

基于法向集的点对一致性投票的点云法向估计算法

周佳怡

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年8月21日; 录用日期: 2026年9月14日; 发布日期: 2026年9月22日

摘要

法向量是点云数据中至关重要的几何属性, 广泛应用于特征提取、三维分割、曲面重建等任务。在法向估计中, 如何评价两个邻域点的相似性程度对邻域点的筛选与加权是至关重要的。PCV算法利用两个点法向之间的一致性来刻画邻域点的相似性程度, 较好地保持了局部邻域的特征, 但其使用单一、粗糙的初始输入法向进行一致性度量, 使得在尖锐特征附近对邻域点相似性的判断不够精准。针对这一问题, 本文提出一种PCV改进算法, 通过为尖锐特征点构建法向集, 将PCV中单一初始法向间的一致性度量替换为法向集之间的一致性度量。实验结果表明, 本文算法在保持点云特征的同时, 在不同噪声水平下均取得了更好的法向估计结果。

关键词

点云, 法向估计, 法向集

Point Cloud Normal Estimation Algorithm Based on Normal Set-Based Point Pair Consistency Voting

Jiayi Zhou

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: August 21, 2026; accepted: September 14, 2026; published: September 22, 2026

Abstract

Normal vector is a critical geometric property of point cloud data, and is widely applied in tasks including feature extraction, 3D segmentation, and surface reconstruction. In normal estimation,

文章引用: 周佳怡. 基于法向集的点对一致性投票的点云法向估计算法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(9): 199-211.
DOI: 10.12677/aam.2026.159385

evaluating the similarity between two neighboring points is of great significance for the selection and weighting of neighboring points. The PCV algorithm characterizes the similarity of neighboring points via the consistency between the normal vectors of two points, which preserves the features of local neighborhoods well. However, it uses a single, rough initial input normal to measure consistency, leading to inaccurate judgment of neighboring point similarity near sharp features. To address this problem, this paper proposes an improved PCV algorithm that constructs a normal set for sharp feature points, and replaces the consistency measurement between single initial normals in PCV with the consistency measurement between normal sets. Experimental results show that while preserving point cloud features, the proposed algorithm achieves superior normal estimation results under different noise levels.

Keywords

Point Cloud, Normal Estimation, Normal Set

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

三维点云能够真实还原物体与场景的空间形态，是当前三维信息处理领域的重要数据形式。在点云数据处理中，法向量是刻画局部几何特征的关键属性，其估计结果直接影响点云重建、渲染、分割及特征检测与提取等后续任务的处理效果，也是生成高质量三维表面的重要前提。近年来，国内外学者已提出多种点云法向估计算法，但受噪声、非均匀采样等实际因素的影响，在真实扫描点云上实现鲁棒且精准的法向估计，依然是点云数据处理领域的一项重要挑战。

点云的法向估计算法主要分为：基于 Voronoi/Delaunay 的算法[1]-[3]、基于法向修正的算法[4]-[6]、基于深度学习的算法[7]-[9]和基于局部拟合的算法[10]-[21]。

基于 Voronoi/Delaunay 的点云法向估计算法[1]-[3]通过构建 Voronoi 图或 Delaunay 三角剖分建立点云邻域拓扑关系，并结合邻域三角面片的几何特性完成法向估计。该类算法在处理无噪声或噪声较小的点云数据时法向估计结果良好，但难以适用于大噪声或有尖锐特征点云数据[10]。

基于法向修正的点云法向估计算法[4]-[6]以初始法向为基础，结合点云的局部曲率变化等信息分析邻域关系，并通过迭代优化实现法向校正。这类算法能够使法向更贴合真实几何形态，使三维模型表面更光滑自然。然而，在处理尖锐特征区域时，若初始法向已因噪声或平滑效应丢失尖锐特征信息，后续修正过程将难以恢复此类特征，导致法向估计结果无法准确保留尖锐几何结构[11]。

基于深度学习的点云法向估计算法[7]-[9]依靠深度神经网络的自学习与自适应能力，对点云局部邻域的几何特征进行学习，通过多尺度邻域特征聚合等方式，兼顾局部几何特征与全局信息的提取，从而更全面地刻画点云的几何属性。其优势在于计算效率高，无需构建复杂的几何拓扑结构即可适配各类复杂点云场景，同时，通过对噪声分布模式的学习，在非均匀采样、噪声干扰等情况下保持良好的鲁棒性。该算法的局限在于对训练数据的依赖性较强、训练耗时较长，且存在过拟合风险[8]。

基于局部拟合的点云法向估计算法是目前应用最为广泛的一种方法。该类算法通过对点云中每一点的邻域点进行曲面拟合实现法向估计。Hoppe 等[12]最早提出了基于主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)的局部切平面拟合方法，该方法利用当前点的所有邻域点进行拟合，得到局部最优拟合平面，并将该平面的法向作为该点的法向。因其思路直观、实现简便，该方法成为后续各类法向估计算法

的重要基础, 但该方法的局限性在于当处理尖锐特征区域时, 邻域点往往来自不同的曲面, 仅采用单一平面拟合难以准确刻画真实的局部几何结构, 从而影响法向估计的准确性。针对这一问题, Pauly 等[13]从为邻域分配距离权重的角度出发, 根据邻域点与当前点的远近分配不同权重, 有效降低了较远邻域点的影响, 从而优化平面拟合结果。Guennebaud 等[14]与 Cazals 等[15]则不再局限于平面拟合, 分别引入球面拟合与二次曲面拟合策略, 能够更好地贴合局部非平面的几何特征, 有效提高了复杂曲面场景下的法向估计效果。然而, 这些方法均采用各向同性的邻域进行计算, 在尖锐特征区域会不可避免地利用来自不同曲面的邻域点参与拟合, 进而影响最终法向估计效果[10]。

基于“排除来自不同曲面的邻域点, 仅保留与当前点属于同一曲面的点进行局部拟合”这一思想, 如何判断两个点是否位于同一局部几何结构是至关重要的。Mederos 等[16]和 Li 等[10]均利用了鲁棒统计技术, 通过拟合残差刻画两点的相似程度, 其中, Li 等[10]提出了鲁棒法向估计算法(Robust Normal Estimation, RNE)。上述方法在邻域的筛选与加权上主要依赖距离或拟合残差, 未充分考虑到邻域点间的几何结构一致性, 因此在尖锐特征处难以获得准确的法向估计结果, 估计效果有待进一步提升[17]。

