

具有单扩散系数的S-K-T生物竞争系统的动力 学行为分析

曹 豪¹, 袁晨林¹, 张东培^{1,2*}

¹重庆交通大学数学与统计学院, 重庆

²复杂系统优化与智能控制重庆市高校重点实验室, 重庆

收稿日期: 2026年8月29日; 录用日期: 2026年9月22日; 发布日期: 2026年9月30日

摘 要

本文利用线性全连续场谱理论、动态跃迁理论和线性稳定性理论研究了单扩散系数S-K-T生物竞争模型在正平衡点处的动态跃迁。首先利用线性全连续场谱理论, 得到线性化系统的特征方程, 从而计算出系统的特征值序列以及相应条件下临界控制参数 λ_c 发生正负穿越的PES条件。借助动态跃迁理论, 得到系统发生连续型动态跃迁并且分歧出一个渐近稳定的奇点。最后利用数值模拟对理论进行验证。

关键词

S-K-T生物竞争系统, 动态跃迁, PES条件, 稳定性

Dynamical Behavior Analysis of the S-K-T Biological Competition System with a Single Diffusion Coefficient

Hao Cao¹, Chenlin Yuan¹, Dongpei Zhang^{1,2*}

¹College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

²Key Laboratory of Complex Systems Optimization and Intelligent Control of Chongqing Municipal Education Commission, Chongqing

Received: August 29, 2026; accepted: September 22, 2026; published: September 30, 2026

Abstract

In this paper, by employing the linear completely continuous field spectral theory, the dynamic

*通讯作者。

文章引用: 曹豪, 袁晨林, 张东培. 具有单扩散系数的 S-K-T 生物竞争系统的动力学行为分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 18-29. DOI: 10.12677/aam.2026.1510393

transition theory, and the linear stability theory, we investigate the dynamic transition of the S-K-T biological competition system with a single diffusion coefficient at its positive equilibrium point. First, by means of the linear completely continuous field spectral theory, we derive the characteristic equation of the linearized system, and thereby compute the sequence of eigenvalues. Furthermore, under the corresponding conditions, we establish the Positive Eigenvalue Switching condition under which the critical control parameter crosses from negative to positive. Then, with the aid of the dynamic transition theory, we prove that the system undergoes a continuous dynamic transition and bifurcates an asymptotically stable singular point. Finally, numerical simulations are carried out to verify the theoretical results.

Keywords

S-K-T System, Dynamic Transition, PES Conditions, Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

20 世纪 70 年代, 三位生态学家 N. Shigesada、K. Kawasaki 和 E. Teramoto 共同提出了 S-K-T 生物竞争模型, 用于研究在种间和种内种群压力作用下, 两个竞争物种的空间隔离现象, 该模型的具体形式如下[1]:

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(d_1 + \rho_{11}u + \rho_{12}v)u] + u(a_1 - b_1u - c_1v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta[(d_2 + \rho_{21}u + \rho_{22}v)v] + v(a_2 - b_2u - c_2v), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $\Omega \in R^n$ 为光滑有界区域, $u = u(x, t)$ 和 $v = v(x, t)$ 分别表示两个竞争物种的种群密度。所有参数 a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1, 2$) 和 ρ_{ij} ($i, j=1, 2$) 均为正常数。 d_1 和 d_2 为随机扩散速率, ρ_{11} 和 ρ_{22} 为自扩散速率, ρ_{12} 和 ρ_{21} 为交叉扩散速率。针对系统(1.1)在 Neumann 边界条件下非恒定稳态解, Lou 和 Ni 利用能量估计和拓扑方法, 给出了非恒定稳态解的存在与不存在的判据[2]。Wang、Wu 和 Xu 利用谱分析和奇异摄动方法, 研究了系统(1.1)在 Neumann 边界条件下尖峰稳态的存在性以及线性不稳定性判据[3]。Liu 和 Zhang 利用动态跃迁理论和中心流形约化方法, 系统研究了 S-K-T 生物竞争系统在 Dirichlet 和 Neumann 两种边界条件下的动态跃迁问题, 结果表明系统(1.1)在 Dirichlet 边界条件下发生混合跃迁; 在 Neumann 边界条件下发生混合跃迁、跳跃跃迁和连续跃迁[4]。

当 $\rho_{11} = \rho_{22} = 0$ 时, 系统(1.1)变为如下形式:

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(d_1 + \rho_{12}v)u] + u(a_1 - b_1u - c_1v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta[(d_2 + \rho_{21}u)v] + v(a_2 - b_2u - c_2v), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

此时系统没有自扩散项, Wu 和 Xu 利用积分估计和奇异摄动方法, 研究了系统(1.2)在 Neumann 边界条件下尖峰稳态解的存在性及其结构[5]。Wu 利用谱分析, 研究了系统(1.2)在 Neumann 边界条件下尖峰稳态在线性化意义下的不稳定性[6]。Tang 采用 Lyapunov-Schmidt 约化方法与谱理论, 研究了系统(1.2)的第二阴影系统, 证明了爆破稳态解的存在性及谱不稳定性[7]。Kuto 和 Wu 采用 Lyapunov-Schmidt 约化方法, 研究了系统(1.2)在 $\rho_{12} \rightarrow \infty$ 时退化的第二阴影系统, 在高维空间 $N \leq 4$ 中构造了爆破稳态解

