,会导致法向估计不够准确或计算成本较高等问题。为此,许多学者提出了多种基于邻域漂移的点云法向估计方法。该类方法不再以当前点为中心,而是以其邻域点为中心构造一个各向异性的邻域进行法向估计。

Cao 等人[24]受到图像滤波思想的启发,提出一种邻域漂移方法。针对尖锐特征附近的点,首先构造候选邻域集,其中候选邻域包含当前点但不以当前点为中心。然后对候选邻域进行整体评价,确定出一个既平坦又能够刻画当前点局部几何结构的邻域,用于法向估计。该方法与先前的邻域漂移方法相比,在候选邻域的构造以及邻域的评价准则上都有改进,能够提升尖锐特征处的法向估计质量。但对于候选邻域的筛选过于复杂,算法耗时较长,算法的可行性较差[25]。

为了降低计算成本,张杰等人[26]设计一种更高效的邻域漂移法向估计算法。该方法对候选邻域集的构造进行大幅简化,同时不再通过搜索来确定当前点是否在该邻域中,很大程度上提高了计算效率。但在候选邻域的选取时只选择单一尺度的邻域,这导致候选邻域的选择不够丰富,对于复杂模型和非均匀采样的处理效果不够好。同时,在最优邻域的评价中仅考虑邻域的“平坦程度”,筛选过程过于简单,在尖锐特征处容易选择错误的邻域进行法向估计[25]。

为解决张杰等人[26]的方法中存在的问题,黄明琪等人[25]对候选邻域集的构造和最优邻域的评价准则进行了创新。首先,黄明琪等人[25]设计了一种多尺度候选邻域集构造方法。其次,在最优邻域的评价准则中引入候选邻域与当前点的距离。该方法能够提高法向估计的质量,在一定程度上克服噪声和非均匀采样等问题。然而,黄明琪等人[25]提出的评价准则仍存在不足。该评价准则仅考虑了候选邻域的“平坦程度”和当前特征点与候选邻域拟合平面的距离,忽略了候选邻域法向与当前特征点初始法向的一致性。当候选邻域平坦且距离当前特征点较近,但其法向与当前特征点的初始法向偏差较大时,仍会导致较大的估计误差。

针对上述问题,本文对文献[25]中的方法进一步改进,对最优邻域的评价准则进行创新,在评价准则中引入法向一致性约束,将其与候选邻域的“平坦程度”和候选邻域拟合平面与当前特征点的距离进行加权组合。这一改进使得筛选的最优邻域不仅是平坦的,同时距离当前特征点较近,而且法向也与当前特征点的初始法向保持一致,从而有效减少了在尖锐特征区域因法向不一致导致的最优邻域的错误选择。实验表明,本文算法能够提升最优邻域的筛选效果,获得更准确的拟合平面,有效提高尖锐特征处的法向估计的准确性和可靠性,在复杂程度较高的模型上仍能保持较好的估计精度。

2. 本文算法

对于给定的噪声点云 $P = \{p_i\}_{i=1}^n$ (n 为采样点个数), 本文采用邻域漂移思想对其进行法向估计。本文算法对文献[25]中的方法进行改进, 在评价准则中引入法向一致性约束, 提升最优邻域的筛选效果, 进而提高尖锐特征处的法向估计质量。本文算法大致分为三步, 具体如下:

第一步: 点云预处理。首先利用 PCA 计算点云中每一点的初始法向, 再计算每一点局部邻域协方差矩阵的特征值, 借助特征值刻画各点与尖锐特征的远近程度, 将点分为平滑点和特征点。

第二步: 确定特征点的最优邻域。对于特征点 p_i , 首先构造其邻域, 使用文献[25]中的第一版多尺度候选邻域集构造方法得到特征点 p_i 的多尺度候选邻域集, 然后利用本文提出的评价准则在候选邻域集中确定一个最优邻域。

第三步: 输出最终法向。对于平滑点, 由 PCA 计算的初始法向即为最终法向; 对于特征点, 需在最优邻域内使用 PCA 重新估计法向, 即可得到最终法向。算法流程如图 1 所示。

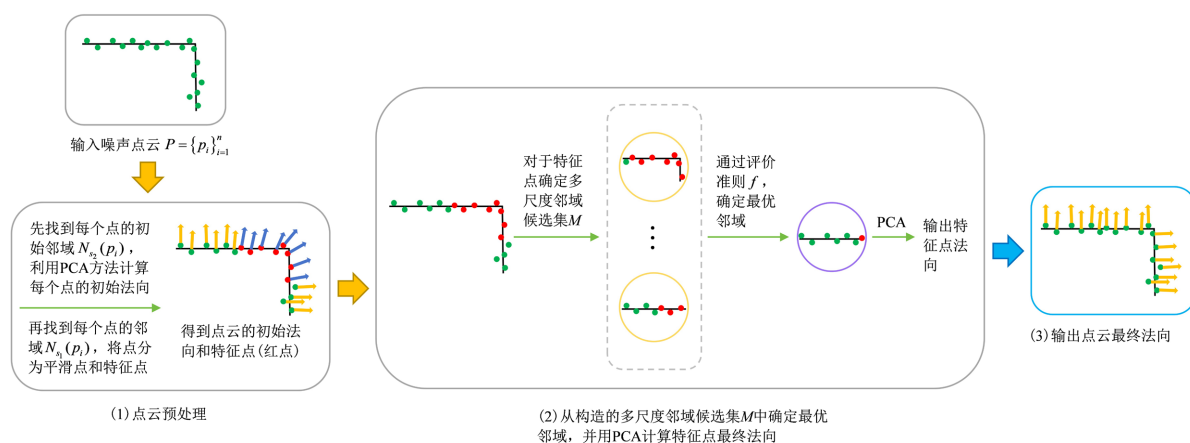


Figure 1. Algorithm procedure

图 1. 算法流程

2.1. 点云预处理

对于噪声点云 $P = \{p_i\}_{i=1}^n$ 中的任意一点 p_i , 首先找到其初始邻域 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i) = \{p_i^j | j=1, 2, \dots, S_2\}$ 。对于点 p_i 计算其初始邻域 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i)$ 的协方差矩阵, 协方差矩阵的定义为:

$$C_i = \frac{1}{S_2} \begin{bmatrix} p_i^1 - \bar{p}_i \\ \vdots \\ p_i^{S_2} - \bar{p}_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_i^1 - \bar{p}_i \\ \vdots \\ p_i^{S_2} - \bar{p}_i \end{bmatrix}^T, p_i^j \in \mathcal{N}_{S_2}(p_i), \quad (1)$$

其中, p_i^j 是初始邻域 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i)$ 中的邻域点, $\bar{p}_i$ 是邻域点的均值, $\times$ 是矩阵乘法。对协方差矩阵 C_i 进行特征分解

$$C_i v_m = \lambda_m v_m, m=1, 2, 3, \quad (2)$$

其中, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ 为协方差矩阵 C_i 的特征值, v_1, v_2, v_3 是对应的单位特征向量。则点 p_i 的初始法向 n_i^0 为最小特征值 λ_1 对应的单位特征向量。