法向一致性刻画了点间的几何结构关系, 能够直观反映两点是否属于同一曲面, 为邻域点的筛选和加权提供了新的思路。Wang 等[17]以当前点与邻域点的法向一致性为依据, 设计了相应的权重函数, 对与当前点法向更一致的邻域点赋予更高的权重。Zhang 等[18]和 Liu 等[19]分别提出低秩子空间聚类算法(Low-Rank Representation, LRR)及其加速版本(Low-Rank Representation fast, LRRfast), 这类方法将法向一致性与子空间分割相结合, 并以此构造关系矩阵将当前点的邻域划分为若干光滑子区域, 从而实现更精确的切平面拟合。在此基础上, Zhang 等[20]提出了基于点对一致性投票的法向估计算法(Pair Consistency Voting, PCV)。该算法不再局限于单点, 而是以点对为基础, 同时考虑了点对的拟合残差和初始法向一致性, 对候选平面进行加权投票以筛选出最优平面。PCV 在保留尖锐特征、抗噪性、处理非均匀采样等方面都展示了良好的性能。然而, 上述方法虽能有效抑制来自不同曲面邻域点的影响, 但其效果依赖于初始法向的准确性。在几何不连续的尖锐特征区域, 由于局部同时包含多个相互独立的曲面, 因此初始法向本身难以准确估计, 导致法向估计的结果偏离真实几何结构。

在尖锐特征处点的初始法向不够准确的情况下, 为了提升 PCV 对点对法向一致性判断的可靠性, 本文对 PCV 进行改进, 提出一种基于法向集的点对一致性投票算法。具体来说, 本算法首先通过计算特征阈值识别候选点, 并使用[21]中的方法为这些候选点构建法向集, 然后在点对投票环节, 以两点法向集之间的一致性替代原有的单一初始法向一致性进行度量, 从而降低初始法向误差对投票结果的影响, 提升点对法向一致性判断的可靠性。实验结果表明, 在包含尖锐特征的点云数据上, 本算法能有效提升法向估计的准确性, 并在噪声等复杂场景下表现出良好的鲁棒性。

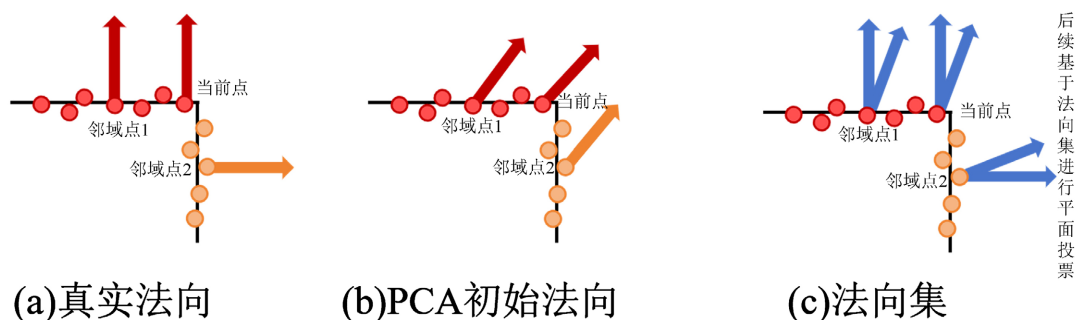


Figure 1. The inaccuracy problem of normal estimation at sharp features and the schematic diagram of normal set

图 1. 尖锐特征处法向估计的不准确问题与法向集示意图

图 1 是尖锐特征处 PCA 法向估计不准确问题与本文方法法向集的示意图。其中, 子图(a)为真实法向, 在尖锐特征处, 两个相交平面上的点的真实法向方向明确。子图(b)为 PCA 的初始估计结果, 由于尖锐特征处邻域同时包含来自两个平面的点, PCA 得到的初始法向会偏离真实的平面法向, 使得 PCV 对两点是否相似的判断产生偏差, 进而影响投票效果。子图(c)为本文算法生成的法向集, 后续基于该法向集进行平面投票, 以更稳健的一致性度量参与点对投票过程, 降低初始法向误差的影响, 从而提升法向估计的鲁棒性与准确性。