分支并证明了其谱不稳定性[8]。当 $\rho_{21}=0$ 时, Brocchieri 与 Soresina 采用线性稳定性分析与图灵不稳定性判据, 研究了快反应极限下两类广义交叉扩散系统, 证明了交叉扩散项关于种群密度的单调递增性可以触发图灵斑图, 而单调递减性则完全抑制斑图形成[9]。Zhang 和 Liu 利用动态跃迁理论和中心流形约化方法, 研究了系统(1.2)在 Dirichlet 边界条件下的两种不同类型的动力学转变[10]。

当 $d_2 = \rho_{12} = 0$ 时, 系统(1.2)变为如下形式:

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \rho\Delta(uv) + v(a_2 - b_2 u - c_2 v), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, v(x, 0) = v_0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x = \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

本文关注系统(1.3)随参数 ρ 变化的动力学行为。借助 Ma 和 Wang [11] [12] 提出的动态跃迁理论, 分析系统(1.3)的非平凡稳态解的稳定性和动态跃迁。

2. 预备知识

2.1. 动态跃迁理论

动态跃迁理论刻画了非线性系统在控制参数跨越临界阈值时, 系统整体状态从旧平衡态到新平衡态发生的不可逆质变规律。该理论通过定量判定临界点附近的失稳方式, 将跃迁过程划分为连续型、跳跃型和混合型三种基本类型。我们用如下非线性演化方程描述非线性耗散系统

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda), \\ u(0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

令两个 Banach 空间分别为 X, X_1 , $X_1 \rightarrow X$ 是稠密紧包含关系, $u: [0, \infty) \rightarrow X_1$ 是未知函数, $\lambda \in R^1$ 为系统参数, $L_\lambda: X_1 \rightarrow X$ 是含参数的线性全连续场, 且连续依赖于 $\lambda \in R^1$, 并且满足,

$$\begin{cases} L_\lambda = -A_\lambda + B: X_1 \rightarrow X \text{ 是一个扇形算子,} \\ A_\lambda: X_1 \rightarrow X \text{ 是一个线性同胚,} \\ B: X_1 \rightarrow X \text{ 是一个线性紧算子.} \end{cases} \quad (2.2)$$

对某个 $0 \leq \theta < 1$, 假设 $G(\cdot, \lambda): X_\theta \rightarrow X$ 是 C^r ($r \geq 1$) 有界映射, 连续依赖于 $\lambda \in R^1$, 并且满足

$$G(u, \lambda) = o(\|u\|_{X_\theta}), \quad 0 \leq \theta < 1, \quad \forall \lambda \in R^1, \quad (2.3)$$

其中 X_θ 是由扇形算子 L_λ 决定的分数次空间。条件(2.2)和(2.3)表明系统(2.1)具有耗散结构。因此我们始终假设(2.2)和(2.3)成立, 接下来介绍系统(2.1)发生动态跃迁的数学定义。

定义 2.1. [12] 系统(2.1)从平衡点 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 当 $\lambda > \lambda_0$ (或 $\lambda < \lambda_0$) 时有一个跃迁, 如果

(1) 当 $\lambda < \lambda_0$ 时, $u = 0$ 关于系统(2.1)是局部渐近稳定的;

(2) 当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 存在 $u = 0$ 的一个邻域 $U \subset X$, U 与 λ 无关, 使得对任何 $\varphi \in U \setminus \Gamma_\lambda$, 系统(2.1)的解 $u_\lambda = (t, \varphi)$ 满足

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \geq \delta(\lambda) > 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} \delta(\lambda) = \delta \geq 0 \text{ (或 } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0} \delta(\lambda) = \delta \geq 0), \end{cases} \quad (2.4)$$

其中, Γ_λ 为 $u = 0$ 的稳定流形, 对于 $\lambda > \lambda_0$ (或 $\lambda < \lambda_0$), Γ_λ 在 X 中由余维 $\text{codim } \Gamma_\lambda \geq 1$ 。

对于非线性耗散系统(2.1)跃迁的充分条件和基本分类, 我们给出如下基本定理. 令 L_λ 的特征值为 $\{\beta_i(\lambda) | i=1, 2, \dots\} \subset \mathbb{C}$, 假设它们满足

$$\operatorname{Re} \beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \text{当 } \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \text{当 } \lambda < \lambda_0, \quad 1 \leq i \leq m, \\ > 0, & \text{当 } \lambda < \lambda_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Re} \beta_j(\lambda_0) < 0, \quad \forall j \geq m+1. \quad (2.6)$$

定理 2.1. [12] 在条件(2.5)和(2.6)的假设下, 系统(2.1)从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 在 $\lambda > \lambda_0$ 有一个跃迁, 并且该跃迁一定时下面三种类型之一:

(1) 连续型跃迁: 对 $u=0$ 的一个邻域 $U \subset X$ 及任何 $\varphi \in U$, 系统(2.1)的解 $u_\lambda = (t, \varphi)$ 满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X = 0.$$

或者等价地, 系统(2.1)在 $(0, \lambda_0)$ 有一个吸引子分歧.

