

具有三次源项的二元细胞趋化系统的稳定性及动态跃迁

袁晨林¹, 曹 豪¹, 张东培^{1,2*}

¹重庆交通大学数学与统计学院, 重庆

²复杂系统优化与智能控制重庆市高校重点实验室, 重庆

收稿日期: 2026年8月21日; 录用日期: 2026年9月14日; 发布日期: 2026年9月24日

摘 要

本文研究一类带有三次多项式生长源的二元细胞趋化系统在齐次Neumann边界条件下的稳定性与动态跃迁问题。其中考虑了趋化系数不为零的一般情形。利用线性全连续场谱理论和中心流形约化方法, 给出了系统两个常数稳态解——零平衡点和正平衡点的特征值序列, 建立了特征值实部发生正负穿越的PES条件, 并求得了相应的临界扩散系数。分析表明, 以细胞扩散系数为控制参数时, 当该参数穿过临界值, 系统在零平衡点处会发生连续型动态跃迁; 而在正平衡点处, 趋化项的引入使得线性化矩阵产生非对角耦合项, 即使生长源项在该点的一阶导数为负, 若趋化强度足够大, 系统仍可能发生扩散驱动的失稳现象, 从而丰富了系统的动力学行为。

关键词

趋化系统, 动态跃迁, PES条件, 三次源项

Stability and Dynamic Transitions of a Binary Cell Chemotaxis System with a Cubic Source Term

Chenlin Yuan¹, Hao Cao¹, Dongpei Zhang^{1,2*}

¹School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

²Key Laboratory of Complex Systems Optimization and Intelligent Control of Chongqing Municipal Education Commission, Chongqing

Received: August 21, 2026; accepted: September 14, 2026; published: September 24, 2026

*通讯作者。

文章引用: 袁晨林, 曹豪, 张东培. 具有三次源项的二元细胞趋化系统的稳定性及动态跃迁[J]. 应用数学进展, 2026, 15(9): 248-261. DOI: 10.12677/aam.2026.159389

Abstract

This paper investigates the stability and dynamic transitions of a two-component chemotaxis system with a cubic polynomial growth source under homogeneous Neumann boundary conditions, taking into account the general case with nonzero chemotaxis coefficient. By employing the linear completely continuous field spectral theory and the center manifold reduction method, we derive the eigenvalue sequences for the two constant steady-state solutions, namely the zero equilibrium and the positive equilibrium, establish the PES conditions under which the real parts of eigenvalues change sign, and obtain the corresponding critical diffusion coefficients. The analysis reveals that when the cell diffusion coefficient is taken as the control parameter and crosses the critical value, a continuous-type dynamic transition occurs at the zero equilibrium. For the positive equilibrium, the introduction of the chemotaxis term yields off-diagonal coupling in the linearization matrix; consequently, even if the first derivative of the growth source term at that point is negative, the system may still undergo diffusion-driven instability provided that the chemotactic intensity is sufficiently large, thereby enriching the dynamical behaviors of the system.

Keywords

Chemotaxis System, Dynamic Transition, PES Condition, Cubic Source Term

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

细胞趋化(chemotaxis)是指细胞或生物体响应于环境中化学物质浓度梯度而产生的定向运动现象,在胚胎发育、免疫应答及肿瘤侵袭等生理和病理过程中发挥重要作用。在这一过程中,细胞通过表面受体感知外部化学信号分子的空间分布,并据此调节细胞骨架的重排和极化的形成,从而实现向趋化因子源方向的定向迁移。自 Keller 和 Segel 于 1970 年提出经典趋化模型以来,趋化系统的数学理论研究一直是生物数学领域的热点[1]:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v + u - v, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

为刻画有限环境中的种群增长,学者们进一步引入了 Logistic 型源项 $f(u) = \alpha u - \beta u^2$, 得到带有 Logistic 源的 Keller-Segel 模型[2] [3]:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + \alpha u - \beta u^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v - r_1 v + r_2 u, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

近年来,研究发现实际生态系统中的种群增长往往表现出比标准 Logistic 模型更为复杂的非线性特征。Allee 效应描述了种群密度过低时增长率反而下降的现象,在数学上可由三次多项式源项 $f(u) = b_1 u + b_2 u^2 - b_3 u^3$ 来刻画。事实上,该源项可分解为 $f(u) = b_3 u(u_1 - u)(u - u_0)$, 其中 u_0 为 Allee 阈值, u_1 为环境容纳量;在本文参数 $b_1, b_2, b_3 > 0$ 下, $u_0 < 0$, 故正平衡点 u_1 总是存在唯一,其生物学意义为种群在 Allee 效应与种内竞争共同作用下的稳定承载能力。参数 b_1 反映低密度下的固有增长率, b_2 度