2. 算法

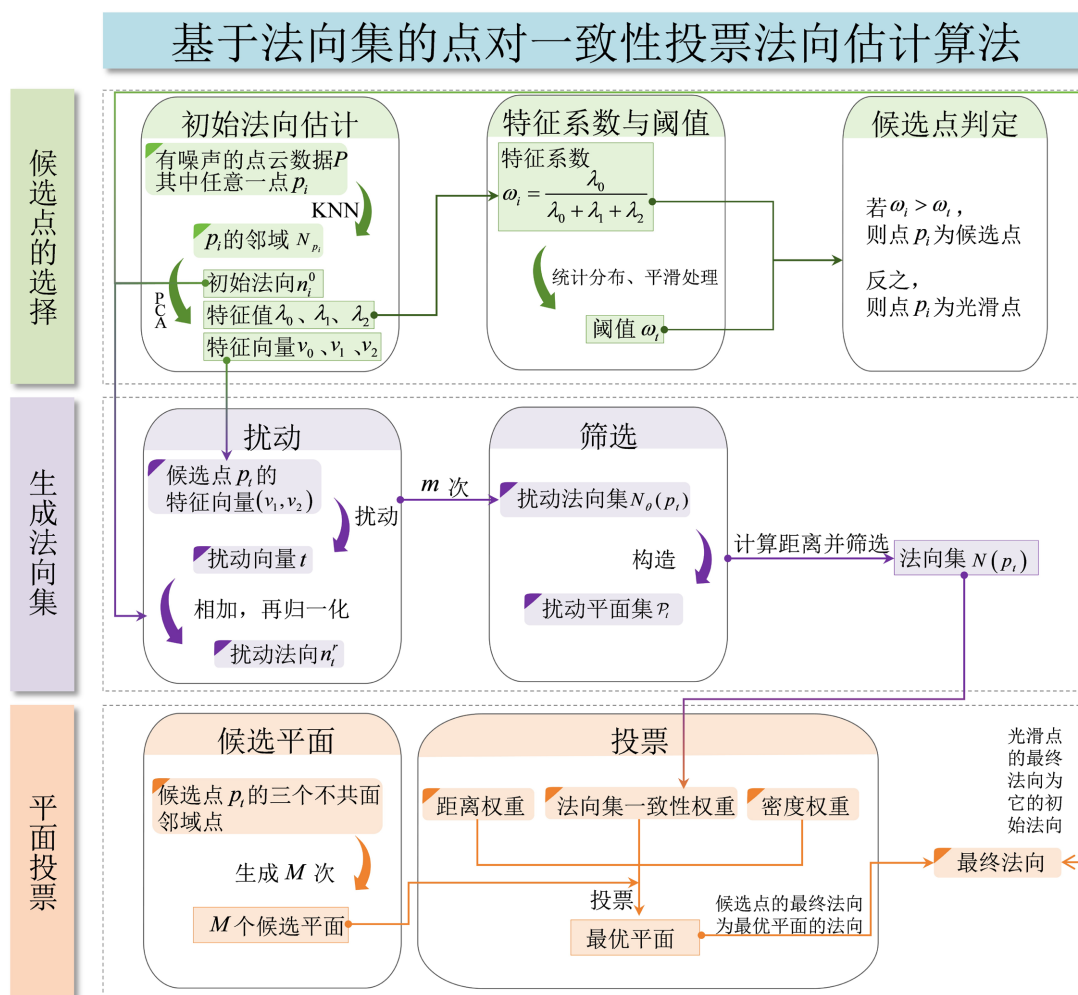


Figure 2. Algorithm flow chart

图 2. 算法流程图

给定噪声点云数据 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ (N 为采样点个数, $p_i = \{x_i, y_i, z_i\}$), 对于点云中任意一点 p_i , 它的邻域为 $N_{p_i} = \{p_i^j | p_i^j \text{ 属于 } p_i \text{ 的 } S \text{ 近邻}\}$ 。

本文算法分为三个步骤, 具体如图 2 所示。

第一步: 候选点的选择。首先, 利用 PCA 计算点云中每个点的初始法向, 并利用邻域协方差矩阵的特征值定义特征系数, 用于衡量点靠近尖锐特征的程度。然后, 根据特征系数的分布确定阈值, 若某点

的特征系数大于该阈值，则认为其靠近尖锐特征区域，将其定义为候选点，其余点定义为光滑点。光滑点直接将 PCA 计算的初始法向作为最终法向，候选点则进入后续步骤。

第二步：生成法向集。对于任一候选点 p_i ，对其初始法向 n_i^0 施加扰动策略，生成 m 个扰动法向，每个扰动法向对应一个扰动平面，通过计算邻域 N_{p_i} 到各扰动平面的距离筛选出 k_{top} 个最合适的平面，这 k_{top} 个平面的法向构成了点 p_i 的法向集，记作 $N(p_i)$ 。

第三步：平面投票。将法向集与 PCV 相结合来改善尖锐特征处单一初始法向的不准确问题。对于任一候选点 p_i ，利用其法向集 $N(p_i)$ 与其邻域点 p_i^j 的法向集 $N(p_i^j)$ （若 p_i^j 为光滑点，则为初始法向 n_i^{j0} ），计算点对之间的法向集一致性，并结合拟合残差权重和密度权重，对邻域内随机采样生成的候选平面进行加权投票。选取得票最高的候选平面法向作为候选点 p_i 的最终法向。

2.1. 候选点的选择

为有效区分点云中的特征区域，本文采用文献[18]、[19]的处理策略。该策略在对每个点完成初始法向估计的同时，将点云划分为光滑点与候选点。为保持本文方法的完整性，本节对该过程作简要说明，详细步骤可参考对应文献。

对于点 p_i ，其邻域的协方差矩阵 T_i 定义为：

$$T_i = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} p_i^1 - \bar{p}_i \\ \vdots \\ p_i^S - \bar{p}_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_i^1 - \bar{p}_i \\ \vdots \\ p_i^S - \bar{p}_i \end{pmatrix}^T, p_i^j \in N_{p_i}, \quad (1)$$

其中 N_{p_i} 是点 p_i 的邻域， S 是 N_{p_i} 的大小， $\bar{p}_i = \frac{1}{S} \left(\sum_{j=1}^S p_i^j \right)$ 是局部邻域 N_{p_i} 的平均值。通过对 T_i 进行特征分解，可以得到特征值 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 与它们对应的特征向量 v_0, v_1, v_2 ，其中， $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ 。 v_0 就是通过 PCA 计算得到的点 p_i 的初始法向 n_i^0 。点 p_i 的特征系数 ω_i 定义为：

$$\omega_i = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}, \quad (2)$$

ω 应归一化至 $[0,1]$ 。 ω_i 可以反映点 p_i 与尖锐特征的接近程度，当 ω_i 趋近于 0 时，该点所处区域较为平坦，随着 ω_i 增大，表明点越靠近尖锐特征(如边缘或角点)，其邻域内就越可能包含来自不同曲面的点。

为使特征系数 ω_i 的分布更加清晰并降低噪声的干扰，本文通过最小化以下目标函数对 f_ω 进行平滑处理：

$$\hat{f}_\omega = \arg \min_{\hat{f}_\omega} \left\| \hat{f}_\omega - f_\omega \right\|_F + \lambda \left\| D \hat{f}_\omega \right\|_1, \quad (3)$$

其中， f_ω 表示了 $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ 的分布情况， λ 为权衡参数， D 为一阶差分矩阵， $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_F$ 分别为 L_1 范数和 F 范数。平滑处理后，将 f_ω 达到第一个峰值后的平缓点定义为阈值 ω_t 。在本文实验中，参数 λ 设置为 1。

利用阈值 ω_t ，即可区分平坦区域与特征区域，若 $\omega_i > \omega_t$ ，则将点 p_i 视为候选点，否则视为光滑点。候选点进入后续步骤得到最终法向，而光滑点的最终法向就是它的初始法向。

2.2. 生成法向集

对于候选点 p_i ，由于其初始法向 n_i^0 难以准确刻画尖锐特征的局部几何结构，所以本文利用[21]中的扰动法向生成策略，为其构建法向集。

首先，定义基础扰动幅度 $\sigma_0 = 0.15$ 和随机扰动分量 $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.05^2)$ ，得到扰动幅度 $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$ 。在切