然后, 对于点 p_i , 找到邻域 $\mathcal{N}_{S_1}(p_i) = \{p_i^j | j=1, 2, \dots, S_1\}$, 计算其协方差矩阵, 得到特征值 $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ 。点 p_i 的特征权重 ω_i 定义为:

$$\omega_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}. \quad (3)$$

点的特征权重 ω_i 的大小代表了该点处于尖锐特征处的可能性。当 ω_i 较小时, 说明该点距离尖锐特征处较远; 当 ω_i 较大时, 说明该点距离尖锐特征处较近。在本文算法中设定阈值 ω , 若 $\omega_i > \omega$, 则将点 p_i 认定为特征点; 否则, 将点 p_i 认定为平滑点。

本文中, 使用文献[24]中基于 L_1 趋势滤波的自适应阈值选取方法, 对阈值 ω 进行自动取值。将特征权重集合 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 归一化至 $[0,1]$ 区间, 并等分为 t 个小区间(本文实验设置 $t=50$)。记 F_ω 为特征权重集合 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 的分布函数, 并通过求解公式(4)的最小化问题对 F_ω 进行平滑处理:

$$\overline{F_\omega} = \arg \min_{\overline{F_\omega}} \left\| \overline{F_\omega} - F_\omega \right\|_F + \varepsilon \left\| D \overline{F_\omega} \right\|_1, \quad (4)$$

其中, $\varepsilon=0.5$ 是正则化参数, D 是一阶差分矩阵, $\|\cdot\|_F$ 为 F 范数, $\|\cdot\|_1$ 为 L_1 范数。将阈值 ω 定义为 F_ω 第一个峰值出现后的平缓点, 用来区分平滑点与特征点。

2.2. 确定特征点的最优邻域

本节中主要内容是为特征点确定最优邻域, 该过程分为两步: 首先构造特征点的候选邻域集(见 2.2.1 节), 然后从邻域集中筛选出最优邻域(见 2.2.2 节)。在本节最后, 针对初始法向在尖锐特征处的不确定性及其潜在影响进行分析(见 2.2.3 节)。

2.2.1. 构造邻域集

对于特征点 p_i , 下面将 p_i 的邻域点作为中心, 构造多尺度的候选邻域, 进而得到候选邻域集。

为了使候选邻域距离特征点 p_i 更近, 本文中以 S_2 大小构造 p_i 的邻域 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i) = \{p_i^j | j=1, 2, \dots, S_2\}$ 。下面以 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i)$ 中的每一点为中心, 以 S_1 、 S_2 、 S_3 ($S_1 > S_2 > S_3$) 为三种邻域尺度构造候选邻域 $\mathcal{N}_{S_1}(p_i^j) = \{p_i^j(k) | k=1, 2, \dots, S_1\}$ 、 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i^j) = \{p_i^j(k) | k=1, 2, \dots, S_2\}$ 、 $\mathcal{N}_{S_3}(p_i^j) = \{p_i^j(k) | k=1, 2, \dots, S_3\}$ 。所有的候选邻域构成候选邻域集 M , 即

$$M = \{\mathcal{N}_{S_1}(p_i^1), \dots, \mathcal{N}_{S_1}(p_i^{S_2}), \mathcal{N}_{S_2}(p_i^1), \dots, \mathcal{N}_{S_2}(p_i^{S_2}), \mathcal{N}_{S_3}(p_i^1), \dots, \mathcal{N}_{S_3}(p_i^{S_2})\}. \quad (5)$$

具体如图 2 所示:

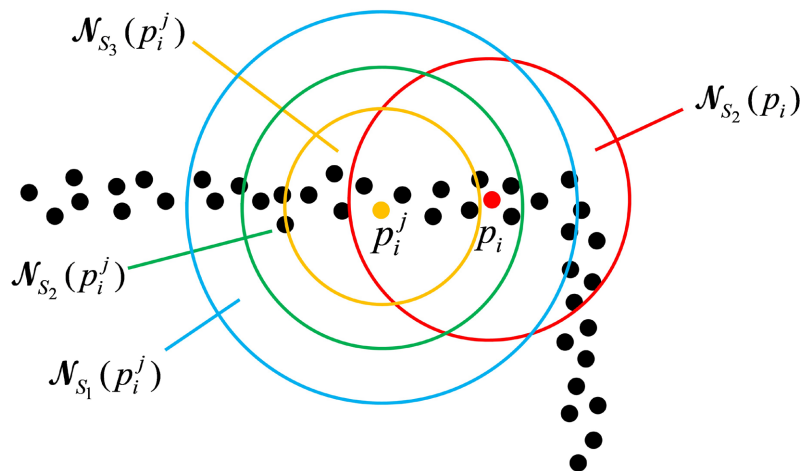


Figure 2. Schematic diagram of multi-scale candidate neighborhoods

图 2. 多尺度候选邻域示意图

在实验过程中, 设定 $S_2 = S_1/2$, $S_3 = S_1/4$ 。这样能提供更丰富的邻域选择, 更好地适应点云的几何特征, 提升最优邻域的选择效果, 进而使特征点 p_i 的法向估计结果更加准确。

2.2.2. 筛选最优邻域

下面从候选邻域集 M 中筛选出最优邻域 N^* 。

为了提升最优邻域 N^* 的筛选效果, 本文在文献[25]方法的评价准则的基础上引入法向一致性约束, 设计了一个新的评价准则。该准则从三个方面对候选邻域进行考察。

(1) 利用协方差矩阵对邻域的“平坦程度”进行分析。先使用公式(1)对 M 中每个候选邻域 $N_{s_r}(p_i^h)(r=1,2,3;h=1,2,\dots,S_2)$ 构造局部邻域的协方差矩阵, 然后利用公式(3)得到特征权重 $\omega(N_{s_r}(p_i^h))(r=1,2,3;h=1,2,\dots,S_2)$ 。由于特征权重值越小, 表明邻域越平坦, 拟合出的平面越能代表局部几何结构。因此, 在所有候选邻域中, 需选择特征权重较小的邻域。

(2) 对候选邻域的拟合平面与特征点 p_i 的“远近程度”进行考察。记 M 中的候选邻域 $N_{s_r}(p_i^h)(r=1,2,3;h=1,2,\dots,S_2)$ 的拟合平面构成的集合为 $\theta(N_{s_r}(p_i^h))(r=1,2,3;h=1,2,\dots,S_2)$ 。通过下面的公式计算拟合平面与当前点的距离:

$$d(N_{s_r}(p_i^h)) = \left| (p_i - p_i^h) \cdot \overline{v(\theta(N_{s_r}(p_i^h)))} \right|, r=1,2,3;h=1,2,\dots,S_2, \quad (6)$$

其中, p_i 为当前特征点, p_i^h 代表候选邻域的中心点, $\overline{v(\theta(N_{s_r}(p_i^h)))}$ 代表候选邻域拟合平面的法向, $\cdot$ 代表内积运算, $||$ 代表绝对值。该距离越小, 说明拟合平面越靠近特征点 p_i , 其法向量对 p_i 的局部特征的刻画越具有代表性。

(3) 对候选邻域拟合平面的法向与当前特征点 p_i 的初始法向的一致性进行考察。对于当前特征点 p_i , 定义公式(7)定量刻画法向的一致性:

$$c(N_{s_r}(p_i^h)) = 1 - \left| n_i^0 \cdot \overline{v(\theta(N_{s_r}(p_i^h)))} \right|, r=1,2,3;h=1,2,\dots,S_2, \quad (7)$$