(2) 跳跃型跃迁: 存在 $\varepsilon > 0$, 对任意 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, 存在 U 中的一个开稠集 $U_\lambda \subset U$, 使得对任意 $\varphi \in U_\lambda$ 有

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \geq \delta > 0,$$

其中, $\varepsilon > 0$ 是一个与 λ 无关的常数. 这也称为不连续型跃迁.

(3) 混合型跃迁: 对任意 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, U 能够分解为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ (U_i^λ 不一定连通)

$$U \setminus \Sigma = U_1^\lambda \cup U_2^\lambda, \quad U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \emptyset.$$

其中, $\Sigma \subset U$ 是一个余维 $\operatorname{codim} \Sigma \geq 1$ 的集合, 使得系统(2.1)的解 $u_\lambda = (t, \varphi)$ 满足

$$\begin{cases} \sup_{\varphi \in U_1^\lambda} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \rightarrow 0, & \text{当 } \lambda \rightarrow \lambda_0 + 0, \\ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \rightarrow \delta > 0, & \forall \varphi \in U_2^\lambda, \end{cases}$$

其中, U_1^λ 或者含有吸引子, 或者没有吸引子. U_1^λ 称为稳定型区域, U_2^λ 称为跳跃型区域.

2.2. Routh-Hurwitz 判据

定理 2.2. (Routh-Hurwitz 判据) 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

设在其平衡点上的特征方程的一般式展开为

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2.8)$$

将上式系数整理成 n 阶矩阵 D

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

称 D 的 n 阶主子式为 Routh-Hurwitz 行列式, 即

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \quad (2.10)$$

方程特征根的实部为负数的充要条件为: n 阶 Routh-Hurwitz 行列式均大于 0, 即

$$\Delta_i > 0, (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.11)$$

3. 具有单扩散系数的 S-K-T 系统的稳定性及动态跃迁分析

在这一部分, 本文主要分析系统(1.3)的稳定性和动态跃迁。首先计算系统(1.3)的稳态解, 令 $u_t = v_t = 0$, 得到以下方程

$$\begin{cases} u(a_1 - b_1 u - c_1 v) = 0, \\ v(a_2 - b_2 u - c_2 v) = 0. \end{cases}$$

可以得到系统稳态解为 $\omega_0 = (u_0, v_0)$, 其中

$$u_0 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1}, \quad v_0 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 c_2 - c_1 b_2}.$$

为了保证稳态解的正性, 假设 $\frac{b_1}{b_2} > \frac{a_1}{a_2} > \frac{c_1}{c_2}$ 。

现将 (u_0, v_0) 点平移至 $(0, 0)$ 点处, 令

$$\begin{cases} u' = u - u_0, \\ v' = v - v_0, \end{cases}$$

将其带入(1.3), 为了方便, 将 u', v' 记作 u, v , 得到以下方程

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + (u + u_0)[a_1 - b_1(u + u_0) - c_1(v + v_0)], \\ v_t = \rho\Delta[(u + u_0)(v + v_0)] + (v + v_0)[a_2 - b_2(u + u_0) - c_2(v + v_0)]. \end{cases} \quad (3.1)$$

定义函数空间 $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $H_1 = H^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 。令

$$\omega = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

定义线性算子 $L_\lambda: H_1 \rightarrow H$ 是一个关于 λ 的线性全连续场, 有

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} d\Delta - b_1 u_0 I & -c_1 u_0 I \\ \rho v_0 \Delta - b_2 v_0 I & \rho u_0 \Delta - c_2 v_0 I \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

定义 $G: H_1 \rightarrow H$, 并且有

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} -b_1 u^2 - c_1 uv \\ \rho\Delta(uv) - b_2 uv - c_2 v^2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

则系统(3.1)可以写为以下抽象算子形式

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = L_\lambda \omega + G(\omega), \\ \omega(0) = \phi. \end{cases} \quad (3.4)$$

其中 $\phi = (u - u_0, v - v_0)^T$ 。

接下来求解系统(3.1)的特征值与特征向量, 设 e_k 和 ρ_k 为 $-\Delta$ 的本征值和本征函数, 并满足 Neumann 边界条件

$$\begin{cases} -\Delta \phi_k = \rho_k \phi_k, \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \rho_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, k \in \mathbb{N}, \\ \phi_k = \cos \frac{k \pi x}{L}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

L_λ 对应的离散矩阵为

$$M_k = \begin{pmatrix} -d\rho_k - b_1 u_0 & -c_1 u_0 \\ -\rho v_0 \rho_k - b_2 v_0 & -\rho u_0 \rho_k - c_2 v_0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

记 L_λ 的特征值为 $\beta_{ki} (i=1,2)$, 通过特征方程计算特征值

$$\begin{aligned} |\beta_k I - M_k| &= \begin{vmatrix} \beta_k + d\rho_k + b_1 u_0 & c_1 u_0 \\ \rho v_0 \rho_k + b_2 v_0 & \beta_k + \rho u_0 \rho_k + c_2 v_0 \end{vmatrix} \\ &= (\beta_k + d\rho_k + b_1 u_0)(\beta_k + \rho u_0 \rho_k + c_2 v_0) - c_1 u_0(\rho v_0 \rho_k + b_2 v_0) \\ &= \beta_k^2 + \text{tr}(M_k)\beta_k + \det(M_k), \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{tr}(M_k) &= (d + \rho u_0)\rho_k + b_1 u_0 + c_2 v_0 > 0, \\ \det(M_k) &= d\rho u_0 \rho_k^2 + (dc_2 v_0 + \rho b_1 u_0^2 - \rho c_1 u_0 v_0)\rho_k + b_1 c_2 u_0 v_0 - b_2 c_1 u_0 v_0, \end{aligned}$$