平面内生成二维标准正态随机向量 $g = (g_1, g_2)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$, 构造扰动向量 $t_i = \sigma \cdot (g_1 v_1, g_2 v_2)$ 。将点 p_i 的初始法向 n_i^0 与扰动向量 t_i 相加并进行归一化, 得到点 p_i 的一个扰动法向 n_i^r 。重复上述过程 m 次, 生成 m 个扰动法向, 构成点 p_i 的扰动法向集 $N_\theta(p_i) = \{n_i^r | r=1, \dots, m\}$ 。

其次, 构造扰动平面集 $\mathcal{P}_i = \{\pi_i^r | r=1, \dots, m\}$, 其中扰动平面 π_i^r 由邻域 N_{p_i} 的几何中心点 $\bar{p}_i$ 及扰动法向 n_i^r 共同确定。对于扰动平面 π_i^r , 计算邻域点 p_i^j 到该平面的距离 $d_i^{(j)r}$, $j=1, \dots, S$ 。为降低离群点的影响, 将距离 $\{d_i^{(j)r}\}_{j=1}^S$ 进行升序排序, 得到有序序列 $d_i^{(j)r}|_{(1)} \leq d_i^{(j)r}|_{(2)} \leq \dots \leq d_i^{(j)r}|_{(S)}$, 选取序列中间 80% 的距离值并计算其均值 d_i^r , 作为邻域 N_{p_i} 到扰动平面 π_i^r 的截断距离。

最后, 遍历扰动平面集 $\mathcal{P}_i$ 所有扰动平面, 得到对应的截断距离集合 $D_i = \{d_i^r | r=1, \dots, m\}$ 。选取截断距离最小的 k_{top} 个扰动平面, 这 k_{top} 个平面的法向构成了候选点 p_i 的法向集 $N(p_i) = \{n_i^s | s=1, \dots, k_{top}\}$ 。

2.3. 平面投票

2.3.1. PCV 简述

对于候选点 p_i , PCV 算法首先随机采样三个不共面的邻域点构建候选平面 θ , 并通过最大化以下目标函数来求解最优平面:

$$\theta_i^* = \arg \max_{\theta} \sum_{p_i^j, p_i^k \in N_{p_i}} \rho(p_i^j, \theta) \rho(p_i^k, \theta) w_a(p_i^j, p_i^k) \gamma_j^2 \gamma_k^2, \quad (4)$$

其中,

$$\rho(p_i^j, \theta) = \exp(-r_{j,\theta}^2 / \sigma_{r,t}^2),$$

$$w_a(p_i^j, p_i^k) = \exp(\cos^\alpha \langle n_i^{j0}, n_i^{k0} \rangle / \sigma_{a,t}^\alpha),$$

ρ 是一个递减函数, $r_{j,\theta}$ 是点 p_i^j 到平面 θ 的距离。 $w_a(p_i^j, p_i^k)$ 是一个高斯权函数, n_i^{j0} 是点 p_i^j 的初始法向, n_i^{k0} 是点 p_i^k 的初始法向, $\langle n_i^{j0}, n_i^{k0} \rangle$ 为 n_i^{j0} 与 n_i^{k0} 之间的夹角, $\sigma_{r,t}$ 和 $\sigma_{a,t}$ 都是高斯权函数的带宽参数。 $\sigma_{r,t}$ 定义为 $\sigma_{r,t} = \beta * \delta_i$, 其中 δ_i 通过邻域 N_{p_i} 中光滑点的残差分布自适应确定。 α 和 β 是可自定义的参数。 $\sigma_{a,t}$ 通过经验设置为 $\cos(45^\circ)$ 。 γ_j, γ_k 是密度权值。在公式(4)中, $w_a(p_i^j, p_i^k)$ 用于评价两点法向的一致性, 若两点法向相近, 表明二者更可能来自同一曲面, 则 $w_a(p_i^j, p_i^k)$ 数值大, 反之, $w_a(p_i^j, p_i^k)$ 数值小。 ρ 则衡量邻域点与拟合平面的距离, 距离越近贡献越大, 越远贡献越小。两类权重协同作用, 使法向一致且距平面较近的对主导平面投票, 减少了跨特征点或远距离点的干扰, 从而在保留尖锐特征的同时实现鲁棒的法向估计。

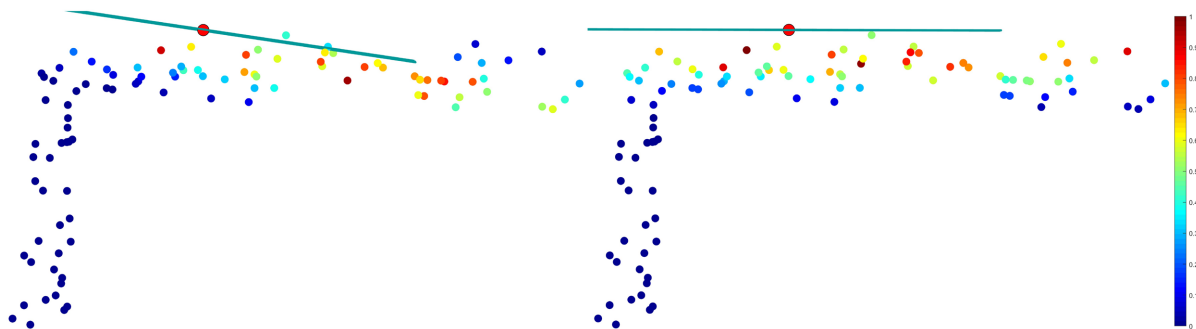


Figure 3. The optimal plane obtained at the same point in the sharp feature
图 3. 尖锐特征处同一点得到的最优平面