其中, n_i^0 为当前特征点 p_i 的初始法向(在 2.1 节中已经计算), $\overline{v(\theta(N_{s_r}(p_i^h)))}$ 为候选邻域拟合平面的法向, $\cdot$ 代表内积运算, $||$ 代表绝对值。 $c(N_{s_r}(p_i^h))$ 值越小, 说明候选邻域对应的法向量与当前点的初始法向越接近, 二者的一致性越高, 就能够有效避免在尖锐特征处(边点或角点)选择错误曲面的平坦邻域作为最优邻域。

综合以上三个方面, 构造最终的评价准则为:

$$f(N_{s_r}(p_i^h)) = d(N_{s_r}(p_i^h)) + \alpha * \omega(N_{s_r}(p_i^h)) + \beta * c(N_{s_r}(p_i^h)), \quad (8)$$

其中, $r=1,2,3$, $h=1,2,\dots,S_2$, α 和 β 为权重参数, 用于平衡 $d(N_{s_r}(p_i^h))$, $\omega(N_{s_r}(p_i^h))$ 和 $c(N_{s_r}(p_i^h))$ 。最后, 使 f 取最小值的候选邻域即为最优邻域 N^* :

$$N^* = \arg \min_{r,h} f(N_{s_r}(p_i^h)). \quad (9)$$

2.2.3. 初始法向在尖锐特征处的不确定性及其潜在影响

在点云预处理(2.1 节)过程中, 当前特征点 p_i 的初始法向 n_i^0 由 PCA 方法拟合得到, 拟合时使用较小尺度的邻域 $\mathcal{N}_{s_2}(p_i) = \{p_i^j | j=1,2,\dots,S_2\}$ 。使用 S_2 大小的邻域目的在于: 相较于特征点检测时的较大邻域 $\mathcal{N}_{s_1}(p_i) = \{p_i^j | j=1,2,\dots,S_1\}$, 计算初始法向时使用邻域 $\mathcal{N}_{s_2}(p_i) = \{p_i^j | j=1,2,\dots,S_2\}$ 能够减小跨曲面点在

拟合过程中的影响,进而更好地保留几何细节。然而,对于尖锐特征处的点,即使使用 S_2 大小的邻域,在邻域内也依旧会存在其他曲面的点,使得拟合的初始法向 n_i^0 与真实法向方向存在较小偏差。

该偏差对于本文算法的潜在影响主要体现在 2.2.2 节筛选最优邻域的过程中。评价准则 f 中的法向一致性项中直接使用 n_i^0 作为参考方向。当该方向存在偏差时,候选邻域拟合平面的法向与特征点法向的一致性将无法准确反映出候选邻域的“质量”,也可能将某一错误邻域选为最优邻域,从而使 PCA 拟合的最终法向产生偏差。

但是,本文使用较小邻域 $\mathcal{N}_{S_2}(p_i) = \{p_i^j | j = 1, 2, \dots, S_2\}$ 计算初始法向,已经将初始法向 n_i^0 与真实法向方向的偏差有效降低,这使得后续的多尺度邻域的筛选更加可靠,有助于提高最终法向估计的精度。

2.3. 确定点云的最终法向

对于平滑点,其拟合邻域为光滑曲面,PCA 方法就可以得到较准确的法向量,因而将初始法向直接作为最终法向。对于特征点,其邻域往往由多个不同曲面构成,直接使用 PCA 方法难以得到准确有效的法向估计结果。因此,对特征点采用其最优邻域进行 PCA 估计,即可得到最终的准确法向。

3. 实验结果及分析

为了评估本文算法的性能,本节中将其与一些具有代表性的、前沿的法向估计算法进行比较。比较的算法分为两类:一类是基于邻域漂移思想的点云法向估计算法,包括 PatchShift [24]、ShiftPCA [26]、文献[25]中的四种方案,其中方案一、方案二、方案三、方案四分别记为 dCe_Cr、dCe_Cw、dTy_dr、dTy_dw;另一类是不使用邻域漂移思想的算法,包括 PCA [11]、RNE [16]、LRRFast [22]、PCV [15]、HF [23],其中 HF 分为三个版本,分别为 HF_points、HF_cubes、HF_unif,本文使用 HF_points 和 HF_cubes 进行比较。

本文在多种光滑曲面和尖锐特征的合成模型进行测试,所用模型均添加了均值为零的高斯噪声,标准差定义为点间平均距离的百分比,分别为 30%, 40%, 50%, 60%。

3.1. 参数的选择

本文算法中的参数主要有 5 个,分别为:

S_1 、 S_2 、 S_3 : 构造多尺度邻域集时选择的三种邻域尺度;

α 、 β : 评价准则中的两个权重参数。

在本文实验中,分别设置 $S_1 = 100$, $S_2 = 50$, $S_3 = 25$ 。由于阈值 α 和 β 值的变化会对实验结果产生较大的影响,所以 α 和 β 的大小需经过一系列调试确定。下面在噪声水平为 30% 的 Fandisk (77K)模型上进行实验,调试思路为固定 α 值,变动 β 值。调试结果如表 1~6 所示,加粗为最优值。经过对 RMS 值和 RMS_r 值(RMS 是均方根误差, RMS_r 是具有阈值的均方根误差,详细定义见 3.2 节)的综合考量,最终确定 $\alpha = 0.15$, $\beta = 0.06$ 。

Table 1. Normal estimation errors for varying β ($\alpha = 0.05$)

表 1. 变动 β 的法向估计误差($\alpha = 0.05$)

α	β	RMS	RMS_r
0.05	0.01	0.1027	0.1624
0.05	0.02	0.0934	0.1580
0.05	0.03	0.0926	0.1622

续表

0.05	0.04	0.0932	0.1740
0.05	0.05	0.0945	0.1916

Table 2. Normal estimation errors for varying β ($\alpha = 0.10$)**表 2.** 变动 β 的法向估计误差($\alpha = 0.10$)

α	β	RMS	RMS_{τ}
0.10	0.02	0.0957	0.1528
0.10	0.03	0.0925	0.1505
0.10	0.04	0.0912	0.1499
0.10	0.05	0.0900	0.1505
0.10	0.06	0.0902	0.1524

Table 3. Normal estimation errors for varying β ($\alpha = 0.15$)**表 3.** 变动 β 的法向估计误差($\alpha = 0.15$)

α	β	RMS	RMS_{τ}
0.15	0.04	0.0919	0.1495
0.15	0.05	0.0907	0.1480
0.15	0.06	0.0897	0.1473
0.15	0.07	0.0898	0.1479
0.15	0.08	0.0904	0.1497

Table 4. Normal estimation errors for varying β ($\alpha = 0.20$)**表 4.** 变动 β 的法向估计误差($\alpha = 0.20$)

α	β	RMS	RMS_{τ}
0.20	0.06	0.0913	0.1484
0.20	0.07	0.0898	0.1476
0.20	0.08	0.0907	0.1474
0.20	0.09	0.0898	0.1474
0.20	0.10	0.0903	0.1484