当 $\det(M_k) \leq 0$ 时, 有两个特征根分别为

$$\beta_{k1} = \frac{-\text{tr}(M_k) + \sqrt{\text{tr}(M_k)^2 - 4\det(M_k)}}{2}, \quad \beta_{k2} = \frac{-\text{tr}(M_k) - \sqrt{\text{tr}(M_k)^2 - 4\det(M_k)}}{2}. \quad (3.7)$$

通过 $\beta_{ki} (k \in \mathbb{N}, i=1,2)$ 求得其特征向量 $e_{ki} (k \in \mathbb{N}, i=1,2)$ 为

$$e_{k1} = (1, P_k)^T \phi_k, \quad e_{k2} = (Q_k, 1)^T \phi_k, \quad (3.8)$$

其中 $P_k = -\frac{d\rho_k + b_1 u_0 + \beta_{k1}}{c_1 u_0}$, $Q_k = -\frac{\rho u_0 \rho_k + c_2 v_0 + \beta_{k2}}{\rho v_0 \rho_k + b_2 v_0}$ 。

根据特征向量 e_{ki} 求其共轭向量 e_{ki}^* 为

$$e_{k1}^* = \theta_1 (1, P_k^*)^T \phi_k, \quad e_{k2}^* = \theta_2 (Q_k^*, 1)^T \phi_k, \quad (3.9)$$

其中

$$\theta_1 = \frac{1}{1 + P_k P_k^*}, \theta_2 = \frac{1}{1 + Q_k Q_k^*}, P_k^* = -\frac{d\rho_k + b_1 u_0 + \beta_{k1}^*}{\rho v_0 \rho_k + b_2 v_0}, Q_k^* = -\frac{\rho u_0 \rho_k + c_2 v_0 + \beta_{k2}^*}{c_1 u_0},$$

这里 $\beta_{k1}^* = \beta_{k1}$, $\beta_{k2}^* = \beta_{k2}$ 。并且 e_{ki} 与 e_{ki}^* 满足

$$\langle e_{ki}, e_{kj}^* \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, (i, j=1,2).$$

由(3.7)可以知道, 特征值 $\beta_{k2} < 0$, 对于特征值 β_{k1} , 其符号会随参数变化而改变。令 $\beta_{11} = 0$, 有

$$\frac{-\text{tr}(M_k) + \sqrt{\text{tr}(M_k)^2 - 4\det(M_k)}}{2} = 0,$$

即 $\det(M_k) = d\rho u_0 \rho_k^2 + (dc_2 v_0 + \rho b_1 u_0^2 - \rho c_1 u_0 v_0) \rho_k + b_1 c_2 u_0 v_0 - b_2 c_1 u_0 v_0 = 0$, 选择 ρ 作为控制参数, 并记为 λ , 计算得到

$$\lambda_c = -\frac{b_1 c_2 u_0 v_0 - dc_2 v_0 \rho_k - b_2 c_1 u_0 v_0}{du_0 \rho_k^2 + (b_1 u_0^2 - c_1 u_0 v_0) \rho_k},$$

随着 λ 的变化, 有如下 PES 条件成立

$$\begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_c, \\ \beta_{11}(\lambda) &= 0, & \lambda = \lambda_c, \\ > 0, & \lambda > \lambda_c, \end{cases}$$

$$\beta_{k1}(\lambda_c) < 0, \quad k \neq 1, k = 2, 3, \dots$$

$$\beta_{k2}(\lambda_c) < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$
(3.10)

PES 条件(3.10)说明系统(3.1)随着控制参数 λ 的变化发生动态跃迁, 给出如下结论:

定理 3.1 若 PES 条件(3.10)成立, 则系统(3.1)满足如下结论:

- (1) 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 系统在 (u_0, v_0) 点是渐近稳定的。
- (2) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, 系统在 (u_0, v_0) 点失去稳定性, 发生连续型动态跃迁, 在该点出分歧出一个渐近稳定的奇点。
- (3) 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统分歧出的奇点的表达式为

$$\omega_{11} = \frac{\beta_{11}}{KM} e_{11} + o(|\beta_{11}|),$$

其中 $K = \theta_1(P_1 P_1^* \rho \rho_1 + b_1 + c_1 P_1 + b_2 P_1 P_1^* + c_2 P_1 P_1^*)$, $M = \int_{\Omega} \phi^3 dx$ 。

证明 3.1 我们分成下面三步来进行证明。

第一步: 空间分解

空间 H 和 H_1 可被分解为

$$H = L^2(\Omega) = E_1 \oplus E_2, \quad H_1 = E_1 \oplus \overline{E_2},$$
(3.11)

其中 $E_1 = \text{span}\{e_{11}\}$, $E_2 = \text{span}\{e_{k1} (k \neq 1), e_{k2}\}$ 。

则在 $\lambda = \lambda_c$ 附近, 系统(3.1)的解可表示为

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$
(3.12)

