

不可压缩MHD-Boussinesq方程基于ESAV方法的一阶Euler解耦算法研究

康 妍, 李 媛

温州大学数理学院, 浙江 温州

收稿日期: 2026年9月15日; 录用日期: 2026年10月9日; 发布日期: 2026年10月20日

摘 要

本文研究了一类基于指数型标量辅助变量(ESAV)方法的二维不可压缩MHD-Boussinesq方程的一阶Euler时间离散格式, 证明了所提出格式的无条件稳定性, 得到了速度、磁场和温度的最优误差估计。最后, 给出了数值例子来证明这些收敛速度。

关键词

不可压缩MHD-Boussinesq方程, ESAV方法, 无条件稳定性, 最优误差估计

Study of a First-Order Euler Decoupled Algorithm for the Incompressible Magnetohydrodynamics-Boussinesq Equations Based on the Exponential Scalar Auxiliary Variable Approach

Yan Kang, Yuan Li

College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: September 15, 2026; accepted: October 9, 2026; published: October 20, 2026

Abstract

In this paper, we study a first-order Euler finite element time-discrete scheme based on the exponential scalar auxiliary variable (ESAV) approach for the two-dimensional incompressible

文章引用: 康妍, 李媛. 不可压缩 MHD-Boussinesq 方程基于 ESAV 方法的一阶 Euler 解耦算法研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 137-155. DOI: 10.12677/aam.2026.1510403

magnetohydrodynamics-Boussinesq equations. The unconditional stability of the proposed scheme is proved. Then we obtain optimal error estimates for the velocity, magnetic field and temperature. Finally, numerical examples are provided to demonstrate these convergence rates.

Keywords

Incompressible MHD-Boussinesq Equations, ESAV Scheme, Unconditional Stability, Optimal Error Estimates

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在本文中, 我们研究的是在二维区域 $\Omega \times (0, T]$ 中变粘度, 电导率和热扩散系数的二维不可压缩 MHD-Boussinesq(magnetohydrodynamics-Boussinesq)方程, 如下:

$$\partial_t \mathbf{u} - \nabla \cdot (\nu(\theta) D(\mathbf{u})) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p + \mathbf{B} \times \text{curl} \mathbf{B} = \theta \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \text{curl}(\kappa(\theta) \text{curl} \mathbf{B}) - \text{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{g}, \quad (1.2)$$

$$\partial_t \theta - \nabla \cdot (\sigma(\theta) \nabla \theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \varepsilon u_2 + \psi, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

初值条件:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \mathbf{B}(x, 0) = \mathbf{B}_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \text{in } \Omega, \quad (1.5)$$

边界条件:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \theta = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \times \text{curl} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T], \quad (1.6)$$

其中, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界凸域, 且 $\partial\Omega$ 是 Ω 的光滑边界, $\mathbf{n}$ 表示在 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。未知变量 $\mathbf{u}(x, t), p(x, t), \mathbf{B}(x, t), \theta(x, t)$ 分别表示速度场, 压力, 磁场和温度, $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ 是形变张量, 粘度 $\nu(\theta)$, 电导率 $\kappa(\theta)$ 和热扩散系数 $\sigma(\theta)$ 是依赖于温度的正函数, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 为常数, 且 $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ 为单位向量。 $\theta \mathbf{e}_2$ 这一项表示浮力, 给出的函数 $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ 和 ψ 分别是对于磁感应、热源和施加电流的体积力, 其中 $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$ 。(1.1)~(1.4)中的向量积和旋度算子由下式给出:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{B} = u_1 B_2 - u_2 B_1, \quad \mathbf{B} \times \mathbf{r} = (r B_2, -r B_1),$$

$$\text{curl} \mathbf{B} = \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}, \quad \text{curl} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial r}{\partial y}, -\frac{\partial r}{\partial x} \right),$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$, r 是标量函数。

该方程是由流体力学中的 Navier-Stokes 方程和电磁学中的 Maxwell 方程耦合的 MHD 方程通过 Boussinesq 近似与热方程耦合而成, 其中粘度 ν 、电导率 κ 和热扩散系数 σ 依赖于温度。此系统与 Rayleigh-Bénard 对流密切相关, 这种对流发生在从底部加热的水平导电流体层中, 并且存在磁场, 详见[1]-[3]。该方程在物理、工程技术及大气科学和海洋湍流方面具有广泛的应用, 如天体物理学和地球物理学[4]、

铝电解槽液态金属[5]-[7]、金属的电磁铸件[8]、传感器[9]、飞行器[10]等领域, 是国内外科研工作者广泛关注的热点问题之一。

近年来, SAV (Scalar Auxiliary Variable)有限元方法因其高效性和灵活性而受到广泛关注, 它是由 Shen 及其合作者[11] [12]针对梯度流问题开发的一种数值方法, 核心思想是引入一个标量辅助变量 $r(t)$ 来改写原始的能量泛函, 从而将非线性项转化为二次型形式[13]。SAV 格式有着无条件满足能量耗散定律, 能够实现常系数方程的解耦求解, 以及能够构造出二阶及更高精度的数值方案等优点, 基于这些优势, 学者们将其推广至 Navier-Stokes 方程和磁流体方程等重要流体模型。Lin 等在[14]中提出了不可压缩 Navier-Stokes 方程的无条件 IMEX 格式, 引入含固定常数 $C_0 > 0$ 的标量函数 $J(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + C_0}$,

该格式在每个时间步长只需要解耦求解两个广义的 Stokes 问题, 且满足离散能量不等式。随后, Zhang 在[15]中给出了二维 Navier-Stokes 方程的 IMEX-SAV 格式的有限元逼近和误差分析。然而, 传统 SAV 方法以辅助变量与速度场隐式耦合, 导致每一时间步长仍需迭代求解一个关于辅助变量的代数方程。为了克服这一缺陷, Li 等在[16]中提出了新的指数型 SAV 压力校正半离散 IMEX 格式, 其利用标量指数函数将辅助变量构造为 $J(t) = e^{-t}$, 证明了该方案的无条件稳定性, 并给出了时间误差分析。[17]也应用了该辅助函数, 在二维空间中将不可压缩的 Navier-Stokes 方程解耦转化为两个广义 stokes 常系数方程和一个含有辅助变量的线性代数方程, 从而简化了求解过程。

本文考虑具有变系数的二维不可压缩磁流体动力学方程组和热对流扩散方程所耦合 MHD-Boussinesq 方程组, 提出了一种 ESAV 一阶 Euler 有限元时间离散格式, 理论证明了该格式的无条件稳定性, 给出了误差估计的主要结果并进行了严格的误差分析, 最后给出了数值算例。

在本文中, 符号 C 用于表示正常数, 它与时间步长 τ 无关, 并且在不同的地方可以不同。

2. 预备知识

我们使用粗体符号 $\mathbf{H}^k(\Omega)$ 、 $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 表示向量值空间 $H^k(\Omega)^2$ 、 $W^{k,p}(\Omega)^2$ 和 $L^p(\Omega)^2$, 其中 Sobolev 空间和 Lebesgue 空间 $H^k(\Omega)$ 、 $W^{k,p}(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 按照经典方式定义(参见文献[5]), 其范数分别记为 $\|\cdot\|_{H^k}$ 、 $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ 和 $\|\cdot\|_{L^p}$ 。空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的函数在边界 $\partial\Omega$ 上迹为 0。 $H^{-1}(\Omega)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间, 其范数记为 $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ 。此外, 我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 来表示 $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 的对偶积。

定义空间:

$$\begin{aligned} X &= H_0^1(\Omega), \quad X_0 = \{\mathbf{v} \in X, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } \Omega\}, \\ W &= \{\mathbf{B} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad W_0 = \{\mathbf{B} \in W, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ in } \Omega\}, \\ M &= L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}, \quad Y = H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

范数定义为:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_X &= \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}, \quad \|q\|_M = \|q\|_{L^2}, \quad \|\theta\|_Y = \|\nabla \theta\|_{L^2}, \\ \|\mathbf{B}\|_W^2 &= \|\operatorname{curl} \mathbf{B}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{B}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

根据 Korn's 不等式, 对 $\forall \mathbf{v} \in X$, $\|D(\mathbf{v})\|_{L^2}$ 与范数 $\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}$ 等价。则有

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \leq C \|D(\mathbf{v})\|_{L^2}.$$

由 Poincaré 不等式和 Sobolev 嵌入定理得

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p} \leq C \|D(\mathbf{v})\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in X, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad (2.1)$$

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in Y, \quad 1 \leq p < +\infty. \quad (2.2)$$

根据 Agmon 不等式和插值不等式, 有

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty} \leq C \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{H^2}^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^4} \leq C \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{H^1}^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{X}, \quad (2.3)$$