Table 5. Normal estimation errors for varying β ($\alpha = 0.25$)**表 5.** 变动 β 的法向估计误差($\alpha = 0.25$)

α	β	RMS	RMS_{τ}
0.25	0.08	0.0904	0.1478
0.25	0.09	0.0907	0.1478
0.25	0.10	0.0902	0.1472
0.25	0.11	0.0901	0.1472
0.25	0.12	0.0911	0.1483

Table 6. Normal estimation errors for varying β ($\alpha = 0.30$)
表 6. 变动 β 的法向估计误差 ($\alpha = 0.30$)

α	β	RMS	RMS_{τ}
0.30	0.09	0.0910	0.1482
0.30	0.10	0.0907	0.1476
0.30	0.11	0.0911	0.1480
0.30	0.12	0.0908	0.1477
0.30	0.13	0.0909	0.1479

为了最大程度上保证算法间比较的公平性，文献[25]中的四种方案的多尺度邻域设置为 $K_1 = 100$ ， $K_2 = 50$ ， $K_3 = 25$ ；ShiftPCA 的邻域尺度设置为 $k = 100$ ， $k^* = 50$ ；PatchShift 中候选邻域大小 $S = 100$ ；其他算法的邻域尺度大小设置为 100。算法中的其余相关参数均设定为默认值。

3.2. 评价函数

本文使用均方根误差 (RMS) [1]和具有阈值的均方根误差 (RMS_{τ}) [1]对法向估计的结果进行评估。均方根误差 (RMS) 用于衡量整体误差，定义如下：

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \langle n_{p,ref}, n_{p,est} \rangle^2}, \quad (10)$$

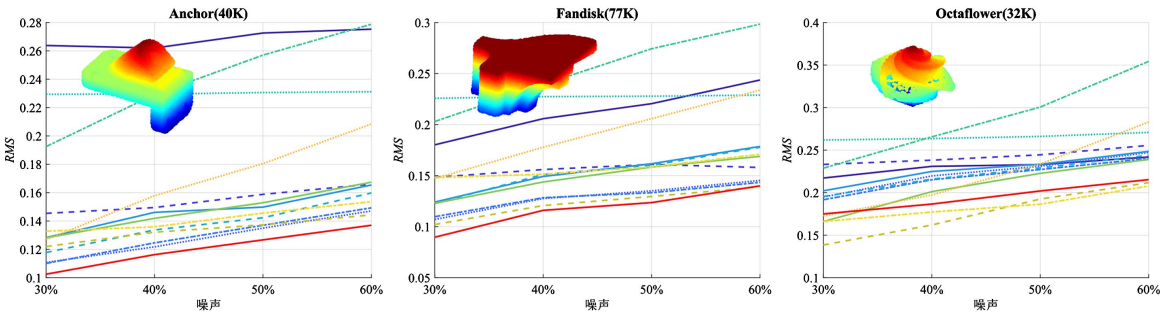
其中， P 是点云数据， $n_{p,ref}$ 是真实法向， $n_{p,est}$ 是估计法向， $\langle n_{p,ref}, n_{p,est} \rangle$ 是真实法向和估计法向之间的夹角。

具有阈值的均方根误差 (RMS_{τ}) 能够评估算法在尖锐特征处的表现，定义如下：

$$RMS_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} v_p^2}, \quad (11)$$

其中， $v_p = \begin{cases} \langle n_{p,ref}, n_{p,est} \rangle & \text{若 } \langle n_{p,ref}, n_{p,est} \rangle < \tau \\ \pi/2 & \text{否则} \end{cases}$ ， $\langle n_{p,ref}, n_{p,est} \rangle$ 是真实法向和估计法向之间的夹角。本文中设定 $\tau = 10^\circ$ 。当真实法向与估计法向之间的夹角大于 τ 时，认为估计结果不可靠，并将该点的夹角值设为 $\frac{\pi}{2}$ ，以此对这类大误差点施加惩罚。