其中 $\omega_1 = x_{11} e_{11} \in E_1$, $\omega_2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1} e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2} e_{k2} \in E_2$ 。

第二步: 方程约化

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \omega_1 + \omega_2 = x_{11} e_{11} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1} e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2} e_{k2}. \\ L_{\lambda} \omega &= x_{11} L_{\lambda} e_{11} + L_{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{k1} e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2} e_{k2} \right) \\ &= x_{11} \beta_{11} e_{11} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1} \beta_{k1} e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2} \beta_{k2} e_{k2}. \end{aligned}$$
(3.13)

计算 $G(x_{11}e_{11})$

$$x_{11}e_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{11}\phi_k = \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix} \phi_k,$$

得到

$$G(x_{11}e_{11}) = \begin{pmatrix} -b_1x_{11}^2\phi_k^2 - c_1x_{11}^2P_1\phi_k^2 \\ \rho\Delta(x_{11}^2P_1\phi_k^2) - b_2x_{11}^2P_1\phi_k^2 - c_2x_{11}^2P_1^2\phi_k^2 \end{pmatrix}.$$

可以得到如下约化方程

$$\frac{d\omega}{dt} = L_\lambda \omega + G(\omega, \lambda). \quad (3.14)$$

对约化方程(3.14)两端同时与 $e_{k1}^* = \theta_1(1, P_k^*)^T \phi_k$, 作内积得到

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt}, e_{11}^* \right\rangle = \left\langle L_\lambda \omega, e_{11}^* \right\rangle + \left\langle G(\omega, \lambda), e_{11}^* \right\rangle.$$

通过计算

$$\left\langle G(\omega, \lambda), e_{11}^* \right\rangle = \int_{\Omega} \left[(-b_1x_{11}^2\phi_k^2 - c_1x_{11}^2P_1\phi_k^2) + (\rho\Delta(x_{11}^2P_1\phi_k^2) - b_2x_{11}^2P_1\phi_k^2 - c_2x_{11}^2P_1^2\phi_k^2) \right] P_1^* \theta_1 \phi_k dx,$$

得到

$$\frac{dx_{11}}{dt} = \beta_{11}x_{11} - KMx_{11}^2 + o(x_{11}^2). \quad (3.15)$$

约化方程(3.15)由中心流形定理得到, 其中 $K = \theta_1(P_1P_1^*\rho\rho_1 + b_1 + c_1P_1 + b_2P_1P_1^* + c_2P_1P_1^*)$, $M = \int_{\Omega} \phi^3 dx$. 当 $M \neq 0$ 时, 不考虑中心流形的影响。

第三步: 分歧分析

对方程(3.15)进行求解, 令

$$\beta_{11}x_{11} - KMx_{11}^2 = 0.$$

解得

$$x_{11} = \frac{\beta_{11}}{KM}.$$

显然, 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统(1.3)在 $\lambda > \lambda_c$ 一侧分歧处一个渐近稳定的奇点, 且分歧出的奇点为

$$x_{11} = \frac{\beta_{11}}{KM} + o(|\beta_{11}|).$$

已知系统(1.3)的分歧和拓扑结构由约化方程(3.14)决定, 则有

$$\omega_{11} = \frac{\beta_{11}}{KM} e_{11} + o(|\beta_{11}|),$$

为系统(1.3)分歧出的奇点, 且 ω_{11} 的稳定性与 x_{11} 的稳定性相同。

4. 数值模拟

在本节, 选取 $a_1 = 1.3, a_2 = 0.77, b_1 = 0.2, b_2 = 0.1, c_1 = 1.0, c_2 = 0.6, d_1 = 0.2, L = \pi$, 作为参数数值对前面的理论进行数值模拟验证。可以直接求得正平衡点 $\omega_0 = (u_0, v_0) = (0.5, 1.2)$, 并且满足条件 $\det(M_k) \leq 0$ 。通过对特征值 β_k 的计算, 可以得到特征值与波数的关系如下图 1 所示:

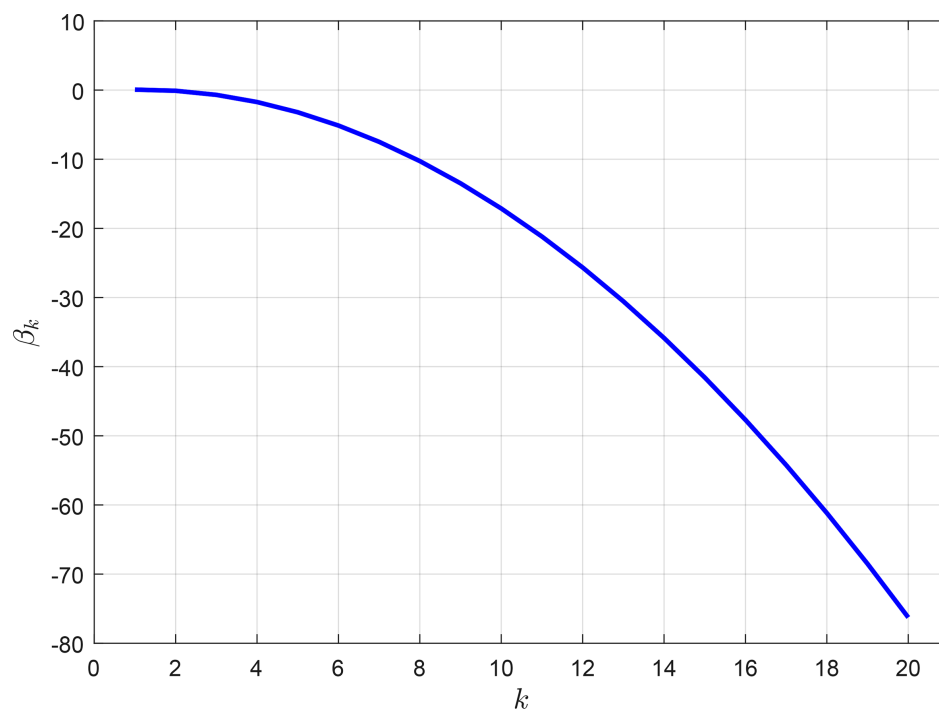


Figure 1. Plot of the real part of maximum eigenvalue versus wavenumber
图 1. 特征值实部随波数的变化曲线

可以看到 $k=1$ 时特征值大于 0，并且可以算出临界控制参数 $\lambda_c = 0.3467$ ，分歧图如下图 2 所示

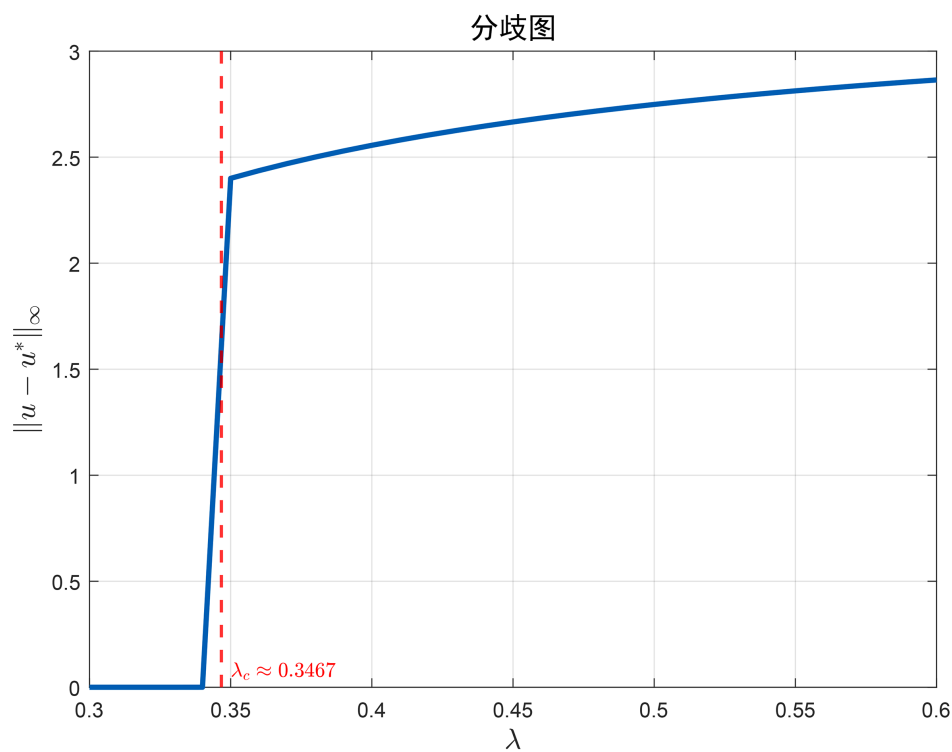


Figure 2. Bifurcation diagram
图 2. 分歧图

分别选取 $\lambda_c = 0.3, 0.55$ ，并选择 $u = u_0 + 0.3\eta_1, v = v_0 + 0.3\eta_2$ 作为初始函数， η_i 为随机扰动，数值模拟如下图 3，图 4：