量 Allee 效应的强度, b_3 刻画高密度下的种内竞争强度[4]。Fu 和 Liu (2013)系统研究了一类带有三次源项的 Keller-Segel 模型在 d 维盒子中的早期斑图形成[5]; Izuhara、Kuto 和 Tsujikawa (2018)利用分歧理论和奇异摄动方法, 证明了一维空间中带三次增长项的 Keller-Segel 系统稳态解的存在性与稳定性[6]; Qiao 和 Zhang (2025)研究了带有 Allee 效应的趋化 - 增长模型, 证明了正行波解的存在性[7]; Kong 和 Wei (2023)研究了具有强 Allee 效应的种群模型中局部化斑图的存在性与稳定性[8]。同时, 动态跃迁理论为研究非线性演化系统在参数变化下的状态变迁提供了有力的数学工具, Şengül 和 Tiryakioglu (2024)利用中心流形约化和动态跃迁理论研究了一类反应扩散方程的动力学行为[9]。

基于上述背景, 本文研究如下带有三次多项式生长源的二元细胞趋化系统:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + b_1 u + b_2 u^2 - b_3 u^3, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v - r_1 v + r_2 u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0, & x = \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $b_1, b_2, b_3, r_1, r_2 > 0$, d_1, d_2 分别为细胞密度和化学信号的扩散系数。在保留趋化交叉项, 即 $\chi \neq 0$ 的条件下, 本文利用线性全连续场谱理论、中心流形约化和动态跃迁理论, 分析系统常数稳态解的稳定性及动态跃迁行为, 给出相应的 PES 条件(稳定性交换原理)和临界扩散系数。此外, 趋化系统中斑图形成的分歧分析[10]和解的奇异增长现象[11]已有深入研究, 为本文提供了重要的理论参考。

2. 预备知识

2.1. 动态跃迁理论

动态跃迁理论实质上揭示了自然界普遍存在的状态变迁现象。在自然界中, 演化系统通常受到一些因素(在数学上称为参数)的影响和控制。当这些因素相互平衡时, 系统将维持在一个动态稳定状态。然而, 一旦旧有平衡被打破, 当参数超过某个临界值时, 旧的稳定状态将不复存在, 系统将跃迁至一个全新的状态。这一理论可以帮助理解系统的稳定性, 预测系统的行为变化及动态特征。

在数学上, 非线性耗散系统一般可由下面的非线性演化方程描述

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda), \\ u(0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, X, X_1 是两个 Banach 空间, $X_1 \rightarrow X$ 是稠密紧包含关系。 $u: [0, \infty) \rightarrow X_1$ 是未知函数。 $\lambda \in R^1$ 为系统参数。 $L_\lambda: X_1 \rightarrow X$ 是含参数的线性全连续场, 且连续依赖于 $\lambda \in R^1$, 并且满足,

$$\begin{cases} L_\lambda = -A_\lambda + B: X_1 \rightarrow X \text{ 是一个扇形算子,} \\ A_\lambda: X_1 \rightarrow X \text{ 是一个线性同胚,} \\ B: X_1 \rightarrow X \text{ 是一个线性紧算子.} \end{cases} \quad (2.2)$$

对某个 $0 \leq \theta < 1$, 假设 $G(\cdot, \lambda): X_\theta \rightarrow X$ 是 C^r ($r \geq 1$) 有界映射, 连续依赖于 $\lambda \in R^1$, 并且满足

$$G(u, \lambda) = o(\|u\|_{X_\theta}), \quad 0 \leq \theta < 1, \quad \forall \lambda \in R^1, \quad (2.3)$$

其中 X_θ 是由扇形算子 L_λ 决定的分数次空间。条件(2.2)和(2.3)表明系统(2.1)具有耗散结构。因此我们始终假设(2.2)和(2.3)成立, 接下来介绍系统(2.1)发生动态跃迁的数学定义。

定义 2.1 [12] 称系统(2.1)是从平衡点 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 当 $\lambda > \lambda_0$ (或 $\lambda < \lambda_0$) 时有一个跃迁, 如果