3.3. 结果分析



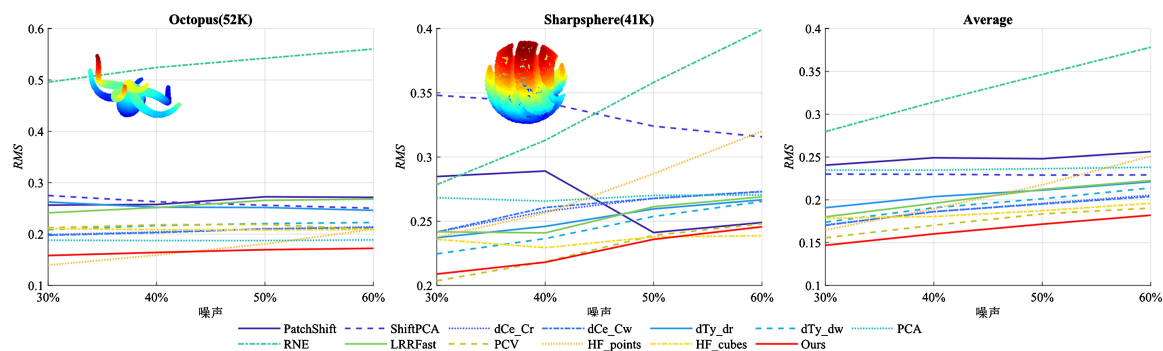


Figure 3. Variation of RMS with noise scale across different models

图 3. 不同模型上 RMS 值随噪声尺度的变化情况

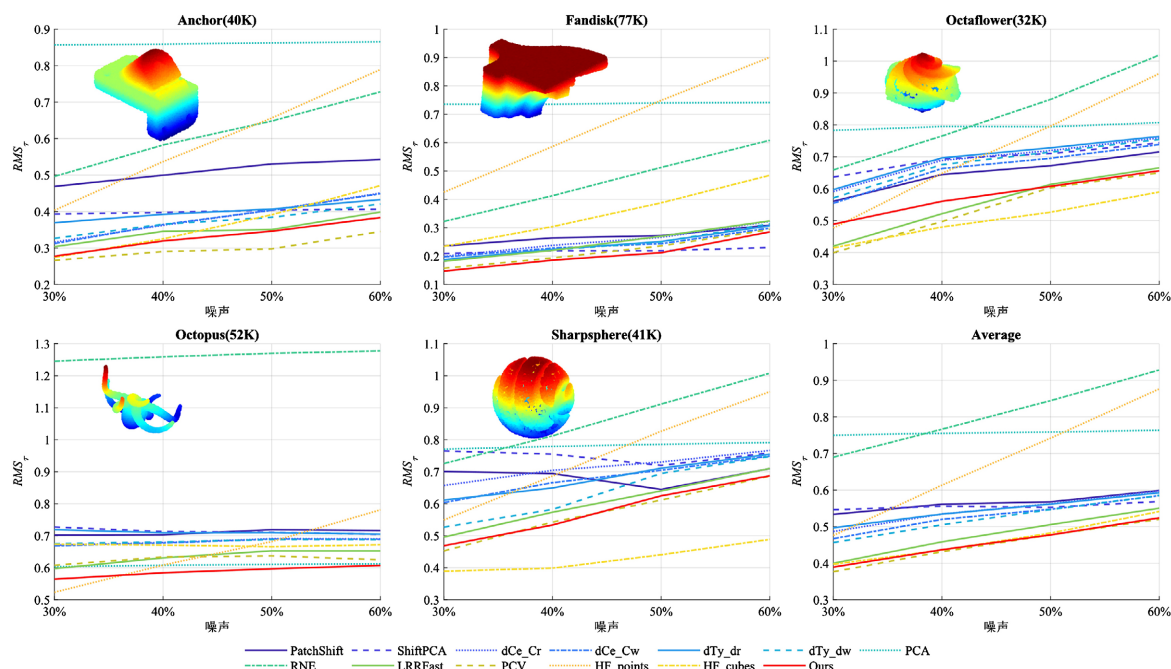


Figure 4. Variation of RMS_{τ} with noise scale across different models

图 4. 不同模型上 RMS_{τ} 值随噪声尺度的变化情况

图 3 和图 4 展示了不同算法在每个模型上的 RMS 值和 RMS_{τ} 值随噪声尺度的变化情况，以及在 5 个模型上的 RMS 均值和 RMS_{τ} 均值随噪声尺度的变化情况。图 5 和图 6 展示了不同算法在每个模型上 4 个噪声尺度的 RMS 均值和 RMS_{τ} 均值，以及所有模型上的 RMS 均值和 RMS_{τ} 均值。表 7~11 展示了在各个模型上不同算法的法向估计误差对比。

如图 3~6 所示，从整体上看，RNE 算法对于含噪声且带有尖锐特征的模型进行法向估计时，整体质量较差。相比于其他算法，RNE 算法在各个模型上的 RMS 值都是最高的， RMS_{τ} 值仅在 Anchor (40K) 和 Fandisk (77K) 模型上不是最高的。这可能是由于 RNE 算法对参数设置和噪声类型较为敏感，导致其估计的法向误差较大。

PCA 和 HF_points 的法向估计整体表现相近。两者的 RMS 值与其他算法基本持平，但是 RMS_{τ} 值相较于其他算法比较高，在部分模型上仅低于 RNE 算法。说明这两种方法在尖锐特征处估计的法向过于光滑，导致大量位于尖锐特征附近的点误差超过阈值 τ ，从而使得 RMS_{τ} 值偏高。