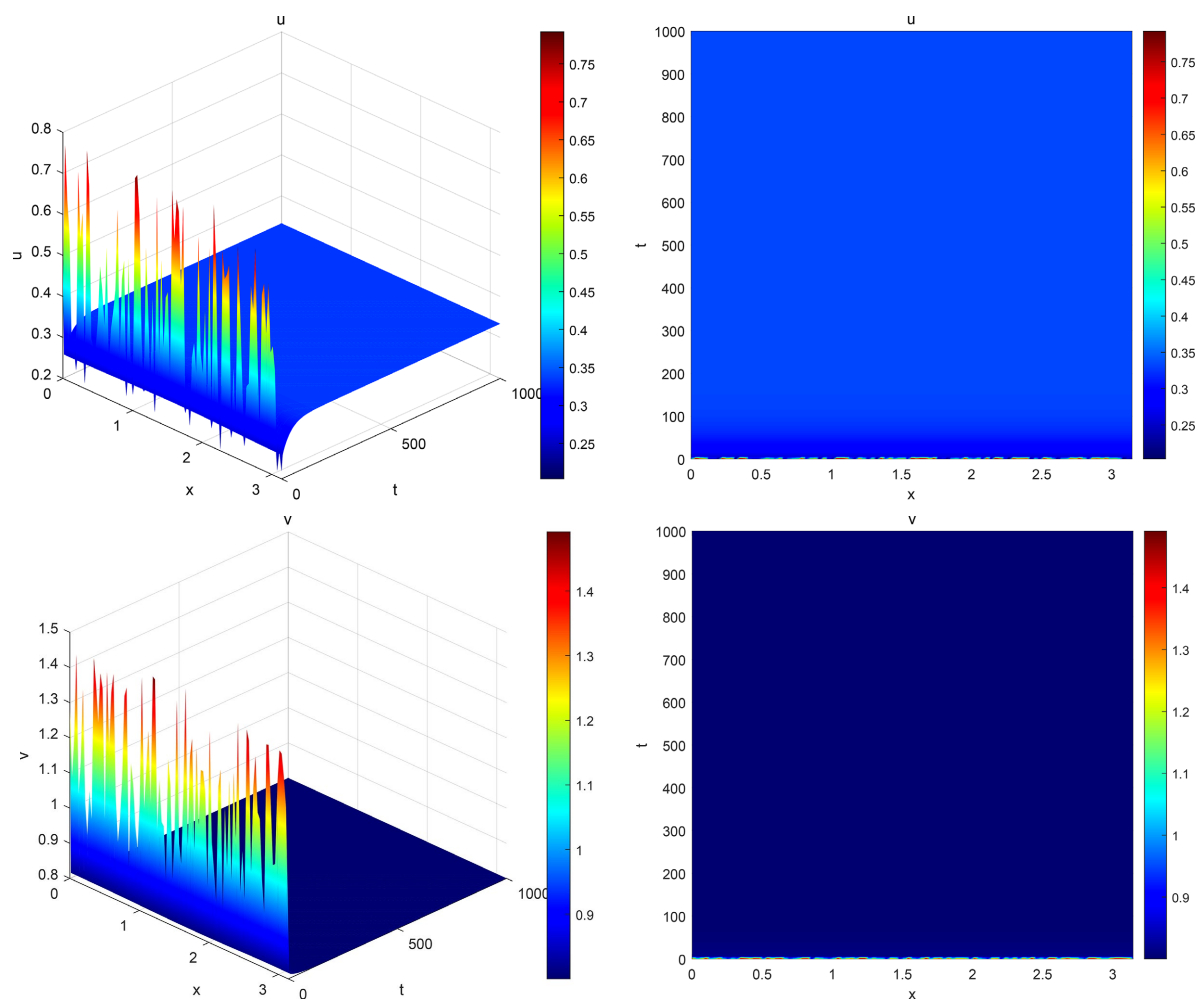
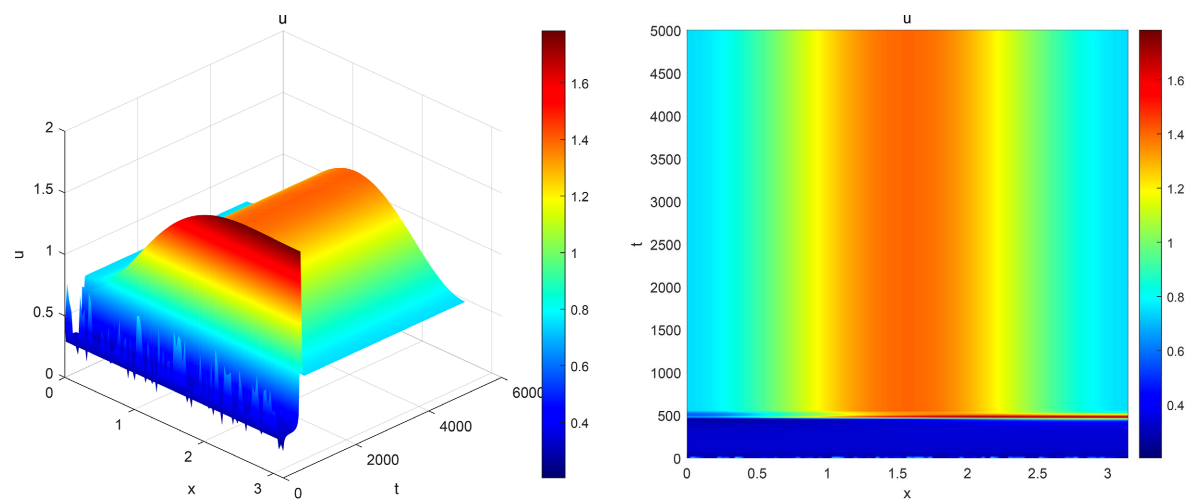


Figure 3. When $\lambda = 0.3$, the system (1.3) is stable at the positive equilibrium point