- 1) 当 $\lambda < \lambda_0$ (或 $\lambda > \lambda_0$) 时, $u = 0$ 关于系统(2.1)是局部渐近稳定的;
- 2) 当 $\lambda > \lambda_0$ (或 $\lambda < \lambda_0$) 时, 存在 $u = 0$ 的一个邻域 $U \subset X$, U 与 λ 无关, 使得对任何 $\varphi \in U \setminus \Gamma_\lambda$, 系统(2.1)的解 $u_\lambda = (t, \varphi)$ 满足

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \geq \delta(\lambda) > 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} \delta(\lambda) = \delta \geq 0 \text{ (或 } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0} \delta(\lambda) = \delta \geq 0), \end{cases} \quad (2.4)$$

其中, Γ_λ 为 $u = 0$ 的稳定流形, 对于 $\lambda > \lambda_0$ (或 $\lambda < \lambda_0$), Γ_λ 在 X 中由余维 $\text{codim } \Gamma_\lambda \geq 1$.

对于非线性耗散系统(2.1)跃迁的充分条件和基本分类, 我们给出如下基本定理. 令 L_λ 的特征值为 $\{\beta_i(\lambda) | i = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{C}$, 假设它们满足

$$\text{Re } \beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \text{当 } \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \text{当 } \lambda = \lambda_0, \quad 1 \leq i \leq m, \\ > 0, & \text{当 } \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\text{Re } \beta_j(\lambda_0) < 0, \quad \forall j \geq m+1. \quad (2.6)$$

定理 2.1 [12] 在条件(2.2) (2.5)和(2.3) (2.6)的假设下, 系统(2.1)从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 在 $\lambda > \lambda_0$ 有一个跃迁, 并且该跃迁一定时下面三种类型之一:

- 1) 连续型跃迁: 对 $u = 0$ 的一个邻域 $U \subset X$ 及任何 $\varphi \in U$, 系统(2.1)的解 $u_\lambda = (t, \varphi)$ 满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X = 0.$$

或者等价地, 系统(2.1)在 $(0, \lambda_0)$ 有一个吸引子分歧.

- 2) 跳跃型跃迁: 存在 $\varepsilon > 0$, 对任意 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, 存在 U 中的一个开稠集 $U_\lambda \subset U$, 使得对任意 $\varphi \in U_\lambda$ 有

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \geq \delta > 0,$$

其中, $\delta > 0$ 是一个与 λ 无关的常数. 这也称为不连续型跃迁.

- 3) 混合型跃迁: 对任意 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, U 能够分解为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ (U_i^λ 不一定连通)

$$U \setminus \Sigma = U_1^\lambda \cup U_2^\lambda, \quad U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \emptyset.$$

其中, $\Sigma \subset U$ 是一个余维 $\text{codim } \Sigma \geq 1$ 的集合, 使得系统(2.1)的解 $u_\lambda = (t, \varphi)$ 满足

$$\begin{cases} \sup_{\varphi \in U_1^\lambda} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \rightarrow 0, & \text{当 } \lambda \rightarrow \lambda_0 + 0, \\ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \rightarrow \delta > 0, & \forall \varphi \in U_2^\lambda, \end{cases}$$

其中, U_1^λ 或者含有吸引子, 或者没有吸引子. U_1^λ 称为稳定型区域, U_2^λ 称为跳跃型区域.

2.2. Routh-Hurwitz 判据

定理 2.2 考虑如下非线性系统,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

设在其平衡点上的特征方程的一般式展开为,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2.8)$$

将上式系数整理成 n 阶矩阵 D ,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

称 D 的 n 阶主子式为 Routh-Hurwitz 行列式, 即,

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots \quad (2.10)$$

方程特征根的实部为负数的充要条件为: n 阶 Routh-Hurwitz 行列式均大于 0, 即,

$$\Delta_i > 0, (i = 1, 2, 3, \cdots). \quad (2.11)$$

3. 双扩散系数趋化系统的稳定性及动态跃迁分析

在这一部分, 本文主要研究双扩散系数趋化系统(3.1)的稳定性和动态跃迁。接下来计算系统(3.1)的稳态解

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + b_1 u + b_2 u^2 - b_3 u^3, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v - r_1 v + r_2 u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0, & x = \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