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C \|\varphi\|_{L^2}^{1/2} \|\varphi\|_{H^2}^{1/2}, \quad \|\varphi\|_{L^4} \leq C \|\varphi\|_{L^2}^{1/2} \|\varphi\|_{H^1}^{1/2}, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap Y. \quad (2.4)$$

此外, 回顾[18]中的如下不等式:

$$\|\operatorname{curl} \mathbf{v}\|_{L^2} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}, \quad \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (2.5)$$

对于凸域 Ω , 有(参见[18])

$$\|\mathbf{B}\|_{H^1} \leq C (\|\operatorname{curl} \mathbf{B}\|_{L^2} + \|\nabla \cdot \mathbf{B}\|_{L^2}), \quad \forall \mathbf{B} \in \mathbf{W}, \quad (2.6)$$

则

$$\|\mathbf{B}\|_{H^1} \leq C \|\operatorname{curl} \mathbf{B}\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{B} \in \mathbf{W}_0. \quad (2.7)$$

这意味着对任意的 $\mathbf{B} \in \mathbf{W}_0$, $\|\operatorname{curl} \mathbf{B}\|_{L^2}$ 是 $\|\mathbf{B}\|_{H^1}$ 的等价形式, 即存在某个 $C > 0$, 使得

$$C^{-1} \|\operatorname{curl} \mathbf{B}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{B}\|_{H^1} \leq C \|\operatorname{curl} \mathbf{B}\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{B} \in \mathbf{W}_0. \quad (2.8)$$

对于 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{X}$ 和 $\theta, \varphi \in Y$, 定义三线性形式:

$$b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx,$$

$$b_2(\mathbf{u}, \theta, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \varphi dx.$$

利用分部积分很容易验证上述三重线性形式满足以下反对称性质, 即:

$$b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b_1(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (2.9)$$

$$b_2(\mathbf{u}, \theta, \varphi) = -b_2(\mathbf{u}, \varphi, \theta), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_0, \quad \theta, \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (2.10)$$

从而有

$$b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = b_2(\mathbf{u}, \theta, \theta) = 0. \quad (2.11)$$

由可得

$$b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}, \quad (2.12)$$

$$b_2(\mathbf{u}, \theta, \varphi) \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \theta\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}. \quad (2.13)$$

接下来我们做出以下假设:

假设 1: 初始值满足

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{X}_0 \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \mathbf{B}_0 \in \mathbf{W}_0 \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \theta_0 \in Y \cap H^2(\Omega). \quad (2.14)$$

假设 2: 粘性系数 $\nu(\theta)$, 电导率 $\kappa(\theta)$ 和热扩散率 $\sigma(\theta)$ 是三个光滑函数且满足

$$\alpha^{-1} \leq \nu(z), \kappa(z), \sigma(z) \leq \alpha, \quad |\nu'(z)|, |\kappa'(z)|, |\sigma'(z)| \leq \beta, \quad \forall z \in R, \quad (2.15)$$

其中常数 $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ 。

假设 3: MHD-Boussinesq 方程组(1.1)~(1.4)存在唯一全局光滑解, 且满足以下正则性条件:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{B}) &\in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega)), \\ \theta &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega)), \\ (\mathbf{u}_t, \mathbf{B}_t) &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ \theta_t &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ (\mathbf{u}_{tt}, \mathbf{B}_{tt}) &\in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)), \theta_{tt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

注 2.1 在条件(2.14)及 $\nu(z), \kappa(z), \sigma(z) \geq \alpha^{-1}$ 的前提下, [19]已证明当 $\mathbf{f} = \mathbf{g} = 0$ 且 $\psi = 0$ 时, MHD-Boussinesq 系统(1.1)~(1.4)满足正则性条件(2.16)。因此, 我们要求 $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ 且 $\psi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ 以确保(2.16)成立。另外, 该正则性是一个较强的正则性假设, 这是因为在误差估计的证明过程中, 需要用来控制 $\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{B}, \nabla \theta$ 的最大模, 需用到解的 H^3 正则性。当粘度 $\nu(\theta)$, 电导率 $\kappa(\theta)$ 和热扩散系数 $\sigma(\theta)$ 均为正常数时, 此时可仅考虑弱的 H^2 正则性假设。

3. 一阶欧拉 IMEX-ESAV 有限元格式

在本节中, 我们将提出一种一阶欧拉 IMEX-ESAV 有限元格式, 用于逼近方程(1.1)~(1.4), 并证明该数值方法的无条件稳定性, 给出误差估计的主要结果。

我们引入了标量指数函数

$$J(t) = e^{-t} \quad (3.1)$$

则方程(1.1)~(1.4)可被改写为

$$\partial_t \mathbf{u} - \nabla \cdot (\nu(\theta) D(\mathbf{u})) + \frac{J(t)}{e^{-t}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p + \frac{J(t)}{e^{-t}} \mathbf{B} \times \text{curl} \mathbf{B} = \theta \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \text{curl}(\kappa(\theta) \text{curl} \mathbf{B}) - \frac{J(t)}{e^{-t}} \text{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{g}, \quad (3.3)$$

$$\partial_t \theta - \nabla \cdot (\sigma(\theta) \nabla \theta) + \frac{J(t)}{e^{-t}} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \varepsilon u_2 + \psi, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{dJ(t)}{dt} + J(t) = \frac{1}{e^{-t}} (b_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b_2(\mathbf{u}, \theta, \theta) + (\mathbf{B} \times \text{curl} \mathbf{B}, \mathbf{u}) - (\text{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \mathbf{B})), \quad (3.6)$$

其中 $b_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = b_2(\mathbf{u}, \theta, \theta) = 0$ 。令 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ 为时间区间 $[0, T]$ 的均匀划分, 时间步长 $\tau = \frac{T}{N}$,

且 $t_n = n\tau$ 。对于 $0 \leq n \leq N$, 任意函数 $q(t)$, 函数序列 $\{q^n\}_{n=0}^N$, 记

$$D_\tau q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - q^n}{\tau}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

基于上述记号, 我们提出以下适用于 $0 \leq n \leq N-1$ 的一阶欧拉 IMEX-ESAV 时间离散格式。

设 $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \mathbf{B}^0 = \mathbf{B}_0, \theta^0 = \theta_0, J^0 = J_0 = 1$, 已知 $(\mathbf{u}^n, \mathbf{B}^n, \theta^n, J^n)$, 我们通过以下方程求解 $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, \mathbf{B}^{n+1}, \theta^{n+1}, J^{n+1})$:

$$D_\tau \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \cdot (\nu(\theta^n) D(\mathbf{u}^{n+1})) + \frac{J^{n+1}}{\mathbf{e}^{-t_{n+1}}} ((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^n) + \nabla p^{n+1} = \theta^n \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}^{n+1}, \quad (3.7)$$

$$D_\tau \mathbf{B}^{n+1} + \text{curl}(\kappa(\theta^n) \text{curl} \mathbf{B}^{n+1}) + \nabla(\kappa(\theta^n) \nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1}) - \frac{J^{n+1}}{\mathbf{e}^{-t_{n+1}}} \text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n) = \mathbf{g}^{n+1}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0, \quad (3.9)$$

$$D_\tau \theta^{n+1} - \nabla \cdot (\sigma(\theta^n) \nabla \theta^{n+1}) + \frac{J^{n+1}}{\mathbf{e}^{-t_{n+1}}} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \theta^n = \varepsilon u_2^n + \psi^{n+1}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} D_\tau J^{n+1} + J^{n+1} &= \frac{1}{\mathbf{e}^{-t_{n+1}}} (b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) + b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \theta^{n+1})) \\ &+ \frac{1}{\mathbf{e}^{-t_{n+1}}} ((\mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \mathbf{B}^{n+1})). \end{aligned} \quad (3.11)$$

下面我们来说明为什么这个时间离散格式是一种 IMEX 格式。与[16]类似, 我们记 $S^{n+1} = \mathbf{e}^{t_{n+1}} J^{n+1}$, 并设

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + S^{n+1} \hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad \mathbf{B}^{n+1} = \tilde{\mathbf{B}}^{n+1} + S^{n+1} \hat{\mathbf{B}}^{n+1}, \\ \theta^{n+1} &= \tilde{\theta}^{n+1} + S^{n+1} \hat{\theta}^{n+1}, \quad p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + S^{n+1} \hat{p}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