PCV 算法通过点对一致性投票实现了特征区域的鲁棒法向估计，但其点对法向一致性权重的计算直接依赖于两点的初始法向。在光滑区域，初始法向能够准确反映曲面的真实几何状态，因此可以有效区分点对是否属于同一曲面。然而，在尖锐特征区域，由于多个曲面交汇，邻域点的初始法向受跨曲面点的影响而产生偏差，导致对点对法向是否相近的判断不够准确。本文选取了噪声水平 30% 的 Anchor_40 K 模型进行实验，并把尖锐特征处的结果可视化到图 3 中，得到同一当前点(大的红色点)的最优平面(绿色平面)，当前点处于尖锐特征区域，其邻域点分布于不同的曲面上。各邻域点颜色表示在点对投票中对最优平面的综合贡献，即该点与所有邻域点形成的点对权重之和，点对权重由距离权重与法向一致性权重共同决定，红色表示贡献高，蓝色表示贡献低。图片左侧为 PCV 算法结果，右侧为本文算法结果。

如图 3 左图所示，PCV 得到的最优平面出现明显倾斜，难以准确反映当前点的真实几何信息。

2.3.2. 本文方法

针对上述问题，本文对 PCV 的投票机制进行改进，不再直接使用两点的初始法向，而是利用法向集一致性作为度量依据。对于候选点 p_i ，其法向集为 $N(p_i) = \{n_i^s | s = 1, \dots, k_{top}\}$ 。对于其邻域点 p_j ，若 p_j 为候选点，则其法向集为 $N(p_j) = \{n_j^m | m = 1, \dots, k_{top}\}$ ，若 p_j 为光滑点，由于其初始法向足够准确，因此利用初始法向 n_j^0 进行计算，定义点 p_i 与其邻域点 p_j 的法向集一致性为：

$$s_{i,j} = \begin{cases} \max_{n_i^s \in N(p_i), n_j^m \in N(p_j)} |n_i^s \cdot n_j^m|, & \text{若 } p_j \text{ 是候选点,} \\ \max_{n_i^s \in N(p_i)} |n_i^s \cdot n_j^0|, & \text{若 } p_j \text{ 是光滑点,} \end{cases} \quad (5)$$

改进后的投票函数为：

$$\theta_i^* = \arg \max_{\theta} \sum_{p_j^j, p_i^k \in N_{p_i}} \rho(p_j^j, \theta) \rho(p_i^k, \theta) (s_{i,j} \cdot s_{i,k}) \gamma_j^2 \gamma_k^2, \quad (6)$$

重复上述过程 M 次，为 M 个候选平面投票，得分最高的候选平面，其法向即为候选点 p_i 的最终法向。

为了提高运算效率，本算法以候选点 p_i 作为中介，间接度量其两邻域点 p_j^j ， p_i^k 间法向集的一致性，并通过计算法向集之间的最大相似度衡量点间的法向集一致性。具体而言，对于候选点 p_i 与其邻域点 p_j^j ，若二者法向集中存在至少一对相近的法向，表明二者具有较高的几何一致性，则 $s_{i,j}$ 取值较大，该邻域点在投票中贡献更大，反之，若法向集之间缺少相近的法向，说明二者更可能来自不同曲面，则 $s_{i,j}$ 取值较小，该邻域点在投票中贡献更小。

如图 3 右图所示，本文算法在尖锐特征区域得到了更加贴合真实曲面的最优平面，进一步验证了所提法向集一致性度量策略的有效性与可靠性。

3. 实验结果及分析

为了全面评估算法的性能，将本文算法与一些代表性的算法进行了定量与定性的比较，包括 PCA，RNE，LRRfast，PCV。将这些算法在 Anchor_40 K、Fandisk_77 K、Octopus_52 K、Sharpsphere_41 K 等包含尖锐特征的模型上进行测试。为模拟噪声环境，所有模型都添加了均值为 0，标准差为点云之间平均距离的 30%，40%，50%，60% 的高斯噪声。

3.1. 参数的确定

本文算法主要的参数如下：

S ：计算光滑点法向所用的邻域点的个数。

S^* ：计算候选点法向所用的邻域点的个数。

k : k 距离邻域的大小。

m : 扰动法向的数量。

k_{top} : 法向集中的法向数量。

在实验中, $S^* = 2 * S$, m 设置为 50, k_{top} 设置为 10, 邻域值分别设置为 50、100、200、300。其余的算法邻域值分别设置为 50、100、200、300, 其余相关参数采用默认值。

3.2. 评价函数

为了对法向估计结果进行定量分析, 本文采用了均方根误差 (RMS) 和具有阈值的均方根误差 (RMS_τ), 定义如下:

均方根误差 (RMS) 用于评估算法在整个点云上的法向估计结果:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{|C|} \sum_{P \in C} \langle n_{P,ref}, n_{P,est} \rangle^2}, \quad (7)$$

其中, C 为点云数据集, $n_{P,ref}$ 是点 P 的真实法向, $n_{P,est}$ 是点 P 的估计法向, $\langle n_{P,ref}, n_{P,est} \rangle$ 是法向 $n_{P,ref}$ 与 $n_{P,est}$ 之间的夹角。

具有阈值的均方根误差 (RMS_τ) 用于评估算法在边缘、噪声等区域的法向估计结果:

$$RMS_\tau = \sqrt{\frac{1}{|C|} \sum_{P \in C} v_P^2}, \quad (8)$$

其中, $v_P = \begin{cases} \langle n_{P,ref}, n_{P,est} \rangle, & \text{if } \langle n_{P,ref}, n_{P,est} \rangle < \tau \\ \frac{\pi}{2}, & \text{otherwise} \end{cases}$, $\langle n_{P,ref}, n_{P,est} \rangle$ 是法向 $n_{P,ref}$ 与 $n_{P,est}$ 之间的夹角。本文中取

$\tau = 10^\circ$ 。

3.3. 结果评估

表 1 和表 2 分别展示了四种邻域尺度下的不同算法在四种噪声尺度模型下的 RMS 和 RMS_τ 的均值比较, 其中粗体表示最优值。图 4 则展示了各算法在四种模型下的 RMS 和 RMS_τ 值的比较。图 5 为本文算法、PCV 算法在噪声水平均为 30% 的四种模型下的可视化, 左侧为 PCV 算法, 右侧为本算法。为了更直观地对比两种算法的估计效果, 本算法与 PCV 算法的邻域值均选取为 100。下文将依据完整实验结果, 对本算法和 PCV 算法的性能进行综合对比, 并结合具体实验表现展开深入分析与讨论。