图 3. 当 $\lambda = 0.3$ 时，系统(1.3)在正平衡点处稳定



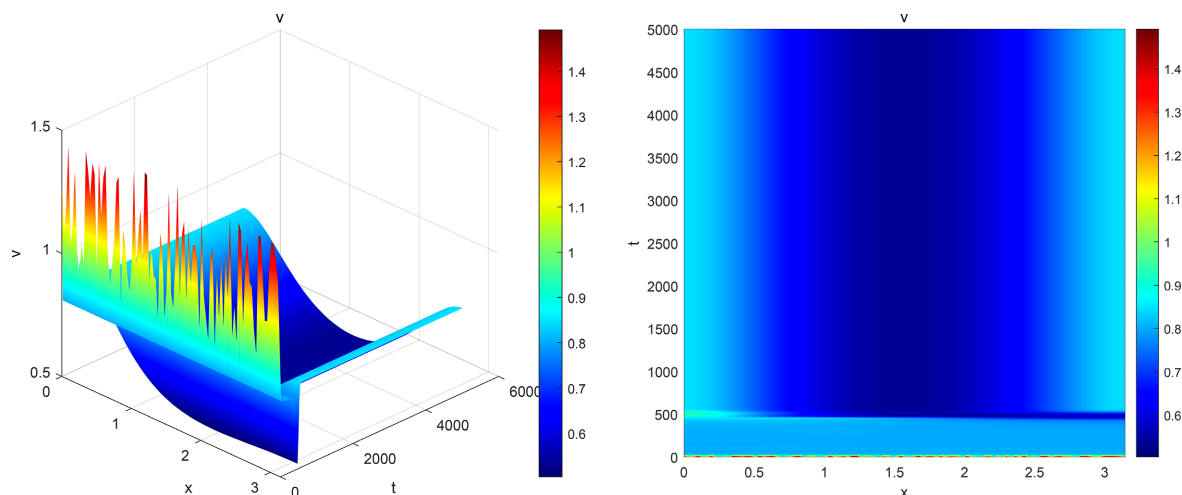


Figure 4. When $\lambda = 0.55$, system (1.3) undergoes a dynamic transition at the positive equilibrium point
图 4. 当 $\lambda = 0.55$ 时, 系统(1.3)在正平衡点处发生动态跃迁

5. 总结

本文借助线性全连续场谱理论和动态跃迁理论分析了单扩散 S-K-T 生物竞争系统的动力学行为。首先借助谱理论计算系统的特征方程和特征值, 从而得到动态跃迁的临界控制参数 λ_c , 然后借助动态跃迁理论, 得到了系统的 PES 条件以及发生动态跃迁的相关结论。数值模拟结果表明: 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 系统趋于稳定, 两物种的种群密度保持稳定; 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统发生动态跃迁, 两物种的种群密度分布发生变化。

目前, 本文完成了线性稳定性分析和系统的第一次跃迁分析, 但是没有考虑中心流形的影响以及系统的二次跃迁的动力学行为, 也没有考虑 d_2, ρ_{12} 等参数对系统的影响。此外, 随着控制参数 λ 继续增大, 波数 $k > 1$ 的模式也可能满足失稳条件, 此时, 多个空间模式同时增长, 斑图形态可能由单一波数的周期条纹转变为多波数竞争下的复杂结构。因此后续的研究内容就是考虑中心流形的影响、系统的第二次跃迁动力学行为以及考虑 d_2, ρ_{12} 等参数对系统动力学行为的影响。

基金项目

本项工作由重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2022NSCQ-MSX1609)和重庆交通大学科研启动项目(No. 2020023034)资助完成。

参考文献

- [1] Shigesada, N., Kawasaki, K. and Teramoto, E. (1979) Spatial Segregation of Interacting Species. *Journal of Theoretical Biology*, **79**, 83-99. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(79\)90258-3](https://doi.org/10.1016/0022-5193(79)90258-3)
- [2] Lou, Y. and Ni, W. (1996) Diffusion, Self-Diffusion and Cross-Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **131**, 79-131. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0157>
- [3] Wang, L., Wu, Y. and Xu, Q. (2017) Instability of Spiky Steady States for S-K-T Biological Competing Model with Cross-Diffusion. *Nonlinear Analysis*, **159**, 424-457. <https://doi.org/10.1016/j.na.2017.02.026>
- [4] Liu, R. and Zhang, D. (2022) Dynamic Transitions for the S-K-T Competition System. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **27**, 5343-5365. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021277>
- [5] Wu, Y. and Xu, Q. (2011) The Existence and Structure of Large Spiky Steady States Fors-K-T Competition Systems with Cross-Diffusion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **31**, 367-385. <https://doi.org/10.3934/dcds.2011.29.367>
- [6] Wu, Y. (2005) The Instability of Spiky Steady States for a Competing Species Model with Cross Diffusion. *Journal of*

-
- Differential Equations*, **213**, 289-340. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.08.015>
- [7] Tang, Z. (2023) Existence and Instability of Some Nontrivial Positive Steady States for the SKT Model with Double Cross Diffusion. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **39**, 623-637. <https://doi.org/10.1007/s10255-023-1057-4>
- [8] Kuto, K. and Wu, Y. (2025) The Existence and Instability of Blowing-Up Steady States for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto Competition Model with Cross-Diffusion. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.15039>
- [9] Brocchieri, E. and Soresina, C. (2026) Cross-Diffusion and Fast-Reaction in Pattern Formation: A Structural Analysis. *Ricerche di Matematica*. <https://doi.org/10.1007/s11587-026-01168-8>
- [10] Zhang, D. and Liu, R. (2018) Dynamical Transition for S-K-T Biological Competing Model with Cross-Diffusion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4641-4658. <https://doi.org/10.1002/mma.4919>
- [11] Ma, T. and Wang, S.H. (2014) Phase Transition Dynamics. Springer.
- [12] 马天, 汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧[M]. 北京: 科学出版社, 2007.