将(3.12)代入时间离散格式(3.7)~(3.11), 其中 $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\mathbf{B}}^{n+1}, \hat{\mathbf{B}}^{n+1}, \tilde{\theta}^{n+1}, \hat{\theta}^{n+1}, \tilde{p}^{n+1}, \hat{p}^{n+1}$ 满足:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\tau} - \nabla \cdot (\nu(\theta^n) D(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) + \nabla \tilde{p}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}^n}{\tau} + \theta^n \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}^{n+1}, \\ \frac{\hat{\mathbf{u}}^{n+1}}{\tau} - \nabla \cdot (\nu(\theta^n) D(\hat{\mathbf{u}}^{n+1})) + \nabla \hat{p}^{n+1} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^n, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0, \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} = 0; \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\tilde{\mathbf{B}}^{n+1}}{\tau} + \text{curl}(\kappa(\theta^n) \text{curl} \tilde{\mathbf{B}}^{n+1}) = \frac{\mathbf{B}^n}{\tau} + \mathbf{g}^{n+1}, \\ \frac{\hat{\mathbf{B}}^{n+1}}{\tau} + \text{curl}(\kappa(\theta^n) \text{curl} \hat{\mathbf{B}}^{n+1}) = \text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{n+1} = 0, \nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}^{n+1} = 0; \tilde{\mathbf{B}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \hat{\mathbf{B}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbf{n} \times \text{curl} \tilde{\mathbf{B}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \mathbf{n} \times \text{curl} \hat{\mathbf{B}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\tilde{\theta}^{n+1}}{\tau} - \nabla \cdot (\sigma(\theta^n) \nabla \tilde{\theta}^{n+1}) = \frac{\theta^n}{\tau} + \varepsilon u_2^n + \psi^{n+1}, \\ \frac{\hat{\theta}^{n+1}}{\tau} - \nabla \cdot (\sigma(\theta^n) \nabla \hat{\theta}^{n+1}) = -\mathbf{u}^n \cdot \nabla \theta^n. \end{cases}$$

解出 $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\mathbf{B}}^{n+1}, \hat{\mathbf{B}}^{n+1}, \tilde{\theta}^{n+1}, \hat{\theta}^{n+1}$ 后, 我们可以通过下列公式求解 S^{n+1} :

$$S^{n+1} = \frac{\mathbf{e}^{t_{n+1}} J^n + \tau \mathbf{e}^{2t_{n+1}} A_1}{1 + \tau - \tau \mathbf{e}^{2t_{n+1}} A_2},$$

其中

$$A_1 = b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \tilde{\theta}^{n+1}) + (\mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \tilde{\mathbf{B}}^{n+1}),$$

$$A_2 = b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) + b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \hat{\theta}^{n+1}) + (\mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) - (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \hat{\mathbf{B}}^{n+1}),$$

因此可得 $\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{B}^{n+1}, \theta^{n+1}, p^{n+1}$ 。

为了证明上述时间离散格式的无条件稳定性, 我们先回顾一下[20]中建立的离散 Gronwall 不等式。

引理 3.1 设 a_k, b_k, γ_k 为非负数, $B > 0$, 使得当 $n \geq 1$ 时有

$$a_n + \tau \sum_{k=1}^n b_k \leq \tau \sum_{k=1}^n \gamma_k a_k + B, \quad (3.13)$$

则当 τ 足够小满足 $\tau \gamma_k < 1$ 且令 $\sigma_k = (1 - \tau \gamma_k)^{-1}$ 时, 对 $n \geq 1$ 成立

$$a_n + \tau \sum_{k=1}^n b_k \leq \exp\left(\tau \sum_{k=1}^n \gamma_k \sigma_k\right) B. \quad (3.14)$$

注释 3.1 如果(3.13)中右边的第一项和仅延伸到 $n-1$, 则估计式(3.14)对所有 $\tau > 0$ 且 $\sigma_k = 1$ 成立。

下一个引理说明了数值格式的无条件稳定性, 其离散能量估计意味着数值解的存在性和唯一性。

引理 3.2 当 $0 \leq n \leq N-1$ 且 τ 足够小时, 在假设 2 的条件下有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + |J^{n+1}|^2 \\ & + \alpha^{-1} \tau \sum_{i=0}^n \left(\|D(\mathbf{u}^{i+1})\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}^{i+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla \theta^{i+1}\|_{L^2}^2 \right) + 2\tau \sum_{i=0}^n |J^{i+1}|^2 \\ & \leq C \left(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2 + |J_0|^2 \right) \\ & + C\tau \sum_{i=0}^n \left(\|\mathbf{f}^{i+1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{g}^{i+1}\|_{L^2}^2 + \|\psi^{i+1}\|_{L^2}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 $\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{B}^{n+1}, \theta^{n+1}, J^{n+1}$ 是通过(3.7)~(3.11)定义的数值解。

证明。将(3.7)与 $2\tau \mathbf{u}^{n+1}$ 作内积, 并利用 $(a-b, a) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 + |a-b|^2)$, Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + 2\alpha^{-1} \tau \|D(\mathbf{u}^{n+1})\|_{L^2}^2 \\ & + 2\tau \frac{J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) + (\mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n, \mathbf{u}^{n+1}) \right) \\ & \leq 2\tau (\theta^n e_2, \mathbf{u}^{n+1}) + 2\tau (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \\ & \leq \alpha^{-1} \tau \|D(\mathbf{u}^{n+1})\|_{L^2}^2 + C\tau \left(\|\theta^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}^{n+1}\|_{L^2}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

作(3.8)与 $2\tau \mathbf{B}^{n+1}$ 的内积, 有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{B}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{B}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n\|_{L^2}^2 + 2\alpha^{-1} \tau \|\mathbf{B}^{n+1}\|_{\mathcal{W}}^2 - 2\tau \frac{J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \mathbf{B}^{n+1}) \\ & \leq 2\tau (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{B}^{n+1}) \leq \alpha^{-1} \tau \|\mathbf{B}^{n+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + C\tau \|\mathbf{g}^{n+1}\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 $\|\mathbf{B}^{n+1}\|_{\mathcal{W}}^2 = \|\text{curl } \mathbf{B}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1}\|_{L^2}^2 = \|\text{curl } \mathbf{B}^{n+1}\|_{L^2}^2$ 。同理, 作(3.9)与 $2\tau \theta^{n+1}$ 的内积, 有

$$\begin{aligned} & \|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\theta^n\|_{L^2}^2 + \|\theta^{n+1} - \theta^n\|_{L^2}^2 + 2\alpha^{-1} \tau \|\nabla \theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + 2\tau \frac{J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \theta^{n+1}) \\ & \leq 2\tau (\varepsilon u_2^n, \theta^{n+1}) + 2\tau (\psi^{n+1}, \theta^{n+1}) \leq \alpha^{-1} \tau \|\nabla \theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C\tau \left(\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\psi^{n+1}\|_{L^2}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

将(3.11)与 $2\tau J^{n+1}$ 相乘得

$$\begin{aligned} & |J^{n+1}|^2 - |J^n|^2 + |J^{n+1} - J^n|^2 + 2\tau |J^{n+1}|^2 \\ &= 2\tau \frac{J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \tilde{\theta}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \tilde{\mathbf{B}}^{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

将(3.16)~(3.19)相加并求和, 我们有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + |J^{n+1}|^2 \\ &+ \alpha^{-1} \tau \sum_{i=0}^n \left(\|D(\mathbf{u}^{i+1})\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}^{i+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla \theta^{i+1}\|_{L^2}^2 \right) + 2\tau \sum_{i=0}^n |J^{i+1}|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2 + |J_0|^2 + C\tau \sum_{i=0}^n \left(\|\mathbf{u}^i\|_{L^2}^2 + \|\theta^i\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad + C\tau \sum_{i=0}^n \left(\|\mathbf{f}^{i+1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{g}^{i+1}\|_{L^2}^2 + \|\psi^{i+1}\|_{L^2}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

根据引理 3.1 的离散 Gronwall 不等式, 我们可以得到离散能量不等式, 引理 3.2 得证。

本文的主要结果由以下定理给出, 其证明将在第四节中给出。

定理 3.1 假设条件(2.14)~(2.16)成立, 则存在足够小的 $\tau_0 > 0$, 使得当 $\tau < \tau_0$ 时有

$$\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}(t_{m+1})\|_{L^2} + \|\mathbf{B}^{m+1} - \mathbf{B}(t_{m+1})\|_{L^2} + \|\theta^{m+1} - \theta(t_{m+1})\|_{L^2} \leq C\tau, \quad (3.21)$$

$$\tau \sum_{i=0}^m \left(\|D(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}(t_{i+1}))\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}^{i+1} - \mathbf{B}(t_{i+1})\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla(\theta^{i+1} - \theta(t_{i+1}))\|_{L^2}^2 \right) \leq C\tau^2 \quad (3.22)$$