PCV 算法作为本文的直接改进对象, 是本实验的核心对比基准。由表 1 和表 2 可见, 本文算法的 RMS 和 RMS_τ 总均值均优于其它算法。同时, 本文算法在不同邻域大小下的 RMS 均值均低于 PCV 算法, RMS_τ 均值则取得与 PCV 相当或更优的结果, 说明本文的改进并未破坏 PCV 原有的稳定性, 所提策略在增强 PCV 处理能力的同时, 完整保留了其原有优势。

Table 1. Comparison of the mean values of RMS under four noise scale models for different algorithms at four neighborhood scales (bold font indicates the optimal value)

表 1. 四种邻域尺度下的不同算法在四种噪声尺度模型下 RMS 的均值比较(粗体表示最优值)

模型	邻域大小	Ours	PCV	PCA	RNE	LRRfast
Anchor_40 K	50	0.1299	0.1320	0.1948	0.2999	0.2611
	100	0.1165	0.1334	0.2296	0.2396	0.1477
	200	0.1606	0.1945	0.2732	0.2301	0.1610

续表

Anchor_40 K	300	0.1860	0.2226	0.3074	0.2378	0.2765
	50	0.1426	0.1512	0.1959	0.3361	0.2504
Fandisk_77 K	100	0.1160	0.1231	0.2269	0.2538	0.1484
	200	0.1197	0.1346	0.2691	0.2381	0.1353
	300	0.1323	0.1540	0.2981	0.2371	0.1888
	50	0.1579	0.1685	0.1517	0.5723	0.2830
Octopus_52 K	100	0.2010	0.2147	0.1872	0.5302	0.2569
	200	0.2653	0.2722	0.2613	0.5011	0.3380
	300	0.3375	0.3499	0.3203	0.4322	0.4132
	50	0.2328	0.2340	0.2443	0.4213	0.3110
Sharpsphere_41 K	100	0.2252	0.2273	0.2682	0.3371	0.2532
	200	0.2520	0.2628	0.3300	0.3311	0.2810
	300	0.2917	0.3006	0.3951	0.3631	0.2853
总均值		0.1917	0.2047	0.2596	0.3476	0.2494

Table 2. Comparison of the mean values of RMS_{τ} under four noise scale models for different algorithms at four neighborhood scales (bold font indicates the optimal value)

表 2. 四种邻域尺度下的不同算法在四种噪声尺度模型下 RMS_{τ} 的均值比较(粗体表示最优值)

模型	邻域大小	Ours	PCV	PCA	RNE	LRRfast
Anchor_40 K	50	0.3889	0.3855	0.7132	0.9690	0.5218
	100	0.2728	0.2977	0.8583	0.6148	0.3499
	200	0.3412	0.3925	1.0222	0.5645	0.4436
	300	0.3912	0.4427	1.1249	0.5689	0.5276
Fandisk_77 K	50	0.4268	0.4228	0.6324	1.0080	0.5150
	100	0.2288	0.2206	0.7364	0.4645	0.2496
	200	0.1940	0.2013	0.8668	0.3722	0.2048
	300	0.2205	0.2384	0.9505	0.3553	0.2659
Octopus_52 K	50	0.5643	0.575	0.5413	1.3088	0.6076
	100	0.5969	0.6255	0.6071	1.2627	0.6340
	200	0.6759	0.7048	0.7399	1.2111	0.7276
	300	0.7750	0.8099	0.8414	1.1357	0.8379
Sharpsphere_41 K	50	0.6825	0.6835	0.7183	1.1272	0.7365
	100	0.5712	0.5737	0.7803	0.8650	0.6050
	200	0.5804	0.6280	0.9706	0.8633	0.6348
	300	0.7413	0.7444	1.1801	0.9192	0.7489
总均值		0.4782	0.4966	0.8302	0.8506	0.5382

图 4 展示了各算法在不同邻域与噪声下的具体 RMS 和 RMS_{τ} 值, 直观地呈现了不同算法的对比结果。从曲线整体分布来看, 在 Anchor_40 K、Fandisk_77 K、Sharpsphere_41 K 三类含有尖锐特征的模型中,

本文算法的 RMS 和 RMS_{τ} 值整体低于 PCV、PCA、RNE、LRRfast 算法。而 Octopus_52K 模型整体以连续光滑曲面为主，PCA 算法取得更低的 RMS 数值，本文算法保持了与之相近的估计精度，在局部几何变化明显的区域，PCA 的法向估计出现明显偏差，本文算法则表现稳定，取得更优的 RMS_{τ} 结果，同时，本文算法的 RMS 和 RMS_{τ} 值整体低于 PCV、RNE、LRRfast 算法。