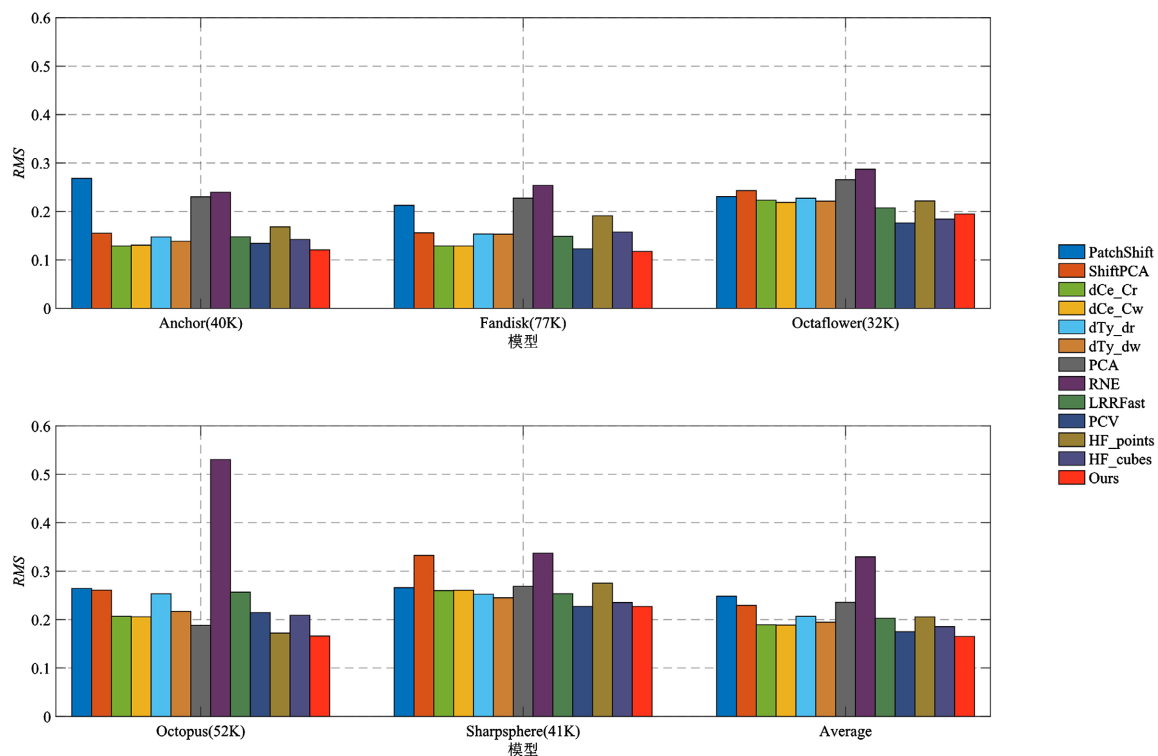


Figure 5. Average RMS across different models

图 5. 不同模型上 RMS 的均值

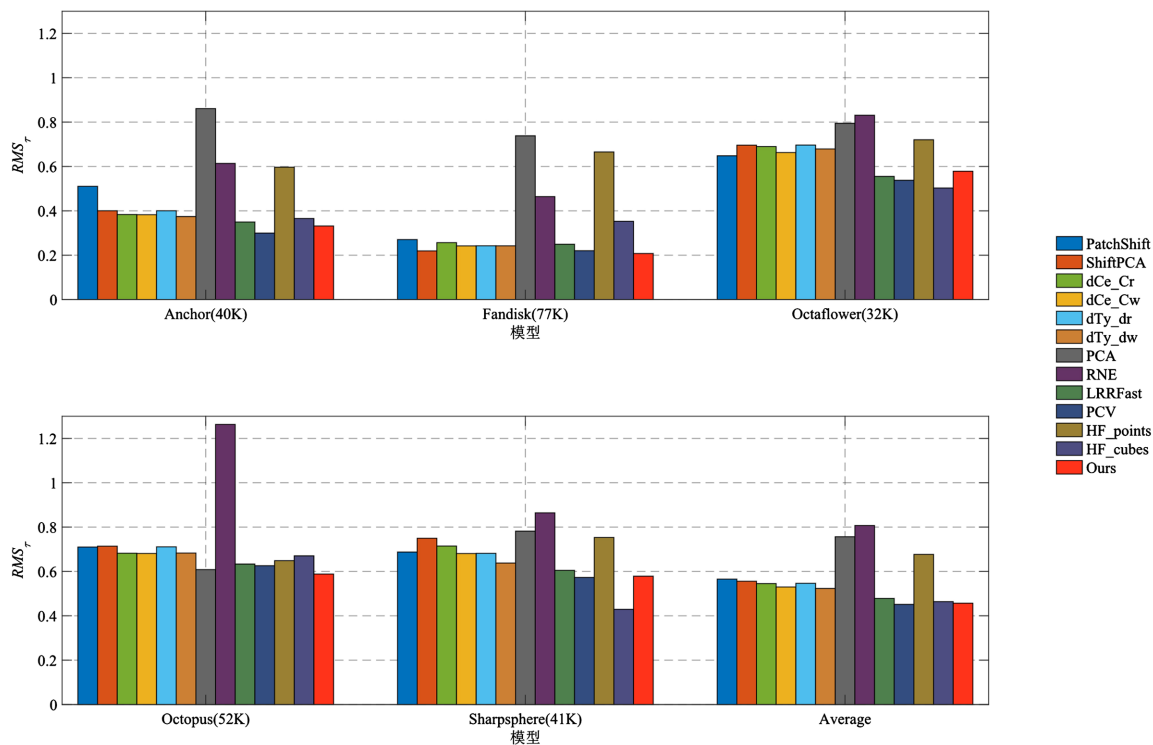
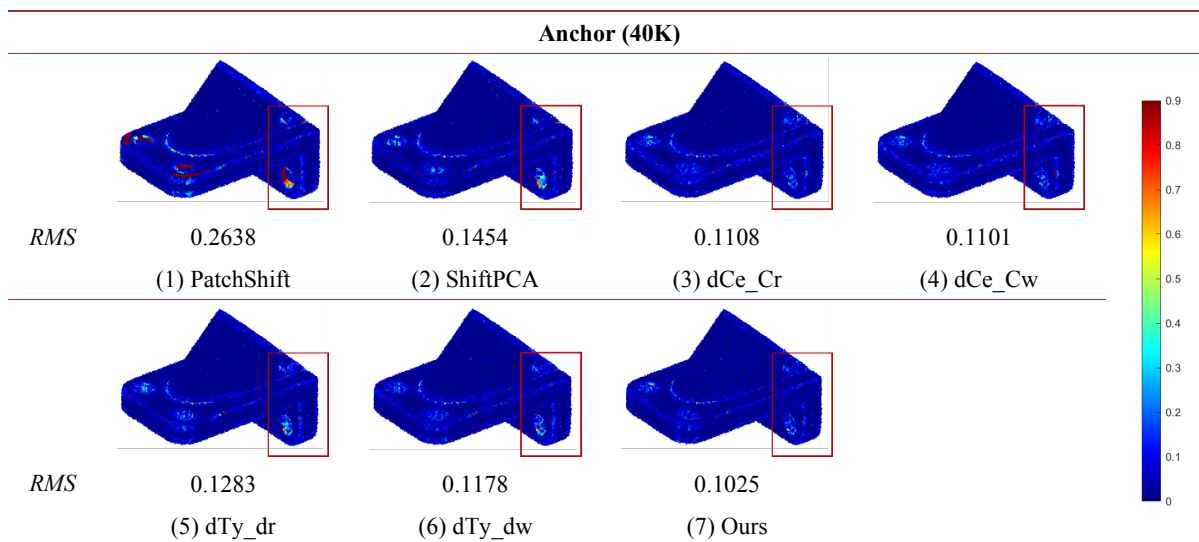
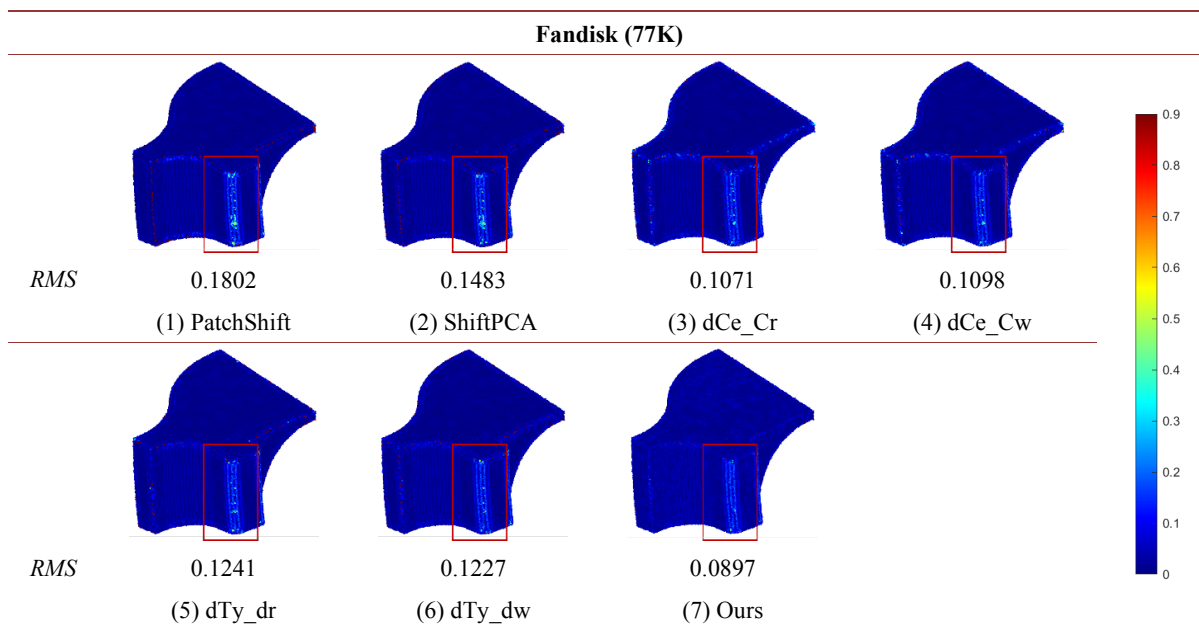


Figure 6. Average RMS_r across different models

图 6. 不同模型上 RMS_r 的均值

Table 7. Comparison of normal estimation errors for different algorithms on the Anchor (40K) model**表 7.** 在 Anchor (40K)模型上不同算法的法向估计误差对比**Table 8.** Comparison of normal estimation errors for different algorithms on the Fandisk (77K) model**表 8.** 在 Fandisk (77K)模型上不同算法的法向估计误差对比

在处理带有尖锐特征的模型时, LRRFast、PCV 和 HF_cubes 在大部分情况下的效果是优于 RNE、PCA 和 HF_points。只有在图 5 的 Octopus (52K)模型中, PCA 和 HF_points 算法的 RMS_e 值更低。在图 6 的 Octopus (52K)模型中, PCA 的 RMS_e 值更低。整体来看, LRRFast、PCV 和 HF_cubes 这三种方法中, PCV 算法估计的法向质量最高, 其 RMS_e 值和 RMS_f 值在大部分模型上都是最低的。

PatchShift、ShiftPCA 和文献[25]中的四种方案(dCe_Cr、dCe_Cw、dTy_dr、dTy_dw)均属于基于邻域漂移的法向估计算法。在这六种算法中, PatchShift 和 ShiftPCA 的 RMS_e 值较高, 而另外四种算法的 RMS_e 值更低且彼此接近。就 RMS_f 值而言, 这六种算法总体相差不大, 仅 PatchShift 的 RMS_f 值略高一点。本文算法在各个模型上的 RMS_e 值和 RMS_f 值均低于这六种基于邻域漂移的算法。

总体来看, 本文算法的 RMS 值和 RMS_r 值均低于其他对比算法, 在所有对比方法中表现最优, 在不同噪声尺度下均取得稳定良好的结果。

Table 9. Comparison of normal estimation errors for different algorithms on the Octaflower (32K) model
表 9. 在 Octaflower (32K)模型上不同算法的法向估计误差对比