对于 $0 \leq m \leq N-1$ 成立, 其中 $C > 0$ 不依赖于 τ 。

4. 误差分析

在本节中, 我们将给出关于速度 $\mathbf{u}$, 磁场 $\mathbf{B}$ 和温度 θ 在 L^2 -范数和 H^1 -范数下的最优误差估计的主要结果。

对于 $0 \leq n \leq N-1$, 引入以下误差分解:

$$\begin{cases} e_u^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}(t_{n+1}), \\ e_B^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}(t_{n+1}), \\ e_p^{n+1} = p^{n+1} - p(t_{n+1}), \\ e_\theta^{n+1} = \theta^{n+1} - \theta(t_{n+1}), \\ e_J^{n+1} = J^{n+1} - J(t_{n+1}). \end{cases} \quad (4.1)$$

此外, 记

$$e_u^0 = e_B^0 = 0, \quad e_\theta^0 = 0. \quad (4.2)$$

定理 4.1 假设条件(2.14)~(2.15)和正则性假设(2.16)成立, 那么存在充分小的 $\tau_0 > 0$, 使得当 $\tau < \tau_0$ 时, 有如下的估计成立:

$$\begin{aligned} & \|e_u^{m+1}\|_{L^2}^2 + \|e_B^{m+1}\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^{m+1}\|_{L^2}^2 + |e_J^{m+1}|^2 \\ &+ \alpha^{-1} \tau \sum_{i=0}^m \left(\|D(e_u^{i+1})\|_{L^2}^2 + \|e_B^{i+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla e_\theta^{i+1}\|_{L^2}^2 \right) + \tau \sum_{i=0}^m |e_J^{i+1}|^2 \leq C_0^2 \tau^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 C_0 是与 τ 无关的常数。

证明: 设 $R_u^{n+1}, R_B^{n+1}, R_\theta^{n+1}, R_J^{n+1}$ 为定义如下的截断误差:

$$R_u^{n+1} = \frac{\partial \mathbf{u}(t_{n+1})}{\partial t} - \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dt, \quad (4.4)$$

$$R_B^{n+1} = \frac{\partial \mathbf{B}(t_{n+1})}{\partial t} - \frac{\mathbf{B}(t_{n+1}) - \mathbf{B}(t_n)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} dt, \quad (4.5)$$

$$R_\theta^{n+1} = \frac{\partial \theta(t_{n+1})}{\partial t} - \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dt, \quad (4.6)$$

$$R_J^{n+1} = \frac{\partial J(t_{n+1})}{\partial t} - \frac{J(t_{n+1}) - J(t_n)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n - t) \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} dt, \quad (4.7)$$

在(3.2)~(3.6)式中取 $t = t_{n+1}$, 并从(3.7)~(3.11)中减去, 我们可以得到以下误差方程:

$$\begin{aligned} & D_\tau e_u^{n+1} - \nabla \cdot \left(\nu(\theta^n) D(e_u^{n+1}) \right) + \nabla e_p^{n+1} + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n \right) \\ &= R_u^{n+1} + \nabla \cdot \left(\left(\nu(\theta^n) - \nu(\theta(t_{n+1})) \right) D(\mathbf{u}(t_{n+1})) \right) - \frac{J(t_{n+1})}{e^{-t_{n+1}}} \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t_{n+1}) + \mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n - \mathbf{B}(t_{n+1}) \times \text{curl } \mathbf{B}(t_{n+1}) \right) + (\theta^n - \theta(t_{n+1})) e_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & D_\tau e_B^{n+1} + \text{curl} \left(\kappa(\theta^n) \text{curl } e_B^{n+1} \right) - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n) \\ &= R_B^{n+1} - \text{curl} \left(\left(\kappa(\theta^n) - \kappa(\theta(t_{n+1})) \right) \text{curl } \mathbf{B}(t_{n+1}) \right) \\ &\quad + \frac{J(t_{n+1})}{e^{-t_{n+1}}} \left(\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n) - \text{curl}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \times \mathbf{B}(t_{n+1})) \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & D_\tau e_\theta^{n+1} - \nabla \cdot \left(\sigma(\theta^n) \nabla e_\theta^{n+1} \right) + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \theta^n \\ &= R_\theta^{n+1} + \nabla \cdot \left(\left(\sigma(\theta^n) - \sigma(\theta(t_{n+1})) \right) \nabla \theta(t_{n+1}) \right) \\ &\quad - \frac{J(t_{n+1})}{e^{-t_{n+1}}} \left(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \theta^n - \mathbf{u}(t_{n+1}) \cdot \nabla \theta(t_{n+1}) \right) + \varepsilon(u_2^n - u_2(t_{n+1})), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & D_\tau e_J^{n+1} + e_J^{n+1} = R_J^{n+1} + \frac{1}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - b_1(\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right. \\ &\quad \left. + b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \theta^{n+1}) - b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}), \theta(t_{n+1}), \theta(t_{n+1})) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - (\mathbf{B}(t_{n+1}) \times \text{curl } \mathbf{B}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right. \\ &\quad \left. + (\text{curl}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \times \mathbf{B}(t_{n+1})), \mathbf{B}(t_{n+1})) - (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \mathbf{B}^{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

我们假设当 $m = n-1$ 时(4.3)成立($1 \leq n \leq N-1$), 即:

$$\begin{aligned} & \|e_u^n\|_{L^2}^2 + \|e_B^n\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + |e_J^n|^2 \\ &+ \alpha^{-1} \tau \sum_{i=0}^{n-1} \left(\|D(e_u^{i+1})\|_{L^2}^2 + \|e_B^{i+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla e_\theta^{i+1}\|_{L^2}^2 \right) + \tau \sum_{i=0}^{n-1} |e_J^{i+1}|^2 \leq C_0^2 \tau^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

因此可以得到

$$\|e_u^n\|_{L^2}^2 + \|e_B^n\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 \leq C_0^2 \tau^2, \quad \|e_u^n\|_{H^1}^2 + \|e_B^n\|_{W^1}^2 + \|e_\theta^n\|_{H^1}^2 \leq \alpha C_0^2 \tau,$$

于是存在充分小的 $\tau < \tau_1$ 使得 $\|e_B^n\|_{L^2}^2, \|e_u^n\|_{H^1}^2, \|e_B^n\|_{W^1}^2, \|e_\theta^n\|_{H^1}^2 \leq 1$, 从而可以推出

$$\|u^n\|_{H^1}^2 \leq \|e_u^n\|_{H^1}^2 + \|u(t_n)\|_{H^1}^2 \leq C, \quad \|B^n\|_{W^1}^2 \leq \|e_B^n\|_{W^1}^2 + \|B(t_n)\|_{W^1}^2 \leq C. \quad (4.13)$$

第一步: 估计 e_u^{n+1}

取(4.8)与 e_u^{n+1} 的内积, 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_u^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{\|e_u^{n+1} - e_u^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \alpha^{-1} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(u^n, u^n, e_u^{n+1}) + (B^n \times \text{curl } B^n, e_u^{n+1}) \right) \\ & \leq (R_u^{n+1}, e_u^{n+1}) + b_1(u(t_{n+1}), u(t_{n+1}), e_u^{n+1}) - b_1(u^n, u^n, e_u^{n+1}) \\ & + (B(t_{n+1}) \times \text{curl } B(t_{n+1}), e_u^{n+1}) - (B^n \times \text{curl } B^n, e_u^{n+1}) \\ & + ((\theta^n - \theta(t_{n+1}))e_2, e_u^{n+1}) + ((\nu(\theta^n) - \nu(\theta(t_{n+1})))D(u(t_{n+1})), D(e_u^{n+1})). \end{aligned} \quad (4.14)$$

我们将按如下方式估计(4.14)右边的项。容易看到

$$(R_u^{n+1}, e_u^{n+1}) \leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{H^{-1}}^2 dt, \quad (4.15)$$

且

$$\begin{aligned} & b_1(u(t_{n+1}), u(t_{n+1}), e_u^{n+1}) - b_1(u^n, u^n, e_u^{n+1}) \\ & = b_1(u(t_{n+1}) - u^n, u(t_{n+1}), e_u^{n+1}) + b_1(u^n, u(t_{n+1}) - u^n, e_u^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

首先估计(4.16)右边的第一项, 根据 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned} & b_1(u(t_{n+1}) - u^n, u(t_{n+1}), e_u^{n+1}) \\ & \leq C \|u(t_{n+1}) - u^n\|_{L^2} \|u(t_{n+1})\|_{H^2} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \\ & \leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_u^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{L^2}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