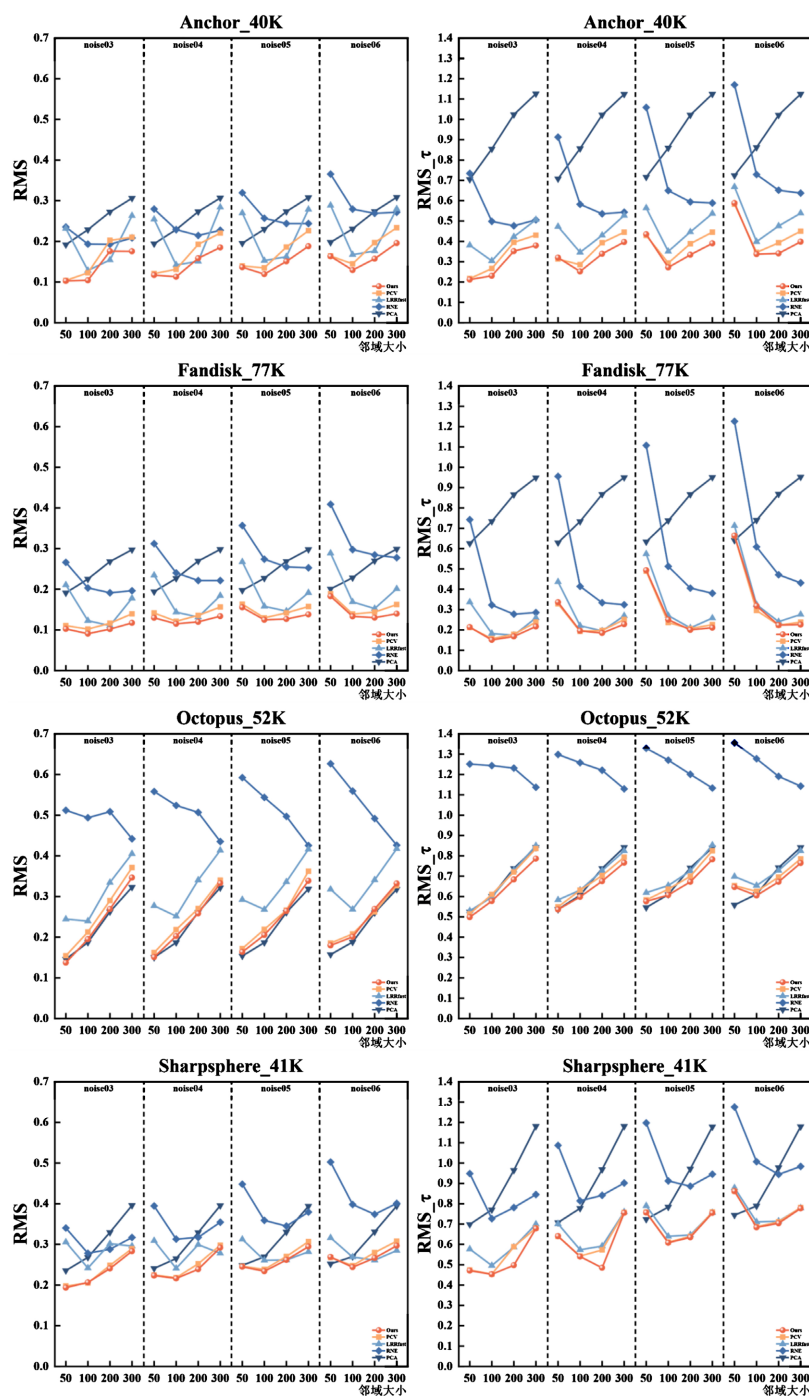


Figure 4. The RMS and RMS_{τ} of each algorithm under different neighborhoods and noises

图 4. 各算法在不同邻域与噪声下的 RMS 和 RMS_{τ}

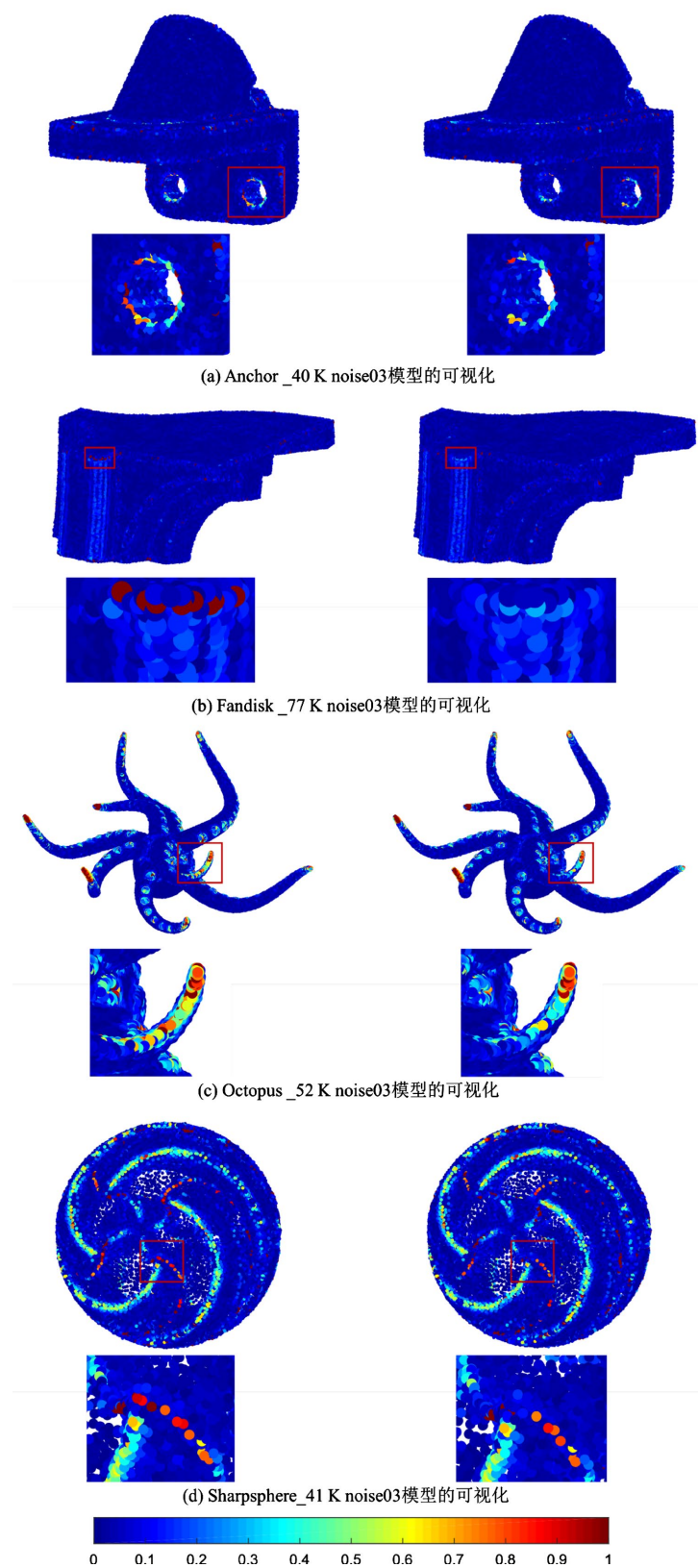


Figure 5. The angular error of this algorithm at each point compared with the PCV algorithm
图 5. 本文算法与 PCV 算法在每个点上的角度误差