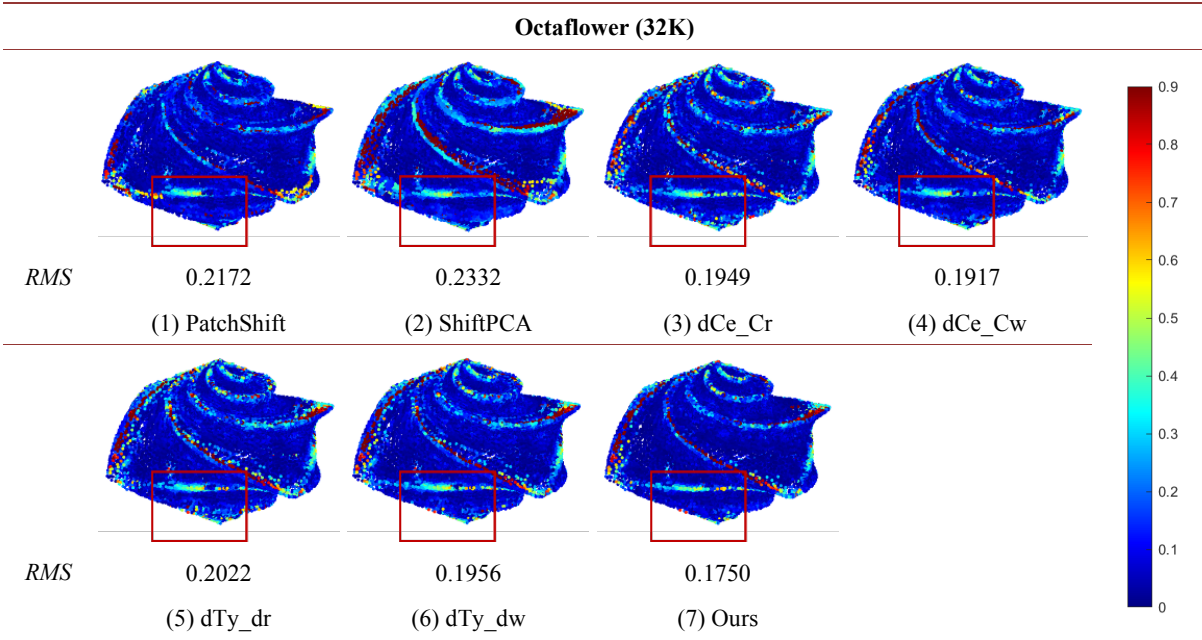


Table 10. Comparison of normal estimation errors for different algorithms on the Octopus (52K) model
表 10. 在 Octopus (52K)模型上不同算法的法向估计误差对比

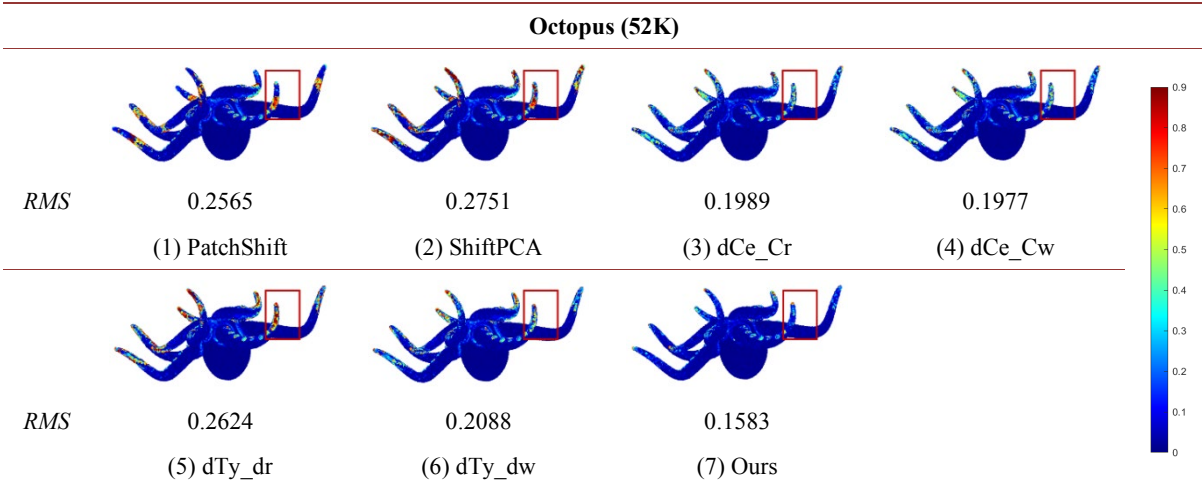
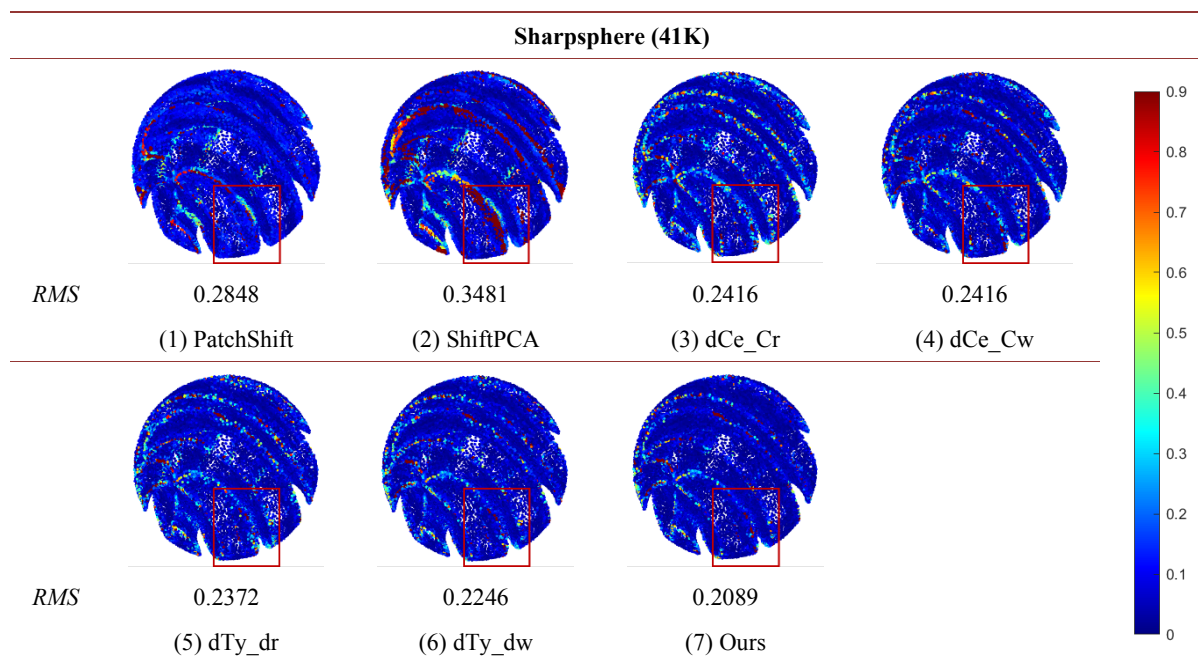