接着估计(4.16)右边的第二项, 由(2.3), (2.9)和(4.13)可得

$$\begin{aligned} & b_1(u^n, u(t_{n+1}) - u^n, e_u^{n+1}) \\ & = b_1(u^n, u(t_{n+1}) - u(t_n), e_u^{n+1}) - b_1(u^n, e_u^n, e_u^{n+1}) - b_1(u(t_n), e_u^n, e_u^{n+1}) \\ & \leq C \|u^n\|_{H^1} \|u(t_{n+1}) - u(t_n)\|_{H^1} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} + C \|e_u^n\|_{L^4}^2 \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \\ & + C \|u(t_n)\|_{H^2} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \|e_u^n\|_{L^2} \\ & \leq C \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \left(\|u^n\|_{H^1} \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt \right\|_{H^1} + \|e_u^n\|_{L^2} \|u(t_n)\|_{H^2} \right) \\ & + C \|e_u^n\|_{L^2} \|e_u^n\|_{H^1} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \\ & \leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_u^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{H^1}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.18)$$

对于(4.14)右边的第四和第五项, 我们有

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{B}(t_{n+1}) \times \operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}), e_u^{n+1}) - (\mathbf{B}^n \times \operatorname{curl} \mathbf{B}^n, e_u^{n+1}) \\
&= (\operatorname{curl}(\mathbf{B}^n - \mathbf{B}(t_{n+1})) \times \mathbf{B}^n, e_u^{n+1}) + (\operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}) \times (\mathbf{B}^n - \mathbf{B}(t_{n+1})), e_u^{n+1}).
\end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19)右边的第一项可被改写为

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{curl}(\mathbf{B}^n - \mathbf{B}(t_{n+1})) \times \mathbf{B}^n, e_u^{n+1}) \\
&= (\operatorname{curl} e_B^n \times e_B^n, e_u^{n+1}) + (\operatorname{curl} e_B^n \times \mathbf{B}(t_n), e_u^{n+1}) + (\operatorname{curl}(\mathbf{B}(t_n) - \mathbf{B}(t_{n+1})), e_u^{n+1}).
\end{aligned} \quad (4.20)$$

利用等式 $(\operatorname{curl} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2$, (4.20)右边第一项的估计如下:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{curl} e_B^n \times e_B^n, e_u^{n+1}) &= ((e_B^n \cdot \nabla) e_B^n, e_u^{n+1}) - \frac{1}{2} (\nabla |e_B^n|^2, e_u^{n+1}) \\
&\leq C \|e_B^n\|_{L^4}^2 \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_B^n\|_{H^1}^2 \|e_B^n\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_B^n\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \quad (4.21)$$

对于(4.20)右边第二项的估计, 通过等式 $\operatorname{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}$ 和分部积分, 可以得到

$$\begin{aligned}
(\operatorname{curl} e_B^n \times \mathbf{B}(t_n), e_u^{n+1}) &= (\mathbf{B}(t_n) \times e_u^{n+1}, \operatorname{curl} e_B^n) \\
&= (\operatorname{curl}(\mathbf{B}(t_n) \times e_u^{n+1}), e_B^n) + \langle \mathbf{n} \times e_B^n, \mathbf{B}(t_n) \times e_u^{n+1} \rangle \\
&= ((e_u^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{B}(t_n), e_B^n) - ((\mathbf{B}(t_n) \cdot \nabla) e_u^{n+1}, e_B^n) \\
&\leq C \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \|\mathbf{B}(t_n)\|_{H^2} \|e_B^n\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_B^n\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \quad (4.22)$$

再根据(4.13), 以及与(4.22)类似的方法, 有

$$\begin{aligned}
(\operatorname{curl}(\mathbf{B}(t_n) - \mathbf{B}(t_{n+1})) \times \mathbf{B}^n, e_u^{n+1}) &= -((\mathbf{B}^n \cdot \nabla) e_u^{n+1}, \mathbf{B}^n) + (e_u^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{B}^n, \mathbf{B}(t_n) - \mathbf{B}(t_{n+1}) \\
&\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C\tau \|\mathbf{B}^n\|_{H^1}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{B}_t\|_{H^1}^2 dt \\
&\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{B}_t\|_{H^1}^2 dt.
\end{aligned} \quad (4.23)$$

那么(4.19)右边第二项的估计为

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}) \times (\mathbf{B}^n - \mathbf{B}(t_{n+1})), e_u^{n+1}) \\
&\leq C \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \|\mathbf{B}(t_{n+1})\|_{H^2} \|\mathbf{B}^n - \mathbf{B}(t_n) + \mathbf{B}(t_n) - \mathbf{B}(t_{n+1})\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{B}_t\|_{L^2}^2 dt.
\end{aligned} \quad (4.24)$$

此外, (4.14)右边最后两项的估计为

$$((\theta^n - \theta(t_{n+1})) e_2, e_u^{n+1}) \leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{L^2}^2 dt, \quad (4.25)$$

和

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\nu(\theta^n) - \nu(\theta(t_{n+1})) \right) D(\mathbf{u}(t_{n+1})), D(e_u^{n+1}) \right) \\
 &= \left(\nu'(\xi_1) (\theta^n - \theta(t_{n+1})) D(\mathbf{u}(t_{n+1})), D(e_u^{n+1}) \right) \\
 &\leq C \|e_\theta^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^3} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} + C \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^2} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1} dt \\
 &\leq \frac{1}{18\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^3}^2 \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1}^2 dt,
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

这里是根据假设 2 中的条件(2.15)和拉格朗日中值定理得到的, 其中 ξ_1 在 θ^n 与 $\theta(t_{n+1})$ 之间。将(4.15)~(4.26)代入到(4.14)中, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_u^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{\|e_u^{n+1} - e_u^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{1}{2\alpha} \|D(e_u^{n+1})\|_{L^2}^2 \\
 &+ \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, e_u^{n+1}) + (\mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n, e_u^{n+1}) \right) \\
 &\leq C \left(\|e_u^n\|_{L^2}^2 + \|e_B^n\|_{L^2}^2 \right) + C \left(1 + \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^3}^2 \right) \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 \\
 &+ C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{H^{-1}}^2 + \|\mathbf{B}_t\|_{H^1}^2 + \|\theta_t\|_{H^1}^2 \right) dt,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 $\tau < \tau_1$ 充分小。

第二步: 估计 e_B^{n+1}

作(4.9)与 e_B^{n+1} 的内积, 我们得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|e_B^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_B^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{\|e_B^{n+1} - e_B^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \alpha^{-1} \|e_B^{n+1}\|_W^2 - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), e_B^{n+1} \right) \\
 &\leq \left(R_B^{n+1}, e_B^{n+1} \right) + \left(\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), e_B^{n+1} \right) - \left(\text{curl}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \times \mathbf{B}(t_{n+1})), e_B^{n+1} \right) \\
 &\quad - \left(\text{curl} \left(\left(\kappa(\theta^n) - \kappa(\theta(t_{n+1})) \right) \text{curl } \mathbf{B}(t_{n+1}) \right), e_B^{n+1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

我们可以按如下方式来估计(4.28)右边的项。首先容易看到

$$\left(R_B^{n+1}, e_B^{n+1} \right) \leq \frac{1}{8\alpha} \|e_B^{n+1}\|_W^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{B}_t\|_{H^{-1}}^2 dt, \tag{4.29}$$

且

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), e_B^{n+1} \right) - \left(\text{curl}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \times \mathbf{B}(t_{n+1})), e_B^{n+1} \right) \\
 &= \left(\text{curl} \left(\left(\mathbf{B}(t_{n+1}) - \mathbf{B}^n \right) \times \mathbf{u}(t_{n+1}) \right), e_B^{n+1} \right) + \left(\text{curl} \left(\mathbf{B}^n \times (\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}^n) \right), e_B^{n+1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

利用(2.5)和分部积分, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{curl} \left(\left(\mathbf{B}(t_{n+1}) - \mathbf{B}^n \right) \times \mathbf{u}(t_{n+1}) \right), e_B^{n+1} \right) \\
 &= \left(\left(\mathbf{B}(t_{n+1}) - \mathbf{B}^n \right) \times \mathbf{u}(t_{n+1}), \text{curl } e_B^{n+1} \right) \\
 &\leq \frac{1}{8\alpha} \|e_B^{n+1}\|_W^2 + C \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{B}_t\|_{L^2}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