从图 5 的热力图中可以观察到本文算法与 PCV 算法在每个点上的角度误差分布。图中颜色从蓝色到红色表示每个点的角度误差从 0 逐渐增大至 1 弧度，蓝色代表此点法向估计较为准确，红色则反映此点误差较大。从整体来看，本文算法与 PCV 算法的热力图中均存在蓝色、黄绿色及红色区域，但本文算法的红色和黄绿色区域相对更少一些。为进一步观察细节，图 5 对这些区域进行了局部放大展示。从放大图中可以更清晰地看到，高误差点在图中均集中出现在模型的特征边界位置，PCV 算法出现更多成片的高误差点，本文算法的高误差点更加零散，连片现象明显更弱，且黄绿色和红色区域面积小于 PCV 算法，这表明本文的改进策略在法向估计上取得了更好的效果。图 5 的可视化结果与表 1 和表 2 中的定量数据相互印证，进一步验证了本文改进策略的有效性。

4. 结论

本文针对点云法向估计中尖锐特征区域初始法向不够准确导致点对法向一致性判断不够可靠的问题，提出了一种基于法向集一致性的改进 PCV 算法。该方法首先筛选候选点，并采用扰动策略为每个候选点构建法向集，然后利用法向集替代单一法向进行点对法向一致性度量，重新定义了投票权重函数，从而降低了对初始法向的依赖。实验结果表明，在不同噪声尺度的模型上，本文方法大部分的法向估计结果比 PCA、RNE、LRRfast、PCV 更准确。尤其在尖锐特征区域，本文方法能够有效抑制跨曲面点对的干扰，保留几何细节，表现出良好的噪声鲁棒性。本文方法的局限性在于法向集的构建与投票过程引入了额外的计算开销，运行时间略长于原始 PCV。未来工作将围绕以下方向展开：优化法向集的生成策略，提高计算效率。

参考文献

- [1] Amenta, N. and Bern, M. (1999) Surface Reconstruction by Voronoi Filtering. *Discrete & Computational Geometry*, **22**, 481-504. <https://doi.org/10.1007/pl00009475>
- [2] OuYang, D. and Feng, H. (2005) On the Normal Vector Estimation for Point Cloud Data from Smooth Surfaces. *Computer-Aided Design*, **37**, 1071-1079. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2004.11.005>
- [3] Dey, T.K. and Goswami, S. (2006) Provable Surface Reconstruction from Noisy Samples. *Computational Geometry*, **35**, 124-141. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2005.10.006>
- [4] Alexa, M., Behr, J., Cohen-Or, D., Fleishman, S., Levin, D. and Silva, C.T. (2001) Point Set Surfaces. 2001 *Proceedings Visualization, VIS'01*, San Diego, 21-26 October 2001, 21-29. <https://doi.org/10.1109/visual.2001.964489>
- [5] Jones, T.R., Durand, F. and Zwicker, M. (2004) Normal Improvement for Point Rendering. *IEEE Computer Graphics and Applications*, **24**, 53-56. <https://doi.org/10.1109/mcg.2004.14>
- [6] Zireli, A.C., Guennebaud, G. and Gross, M. (2009) Feature Preserving Point Set Surfaces Based on Non-Linear Kernel Regression. *Computer Graphics Forum*, **28**, 493-501. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2009.01388.x>
- [7] Guerrero, P., Kleiman, Y., Ovsjanikov, M. and Mitra, N.J. (2018) PCPNET Learning Local Shape Properties from Raw Point Clouds. *Computer Graphics Forum*, **37**, 75-85. <https://doi.org/10.1111/cgf.13343>
- [8] Wang, Y., Sun, Y., Liu, Z., Sarma, S.E., Bronstein, M.M. and Solomon, J.M. (2019) Dynamic Graph CNN for Learning on Point Clouds. *ACM Transactions on Graphics*, **38**, 1-12. <https://doi.org/10.1145/3326362>
- [9] 张杰, 王佳旭, 史路冰, 等. 基于邻域参与的形状感知卷积网络的点云分析[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(4): 448-456.
- [10] Li, B., Schnabel, R., Klein, R., Cheng, Z., Dang, G. and Jin, S. (2010) Robust Normal Estimation for Point Clouds with Sharp Features. *Computers & Graphics*, **34**, 94-106. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2010.01.004>
- [11] Boulch, A. and Marlet, R. (2012) Fast and Robust Normal Estimation for Point Clouds with Sharp Features. *Computer Graphics Forum*, **31**, 1765-1774. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03181.x>
- [12] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. and Stuetzle, W. (1992) Surface Reconstruction from Unorganized Points. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, **26**, 71-78. <https://doi.org/10.1145/142920.134011>
- [13] Pauly, M., Gross, M. and Kobbelt, L.P. (2002) Efficient Simplification of Point-Sampled Surfaces. 2002 *Proceedings of the IEEE Visualization*, Boston, 27 October-1 November 2002, 163-170. <https://doi.org/10.1109/visual.2002.1183771>

-
- [14] Guennebaud, G. and Gross, M. (2007) Algebraic Point Set Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **26**, 23. <https://doi.org/10.1145/1276377.1276406>
 - [15] Cazals, F. and Pouget, M. (2003) Estimating Differential Quantities Using Polynomial Fitting of Osculating Jets. 2003 *Proceedings of the Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*, Aachen, 23-25 June 2003, 177-187.
 - [16] Mederos, B., Velho, L. and de Figueiredo, L.H. (2003) Robust Smoothing of Noisy Point Clouds. 2003 *Proceedings of the SIAM Conference on Geometric Design and Computing*, Seattle, 9-13 November 2003, 1-10.
 - [17] Wang, Y., Feng, H., Delorme, F. and Engin, S. (2013) An Adaptive Normal Estimation Method for Scanned Point Clouds with Sharp Features. *Computer-Aided Design*, **45**, 1333-1348. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2013.06.003>
 - [18] Zhang, J., Cao, J., Liu, X., Wang, J., Liu, J. and Shi, X. (2013) Point Cloud Normal Estimation via Low-Rank Subspace Clustering. *Computers & Graphics*, **37**, 697-706. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2013.05.008>
 - [19] Liu, X., Zhang, J., Cao, J., Li, B. and Liu, L. (2015) Quality Point Cloud Normal Estimation by Guided Least Squares Representation. *Computers & Graphics*, **51**, 106-116. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2015.05.024>
 - [20] Zhang, J., Cao, J., Liu, X., Chen, H., Li, B. and Liu, L. (2019) Multi-Normal Estimation via Pair Consistency Voting. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **25**, 1693-1706. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2018.2827998>
 - [21] 周佳怡, 张杰. 基于法向集差异的点云法向估计算法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(4): 1-13.