表 7~11 展示了多种基于邻域漂移的算法(包括本文算法)在各个点云模型上进行法向估计的结果误差, 点云的颜色代表各点法向估计的角度误差(颜色从蓝色到红色分别对应角度误差从小到大)。所用模型选取的噪声尺度均为 30%。通过可视化对比能够看出, 相比于其他算法, 本文算法的图像中深蓝色部分最多, 红色部分最少, 说明其法向估计误差整体最小。同时, 表中列出了五个模型在 30%噪声水平下的 RMS 值, 本文算法在各个模型上的 RMS 值均明显低于其他对比方法。综上, 图像和数据结果均表明, 本文的邻域漂移算法能够降低法向估计的均方根误差值(RMS), 能够提高点云法向估计的质量。

Table 11. Comparison of normal estimation errors for different algorithms on the Sharsphere (41K) model
表 11. 在 Sharsphere (41K)模型上不同算法的法向估计误差对比



4. 结论

本文提出一种引入法向一致性约束的多尺度邻域漂移点云法向估计算法，综合考察候选邻域的“平坦程度”、候选邻域拟合平面与当前特征点的距离，以及候选邻域法向和当前特征点的初始法向的一致性，有效抑制了尖锐特征附近因法向不一致导致的邻域误选，提升了估计精度与鲁棒性。实验结果表明，该方法对模型的光滑区域及形状较为复杂区域均能获得可靠的估计结果。然而，本文未考虑模型尖锐特征附近的非均匀采样问题。在未来，研究非均匀采样模型的快速准确法向估计方法是一项重要的工作。

参考文献

- [1] 黄明琪. 基于多尺度邻域平移的点云法向估计算法研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2023.
- [2] Amenta, N. and Bern, M.W. (1999) Surface Reconstruction by Voronoi Filtering. *Discrete & Computational Geometry*, **22**, 481-504. <https://doi.org/10.1007/pl00009475>
- [3] OuYang, D. and Feng, H. (2005) On the Normal Vector Estimation for Point Cloud Data from Smooth Surfaces. *Computer-Aided Design*, **37**, 1071-1079. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2004.11.005>
- [4] Dey, T.K. and Goswami, S. (2006) Provable Surface Reconstruction from Noisy Samples. *Computational Geometry*, **35**, 124-141. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2005.10.006>
- [5] Alliez, P., Cohen-Steiner, D., Tong, Y., et al. (2007) Voronoi-Based Variational Reconstruction of Unoriented Point Sets. *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing*, Barcelona, 4-6 July 2007, 39-48.
- [6] Jones, T.R., Durand, F. and Zwicker, M. (2004) Normal Improvement for Point Rendering. *IEEE Computer Graphics and Applications*, **24**, 53-56. <https://doi.org/10.1109/mcg.2004.14>
- [7] Calderon, F., Ruiz, U. and Rivera, M. (2007) Surface-Normal Estimation with Neighborhood Reorganization for 3D Reconstruction. In: Rueda, L., Mery, D. and Kittler, J., Eds., *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications*, Springer, 321-330. https://doi.org/10.1007/978-3-540-76725-1_34
- [8] Valdivia, P., Cedrim, D., Petronetto, F., Paiva, A. and Nonato, L.G. (2013) Normal Correction towards Smoothing Point-Based Surfaces. *2013 XXVI Conference on Graphics, Patterns and Images*, Arequipa, 5-8 August 2013, 187-194. <https://doi.org/10.1109/sibgrapi.2013.34>
- [9] Wang, J., Xu, K., Liu, L., Cao, J., Liu, S., Yu, Z., et al. (2013) Consolidation of Low-Quality Point Clouds from Outdoor

- Scenes. *Computer Graphics Forum*, **32**, 207-216. <https://doi.org/10.1111/cgf.12187>
- [10] Han, X., Jin, J.S., Wang, M. and Jiang, W. (2018) Iterative Guidance Normal Filter for Point Cloud. *Multimedia Tools and Applications*, **77**, 16887-16902. <https://doi.org/10.1007/s11042-017-5258-9>
- [11] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. and Stuetzle, W. (1992) Surface Reconstruction from Unorganized Points. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, **26**, 71-78. <https://doi.org/10.1145/142920.134011>
- [12] Pauly, M., Keiser, R., Kobbelt, L.P. and Gross, M. (2003) Shape Modeling with Point-Sampled Geometry. *ACM Transactions on Graphics*, **22**, 641-650. <https://doi.org/10.1145/882262.882319>
- [13] Cazals, F. and Pouget, M. (2005) Estimating Differential Quantities Using Polynomial Fitting of Osculating Jets. *Computer Aided Geometric Design*, **22**, 121-146. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.09.004>
- [14] Guennebaud, G. and Gross, M. (2007) Algebraic Point Set Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **26**, Article 23. <https://doi.org/10.1145/1276377.1276406>
- [15] Zhang, J., Cao, J., Liu, X., Chen, H., Li, B. and Liu, L. (2019) Multi-Normal Estimation via Pair Consistency Voting. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **25**, 1693-1706. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2018.2827998>
- [16] Li, B., Schnabel, R., Klein, R., Cheng, Z., Dang, G. and Jin, S. (2010) Robust Normal Estimation for Point Clouds with Sharp Features. *Computers & Graphics*, **34**, 94-106. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2010.01.004>
- [17] 王茜微. 基于邻域选取的点云法向估计算法研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2021.
- [18] Mederos, B., Velho, L. and de Figueiredo, L.H. (2003) Robust Smoothing of Noisy Point Clouds. *Proceedings of the SIAM Conference on Geometric Design and Computing*, Seattle, 9-13 November 2003, 1-10.
- [19] Wang, Y.T., Feng, H.Y., Delorme, F. and Engin, S. (2013) An Adaptive Normal Estimation Method for Scanned Point Clouds with Sharp Features. *Computer-Aided Design*, **45**, 1333-1348. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2013.06.003>
- [20] Zhang, J., Cao, J., Liu, X., Wang, J., Liu, J. and Shi, X. (2013) Point Cloud Normal Estimation via Low-Rank Subspace Clustering. *Computers & Graphics*, **37**, 697-706. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2013.05.008>
- [21] 张杰, 尚星宇, 王茜微, 刘秀平, 崔利宏, 唐科威. 基于差异性累积与子空间传播的法向估计算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, 32(3): 367-377.
- [22] Liu, X., Zhang, J., Cao, J., Li, B. and Liu, L. (2015) Quality Point Cloud Normal Estimation by Guided Least Squares Representation. *Computers & Graphics*, **51**, 106-116. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2015.05.024>
- [23] Boulch, A. and Marlet, R. (2012) Fast and Robust Normal Estimation for Point Clouds with Sharp Features. *Computer Graphics Forum*, **31**, 1765-1774. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03181.x>
- [24] Cao, J., Chen, H., Zhang, J., Li, Y., Liu, X. and Zou, C. (2018) Normal Estimation via Shifted Neighborhood for Point Cloud. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **329**, 57-67. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.04.027>
- [25] 黄明琪, 张杰, 史路冰. 基于多尺度邻域平移法向估计算法——点云的法向量估计[J]. 应用数学进展, 2022, 11(9): 6768-6778.
- [26] 张杰, 刘健, 王茜微, 等. 基于邻域漂移的点云法向估计算法研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(1): 13-20.