而对于(4.30)右边的第二项, 通过(2.5), (2.3)和(4.13)可得

$$\begin{aligned}
 & \left(\operatorname{curl} \left(\mathbf{B}^n \times (\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}^n) \right), e_B^{n+1} \right) \\
 &= \left(e_B^n \times (\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)), \operatorname{curl} e_B^{n+1} \right) - \left(e_B^n \times e_u^n, \operatorname{curl} e_B^{n+1} \right) \\
 & \quad + \left(\mathbf{B}(t_n) \times (\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}^n), \operatorname{curl} e_B^{n+1} \right) \\
 &\leq \frac{1}{8\alpha} \|e_B^{n+1}\|_W^2 + C \|e_B^n\|_{H^1} \|e_B^n\|_{L^2} \|e_u^n\|_{H^1} \|e_u^n\|_{L^2} + C \|\mathbf{B}(t_n)\|_{H^2}^2 \|e_u^n\|_{L^2}^2 \\
 & \quad + C\tau \|e_B^n\|_{H^1}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 dt + C\tau \|\mathbf{B}(t_n)\|_{H^2}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{8\alpha} \|e_B^{n+1}\|_W^2 + C \|e_B^n\|_{H^1}^2 \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C \left(1 + \|e_u^n\|_{H^1}^2 \right) \|e_u^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{8\alpha} \|e_B^{n+1}\|_W^2 + C \left(\|e_B^n\|_{L^2}^2 + \|e_u^n\|_{L^2}^2 \right) + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

根据(2.5)和与(4.26)类似的方法, 存在在 θ^n 与 $\theta(t_{n+1})$ 之间的 ξ_2 , 使得如下估计成立:

$$\begin{aligned}
 & \left(\operatorname{curl} \left((\kappa(\theta^n) - \kappa(\theta(t_{n+1}))) \operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}) \right), e_B^{n+1} \right) \\
 &= \left(\kappa'(\xi_2) (\theta^n - \theta(t_{n+1})), \operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}), \operatorname{curl} e_B^{n+1} \right) \\
 &= \left(\kappa'(\xi_2) e_\theta^n \operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}), \operatorname{curl} e_B^{n+1} \right) + \left(\kappa'(\xi_2) (\theta(t_n) - \theta(t_{n+1})), \operatorname{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}), \operatorname{curl} e_B^{n+1} \right) \\
 &\leq C \|e_\theta^n\|_{L^2} \|\mathbf{B}(t_{n+1})\|_{H^3} \|e_B^{n+1}\|_W + C \|\mathbf{B}(t_{n+1})\|_{H^2} \|e_B^{n+1}\|_W \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1} dt \\
 &\leq \frac{1}{8\alpha} \|e_B^{n+1}\|_W^2 + C \|\mathbf{B}(t_{n+1})\|_{H^3}^2 \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

结合(4.28)与(4.29)~(4.33), 存在充分小的 $\tau < \tau_1$, 使得

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|e_B^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_B^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{\|e_B^{n+1} - e_B^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \alpha^{-1} \|e_B^{n+1}\|_W^2 - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(\operatorname{curl} (\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), e_B^{n+1} \right) \\
 &\leq C \left(\|e_u^n\|_{L^2}^2 + \|e_B^n\|_{L^2}^2 \right) + C \|\mathbf{B}(t_{n+1})\|_{H^3}^2 \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 \\
 & \quad + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{B}_t\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}_t\|_{H^{-1}}^2 + \|\theta_t\|_{H^1}^2 \right) dt.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

第三步: 估计 e_θ^{n+1}

将(4.10)与 e_θ^{n+1} 作内积, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_\theta^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{\|e_\theta^n - e_\theta^{n-1}\|_{L^2}^2}{2\tau} + \alpha^{-1} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, e_\theta^{n+1}) \\
 &\leq \left(R_\theta^{n+1}, e_\theta^{n+1} \right) + b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}), \theta(t_{n+1}), e_\theta^{n+1}) - b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, e_\theta^{n+1}) \\
 & \quad - \left((\sigma(\theta^n) - \sigma(\theta(t_{n+1}))) \nabla \theta(t_{n+1}), \nabla e_\theta^{n+1} \right) + \left(\varepsilon(u_2^n - u_2(t_{n+1})), e_\theta^{n+1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

易知

$$\left(R_\theta^{n+1}, e_\theta^{n+1} \right) \leq \frac{1}{10\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^{-1}}^2 dt. \tag{4.36}$$

对于(4.35)右边的第二项, 有

$$\begin{aligned} & b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}), \theta(t_{n+1}), e_\theta^{n+1}) - b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, e_\theta^{n+1}) \\ &= b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}^n, \theta(t_{n+1}), e_\theta^{n+1}) + b_2(\mathbf{u}^n, \theta(t_{n+1}) - \theta^n, e_\theta^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

我们用与上述类似的方法来估计(4.37)的右边:

$$b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}^n, \theta(t_{n+1}), e_\theta^{n+1}) \leq \frac{1}{10\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 dt, \quad (4.38)$$

并且利用(4.13)得

$$\begin{aligned} & b_2(\mathbf{u}^n, \theta(t_{n+1}) - \theta^n, e_\theta^{n+1}) \\ &= b_2(\mathbf{u}^n, \theta(t_{n+1}) - \theta(t_n), e_\theta^{n+1}) - b_2(e_\theta^n, e_\theta^n, e_\theta^{n+1}) - b_2(\mathbf{u}(t_n), e_\theta^n, e_\theta^{n+1}) \\ &\leq C \|\mathbf{u}^n\|_{H^1} \|\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)\|_{H^1} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2} \\ &\quad + C \|e_\theta^n\|_{L^4} \|e_\theta^n\|_{L^4} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2} + C \|\mathbf{u}(t_n)\|_{H^2} \|e_\theta^n\|_{L^2} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{10\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|e_\theta^n\|_{H^1}^2 \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C \left(\|e_\theta^n\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{u}(t_n)\|_{H^2}^2 \right) \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \|\mathbf{u}^n\|_{H^1}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{10\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \left(\|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 \right) + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.39)$$

对于(4.35)右边的最后两项, 有

$$\begin{aligned} & (\varepsilon(u_2^n - u_2(t_{n+1})), e_\theta^{n+1}) = (\varepsilon(u_2^n - u_2(t_n) + u_2(t_n) - u_2(t_{n+1})), e_\theta^{n+1}) \\ &= (\varepsilon(u_2^n - u_2(t_n)), e_\theta^{n+1}) - \left(\varepsilon \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_{2t} dt, e_\theta^{n+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{10\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 dt, \end{aligned} \quad (4.40)$$

和

$$\begin{aligned} & -\left((\sigma(\theta^n) - \sigma(\theta(t_{n+1}))) \nabla \theta(t_{n+1}), \nabla e_\theta^{n+1} \right) \\ &= -\left(\sigma'(\xi_3) (\theta^n - \theta(t_{n+1})) \nabla \theta(t_{n+1}), \nabla e_\theta^{n+1} \right) \\ &= -\left(\sigma'(\xi_3) e_\theta^n \nabla \theta(t_{n+1}), \nabla e_\theta^{n+1} \right) - \left(\sigma'(\xi_3) (\theta(t_n) - \theta(t_{n+1})) \nabla \theta(t_{n+1}), \nabla e_\theta^{n+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{10\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\theta(t_{n+1})\|_{H^3}^2 \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1}^2 dt, \end{aligned} \quad (4.41)$$

其中 ξ_3 在 θ^n 与 $\theta(t_{n+1})$ 之间。

将(4.36)~(4.41)的估计代入到不等式(4.35)中, 当 $\tau < \tau_1$ 时, 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_\theta^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{\|e_\theta^{n+1} - e_\theta^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + \frac{1}{2\alpha} \|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b(\mathbf{u}^n, \theta^n, e_\theta^{n+1}) \\ &\leq C \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C \left(1 + \|\theta(t_{n+1})\|_{H^3}^2 \right) \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\theta_t\|_{H^1}^2 + \|\theta_{tt}\|_{H^{-1}}^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (4.42)$$

第四步: 估计 e_J^{n+1}

在(4.11)两边分别乘上 e_J^{n+1} , 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{|e_J^{n+1}|^2 - |e_J^n|^2}{2\tau} + \frac{|e_J^{n+1} - e_J^n|^2}{2\tau} + |e_J^{n+1}|^2 \\
 &= R_J^{n+1} e_J^{n+1} + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - b_1(\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right) \\
 & \quad + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \theta^{n+1}) - b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}), \theta(t_{n+1}), \theta(t_{n+1})) \right) \\
 & \quad + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((\text{curl}(\mathbf{u}(t_{n+1}) \times \mathbf{B}(t_{n+1})), \mathbf{B}(t_{n+1})) - (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), \mathbf{B}^{n+1}) \right) \\
 & \quad + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((\mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - (\mathbf{B}(t_{n+1}) \times \text{curl} \mathbf{B}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right).
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

先估计(4.43)等号右边的第一项:

$$R_J^{n+1} e_J^{n+1} \leq \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} |J_u|^2 dt. \tag{4.44}$$

再根据(2.11), (4.43)右边的第二项满足

$$\begin{aligned}
 & \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - b_1(\mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right) \\
 &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, e_u^{n+1}) + b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right. \\
 & \quad \left. + b_1(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right) \\
 &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, e_u^{n+1}) + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})).
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

下面来估计(4.45)右边的第二项, 由引理 3.2, 假设 3 和(4.13)得

$$\begin{aligned}
 & \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \\
 &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_1(\mathbf{u}^n, e_u^n, \mathbf{u}(t_{n+1})) + b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}(t_{n+1}), \mathbf{u}(t_{n+1})) \right) \\
 &\leq C |e_J^{n+1}| \|\mathbf{u}^n\|_{H^1} \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^2} \|e_u^n\|_{L^2} + C |e_J^{n+1}| \|\mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^2} \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}(t_{n+1})\|_{H^1} \\
 &\leq \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 + C \|e_u^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

再回到(4.43)右边的第三项, 通过利用与(4.46)相似的方法, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left(b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, \theta^{n+1}) - b_2(\mathbf{u}(t_{n+1}), \theta(t_{n+1}), \theta(t_{n+1})) \right) \\
 &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, e_\theta^{n+1}) + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n - \theta(t_{n+1}), \theta(t_{n+1})) \\
 &\leq \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 + C \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\theta_t\|_{H^1}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

接着, (4.43)右边的第四项可被改写为

$$\begin{aligned} & \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((B^n \times \operatorname{curl} B^n, u^{n+1}) - (B(t_{n+1}) \times \operatorname{curl} B(t_{n+1}), u(t_{n+1})) \right) \\ &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (B^n \times \operatorname{curl} B^n, e_u^{n+1}) - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (B^n \times \operatorname{curl} (B(t_{n+1}) - B^n), u(t_{n+1})) \\ & \quad - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} ((B(t_{n+1}) - B^n) \times \operatorname{curl} B(t_{n+1}), u(t_{n+1})). \end{aligned} \quad (4.48)$$

根据(4.13), (4.48)右边第二项的估计如下:

$$\begin{aligned} & -\frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (B^n \times \operatorname{curl} (B(t_{n+1}) - B^n), u(t_{n+1})) \\ &= -\frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (e_B^n \times \operatorname{curl} (B(t_{n+1}) - B^n), u(t_{n+1})) - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (\operatorname{curl} (u(t_{n+1}) \times B(t_n)), B(t_{n+1}) - B^n) \\ &\leq C |e_J^{n+1}| \|e_B^n\|_{L^2} \|B(t_{n+1}) - B^n\|_{H^1} \|u(t_{n+1})\|_{H^2} + C |e_J^{n+1}| \|B(t_n)\|_{H^2} \|u(t_{n+1})\|_{H^2} \|B(t_{n+1}) - B^n\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 + C \left(1 + \|e_B^n\|_{H^1}^2 \right) \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C \tau \|e_B^n\|_{L^2}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|B_t\|_{H^1}^2 dt + C \tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|B_t\|_{L^2}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 + C \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C \tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|B_t\|_{H^1}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

由正则性假设, 易知

$$\begin{aligned} & -\frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} ((B(t_{n+1}) - B^n) \times \operatorname{curl} B(t_{n+1}), u(t_{n+1})) \\ &\leq \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 + C \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C \tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|B_t\|_{L^2}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.50)$$

最后来估计(4.43)右边的最后一项, 同理有

$$\begin{aligned} & \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((\operatorname{curl} (u(t_{n+1}) \times B(t_{n+1})), B(t_{n+1})) - (\operatorname{curl} (u^n \times B^n), B^{n+1}) \right) \\ &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((\operatorname{curl} ((B^n - B(t_{n+1})) \times u^n), B(t_{n+1})) \right. \\ & \quad \left. + (\operatorname{curl} (B(t_{n+1}) \times (u^n - u(t_{n+1}))), B(t_{n+1})) + (\operatorname{curl} (B^n \times u^n), e_B^{n+1}) \right) \\ &= \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} \left((\operatorname{curl} (B^n \times u^n), e_B^{n+1}) + (e_B^n \times u^n, \operatorname{curl} B(t_{n+1})) \right. \\ & \quad \left. + ((B(t_n) - B(t_{n+1})) \times u^n, \operatorname{curl} B(t_{n+1})) + (B(t_{n+1}) \times (u^n - u(t_{n+1})), \operatorname{curl} B(t_{n+1})) \right) \\ &\leq \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (\operatorname{curl} (B^n \times u^n), e_B^{n+1}) + \frac{1}{16} |e_J^{n+1}|^2 \\ & \quad + C \|e_B^n\|_{L^2}^2 + C \|e_u^n\|_{L^2}^2 + C \tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\|B_t\|_{H^1}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2) dt. \end{aligned} \quad (4.51)$$

因此, 当 $\tau < \tau_1$ 时, 结合(4.43)与(4.44)~(4.51)得到了

$$\begin{aligned} & \frac{|e_J^{n+1}|^2 - |e_J^n|^2}{2\tau} + \frac{|e_J^{n+1} - e_J^n|^2}{2\tau} + \frac{|e_J^{n+1}|^2}{2} \\ & \leq \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_1(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, e_u^{n+1}) + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (\mathbf{B}^n \times \text{curl } \mathbf{B}^n, e_u^{n+1}) \\ & \quad - \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} (\text{curl}(\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n), e_B^{n+1}) + \frac{e_J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}} b_2(\mathbf{u}^n, \theta^n, e_\theta^{n+1}) \\ & \quad + C \left(\|e_u^n\|_{L^2}^2 + \|e_B^n\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^n\|_{L^2}^2 \right) \\ & \quad + C\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{B}_t\|_{H^1}^2 + \|\theta_t\|_{H^1}^2 + |J_u|^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (4.52)$$

从而, 把(4.27), (4.34), (4.42)和(4.52)加在一起, n 从 0 到 m 求和($m \leq N-1$), 利用假设 3 可以得到

$$\begin{aligned} & \|e_u^{m+1}\|_{L^2}^2 + \|e_B^{m+1}\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^{m+1}\|_{L^2}^2 + |e_J^{m+1}|^2 \\ & + \alpha^{-1} \tau \sum_{i=0}^m \left(\|D(e_u^{i+1})\|_{L^2}^2 + \|e_B^{i+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla e_\theta^{i+1}\|_{L^2}^2 \right) + \tau \sum_{i=0}^m |e_J^{i+1}|^2 \\ & \leq C\tau \sum_{i=0}^m \left(\|e_u^i\|_{L^2}^2 + \|e_B^i\|_{L^2}^2 \right) + C\tau \sum_{i=0}^m \left(1 + \|\mathbf{u}(t_{i+1})\|_{H^3}^2 + \|\mathbf{B}(t_{i+1})\|_{H^3}^2 + \|\theta(t_{i+1})\|_{H^3}^2 \right) \|e_\theta^i\|_{L^2}^2 + C\tau^2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

第五步: 误差估计

在(4.53)中令 $m=0$, 注意到(4.2), 则有

$$\|e_u^1\|_{L^2}^2 + \|e_B^1\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^1\|_{L^2}^2 + |e_J^1|^2 + \alpha^{-1} \tau \left(\|D(e_u^1)\|_{L^2}^2 + \|e_B^1\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla e_\theta^1\|_{L^2}^2 \right) + \tau |e_J^1|^2 \leq C_1 \tau^2, \quad (4.54)$$

其中 $C_1 > 0$ 为不依赖于 τ 的常数。因此, 取 $C_0 \geq C_1$, 当 $m=0$ 时(4.3)成立。

接下来我们要证明当 $m=n$ 时(4.3)也成立。根据(4.53), 假设 3 以及引理 3.1 的离散 Gronwall 不等式, 可以推出存在不依赖于 τ 的常数 $C_2 > 0$, 以及充分小的 $\tau_2 > 0$, 当 $\tau < \tau_2$ 时有

$$\begin{aligned} & \|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|e_B^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + |e_J^{n+1}|^2 \\ & + \alpha^{-1} \tau \sum_{i=0}^n \left(\|D(e_u^{i+1})\|_{L^2}^2 + \|e_B^{i+1}\|_{\mathcal{W}}^2 + \|\nabla e_\theta^{i+1}\|_{L^2}^2 \right) + \tau \sum_{i=0}^n |e_J^{i+1}|^2 \leq C_2 \tau^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

因此, 取 $C_0 \geq \max\{C_1, C_2\}$, $\tau_0 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, 则当 $m=n$ 时(4.3)成立。这样我们就完成了定理 4.1 的证明。

5. 数值结果

在本节中, 我们给出数值结果以验证由定理 3.1 中的时间误差估计(3.21)~(3.22)。为简便起见, 我们在单位圆区域 Ω 中求 MHD-Boussinesq 方程(1.1)~(1.4)。粘性系数 $\nu(\theta)$, 电导率 $\kappa(\theta)$ 和热扩散率 $\sigma(\theta)$ 由以下公式给出:

$$\nu(\theta) = \kappa(\theta) = \sigma(\theta) = 1 + 0.1\theta.$$

我们选取适当的 f 、 g 和 ψ 使得精确解 $(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p, \theta)$ 具有以下形式:

$$\mathbf{u} = \left(x^2(1-x)^2 y(1-y)(1-2y) e^{-t}, -x(1-x)(1-2x) y^2(1-y)^2 e^{-t} \right)^T,$$

$$\mathbf{B} = \left(x^3(1-x)^3 y^2(1-y)^2(1-2y)e^{-t}, -x^2(1-x)^2(1-2x)y^3(1-y)^3 e^{-t} \right)^T,$$

$$p = (2x-1)(2y-1)e^{-t}, \quad \theta = x(x-1)y(y-1)e^{-t},$$

则 $\mathbf{u}, \mathbf{B}$ 和 θ 都满足齐次边界条件(1.6)。此外我们设定终止时间 $T=1$, 记

$$\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}\|_{l^2(X)} = \left(\tau \sum_{n=0}^{N-1} \|D(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}(t_{n+1}))\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|\mathbf{B}^N - \mathbf{B}\|_{l^2(W)} = \left(\tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}(t_{n+1})\|_W^2 \right)^{1/2},$$

$$\|\theta^N - \theta\|_{l^2(Y)} = \left(\tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla(\theta^{n+1} - \theta(t_{n+1}))\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Table 1. Numerical results of the velocity and the magnetic field

表 1. 速度和磁场的数值结果

τ	$\ \mathbf{u}^N - \mathbf{u}\ _{L^2}$	阶数	$\ \mathbf{u}^N - \mathbf{u}\ _{l^2(X)}$	阶数	$\ \mathbf{B}^N - \mathbf{B}\ _{L^2}$	阶数	$\ \mathbf{B}^N - \mathbf{B}\ _{l^2(W)}$	阶数
1/2	5.03038E-05	-	6.37786E-04	-	2.66587E-07	-	2.22005E-06	-
1/4	2.21864E-05	1.18	3.23820E-04	0.98	1.23679E-07	1.11	1.11571E-06	0.99
1/8	1.03910E-05	1.09	1.63383E-04	0.99	5.95780E-08	1.05	5.58934E-07	1.00
1/16	5.02998E-06	1.05	8.28186E-05	0.98	2.92441E-08	1.03	2.80032E-07	1.00

Table 2. Numerical results of the temperature and the scalar auxiliary function

表 2. 温度和标量辅助函数的数值结果

τ	$\ \theta^N - \theta\ _{L^2}$	阶数	$\ \theta^N - \theta\ _{l^2(Y)}$	阶数	$ J^N - J $	阶数
1/2	1.84768E-04	-	1.00091E-03	-	7.65650E-02	-
1/4	8.57845E-05	1.11	5.23407E-04	0.94	4.17206E-02	0.88
1/8	4.10787E-05	1.06	2.68320E-04	0.96	2.18649E-02	0.93
1/16	2.00912E-05	1.03	1.37226E-04	0.97	1.12059E-02	0.96

通过依次取逐渐缩小的时间步长 $\tau = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ 。在此条件下, 由(3.21)~(3.22)可得

$$\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{B}^N - \mathbf{B}\|_{L^2} + \|\theta^N - \theta\|_{L^2} + |J^N - J| \leq C\tau, \quad (5.1)$$

$$\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}\|_{l^2(X)} + \|\mathbf{B}^N - \mathbf{B}\|_{l^2(W)} + \|\theta^N - \theta\|_{l^2(Y)} \leq C\tau. \quad (5.2)$$

数值结果展示在表 1, 表 2 中, 这些表格给出了不同尺寸 h 对应的数值误差及其收敛速率。可以清楚地观察到, 在 L^2 -范数和 $l^2(H^1)$ -范数下呈现一阶收敛速率, 这与理论分析的(5.1)~(5.2)式高度吻合。

参考文献

- [1] Marchioro, C. and Pulvirenti, M. (1994) Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids. Springer-Verlag.
- [2] Mulone, G. and Rionero, S. (2003) Necessary and Sufficient Conditions for Nonlinear Stability in the Magnetic Bénard

- Problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **166**, 197-218. <https://doi.org/10.1007/s00205-002-0230-9>
- [3] Treve, Y.M. and Manley, O.P. (1982) Energy Conserving Galerkin Approximations for 2-D Hydrodynamic and MHD Bénard Convection. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **4**, 319-342. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(82\)90040-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(82)90040-9)
- [4] Barrow, J.D., Maartens, R. and Tsagas, C.G. (2007) Cosmology with Inhomogeneous Magnetic Fields. *Physics Reports*, **449**, 131-171. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.04.006>
- [5] Barleon, L., Casal, V. and Lenhart, L. (1991) MHD Flow in Liquid-Metal-Cooled Blankets. *Fusion Engineering and Design*, **14**, 401-412. [https://doi.org/10.1016/0920-3796\(91\)90021-h](https://doi.org/10.1016/0920-3796(91)90021-h)
- [6] Hashizume, H. (2006) Numerical and Experimental Research to Solve MHD Problem in Liquid Blanket System. *Fusion Engineering and Design*, **81**, 1431-1438. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2005.08.086>
- [7] Smolentsev, S., Moreau, R., Bühler, L. and Mistrangelo, C. (2010) MHD Thermofluid Issues of Liquid-Metal Blankets: Phenomena and Advances. *Fusion Engineering and Design*, **85**, 1196-1205. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2010.02.038>
- [8] Davidson, P.A. (2001) An Introduction to Magnetohydrodynamics. Cambridge University Press.
- [9] Titterton, D. and Weston, J.L. (2004) Strapdown Inertial Navigation Technology. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, **20**, 33-34. <https://doi.org/10.1109/maes.2005.1499250>
- [10] Majda, A.J. and Bertozzi, A.L. (2001) Vorticity and Incompressible Flow. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511613203>
- [11] Shen, J., Xu, J. and Yang, J. (2018) The Scalar Auxiliary Variable (SAV) Approach for Gradient Flows. *Journal of Computational Physics*, **353**, 407-416. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.10.021>
- [12] Shen, J. and Xu, J. (2018) Convergence and Error Analysis for the Scalar Auxiliary Variable (SAV) Schemes to Gradient Flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **56**, 2895-2912. <https://doi.org/10.1137/17m1159968>
- [13] Li, X.L., Shen, J. and Rui, H.X. (2019) Energy Stability and Convergence of SAV Block-Centered Finite Difference Method for Gradient Flows. *Mathematics of Computation*, **88**, 2047-2068. <https://doi.org/10.1090/mcom/3428>
- [14] Lin, L., Yang, Z. and Dong, S. (2019) Numerical Approximation of Incompressible Navier-Stokes Equations Based on an Auxiliary Energy Variable. *Journal of Computational Physics*, **388**, 1-22. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.012>
- [15] Zhang, T. and Yuan, J. (2021) Unconditional Stability and Optimal Error Estimates of Euler Implicit/Explicit-SAV Scheme for the Navier-Stokes Equations. *Journal of Scientific Computing*, **90**, Article No. 1. <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01681-y>
- [16] Li, X., Shen, J. and Liu, Z. (2021) New Sav-Pressure Correction Methods for the Navier-Stokes Equations: Stability and Error Analysis. *Mathematics of Computation*, **91**, 141-167. <https://doi.org/10.1090/mcom/3651>
- [17] Li, X., Wang, W. and Shen, J. (2022) Stability and Error Analysis of IMEX SAV Schemes for the Magneto-Hydrodynamic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **60**, 1026-1054. <https://doi.org/10.1137/21m1430376>
- [18] Gerbeau, J., Le Bris, C. and Lelièvre, T. (2006). Mathematical Methods for the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566656.001.0001>
- [19] Bian, D. and Liu, J. (2017) Initial-Boundary Value Problem to 2D Boussinesq Equations for MHD Convection with Stratification Effects. *Journal of Differential Equations*, **263**, 8074-8101. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.08.034>
- [20] Heywood, J.G. and Rannacher, R. (1990) Finite-Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem. Part IV: Error Analysis for Second-Order Time Discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **27**, 353-384. <https://doi.org/10.1137/0727022>