其稳态解满足

$$\begin{cases} b_1 u + b_2 u^2 - b_3 u^3 = 0, \\ -r_1 v + r_2 u = 0. \end{cases}$$

故有两个常数稳态解为

$$(0, 0), \quad (u_1, v_1) = \left(\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1 b_3}}{2b_3}, \frac{r_2}{r_1} u_1 \right).$$

3.1. 平衡点(0, 0)稳定性和动态跃迁

令 $\omega = (u, v)^T$ (1.3), 在 $(0, 0)$ 处线性化, 趋化项 $-\chi \nabla \cdot (u \nabla v)$ 线性化后为零, 得线性算子

$$L_\lambda \omega = \begin{pmatrix} d_1 \Delta u + b_1 u \\ d_2 \Delta v - r_1 v + r_2 u \end{pmatrix}, \text{ 其中 } L_\lambda = \begin{pmatrix} d_1 \Delta + b_1 I & 0 \\ r_2 I & d_2 \Delta - r_1 I \end{pmatrix},$$

非线性部分为

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} b_2 u^2 - b_3 u^3 - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

依据线性全连续场的谱理论, 设 e_k 和 ρ_k 为 $-\Delta$ 的本征值和本征函数, 并满足诺依曼边界条件

$$\begin{cases} -\Delta\phi_k = \rho_k\phi_k, \\ \frac{\partial\phi_k}{\partial n} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

其中,

$$\begin{cases} \rho_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, k \in \mathbb{N}, \\ \phi_k = \cos \frac{k\pi x}{L}, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.4)$$

将 L_λ 作用于模态 ϕ_k , 得到离散矩阵

$$M_k = \begin{pmatrix} -d_1\rho_k + b_1 & 0 \\ r_2 & -d_2\rho_k - r_1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

记 L_λ (1.3)的特征值为 β_{ki} ($i=1,2$), 特征值满足矩阵方程

$$|\beta_k I - M_k| = 0,$$

矩阵方程等价于

$$\begin{vmatrix} \beta_k + d_1\rho_k - b_1 & 0 \\ -r_2 & \beta_k + d_2\rho_k + r_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.6)$$

由(3.6), 可得特征值为

$$\beta_{k1} = -d_1\rho_k + b_1, \quad \beta_{k2} = -d_2\rho_k - r_1 < 0. \quad (3.7)$$

由特征值 β_{ki} ($i=1,2$), 可得特征向量 e_{ki} ($i=1,2$) 为

$$e_{k1} = (1, Q)^T \phi_k, \quad e_{k2} = (0, 1)^T \phi_k. \quad (3.8)$$

其中 $Q = \frac{r_2}{b_1 + r_1 - d_1\rho_k + d_2\rho_k}$ 。

由特征向量 e_i 可得共轭向量 e_i^* , 首先将 M_k 进行转置为

$$M_k^T = \begin{pmatrix} -d_1\rho_k + b_1 & r_2 \\ 0 & -d_2\rho_k - r_1 \end{pmatrix},$$

共轭特征值满足矩阵方程为

$$|\beta_k^* I - M_k^T| = 0,$$

矩阵方程等价于

$$\begin{vmatrix} \beta_k^* + d_1\rho_k - b_1 & -r_2 \\ 0 & \beta_k^* + d_2\rho_k + r_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

由(3.9), 可得系统共轭特征值为

$$\beta_{k1}^* = -d_1\rho_k + b_1, \quad \beta_{k2}^* = -d_2\rho_k - r_1 < 0, \quad (3.10)$$

由特征值 β_{ki}^* ($i=1,2$), 可得特征向量 e_{ki}^* ($i=1,2$) 为:

$$e_{k1}^* = (1, 0)^T \phi_k, \quad e_{k2}^* = (-Q, 1)^T \phi_k. \quad (3.11)$$

其中 $Q = \frac{r_2}{b_1 + r_1 - d_1\rho_k + d_2\rho_k}$ 。

对特征值(3.7), 显然 $\beta_{k2} < 0$ 始终成立, 当 $k=1$ 时, 令 $\beta_{11} = 0$

$$-d_1 \times \frac{\pi^2}{L^2} + b_1 = 0,$$

选择 d_1 为控制参数, 并记为 λ , 由

$$-\lambda \times \frac{\pi^2}{L^2} + b_1 = 0,$$

可求得临界控制参数为

$$\lambda_c = \frac{b_1 L^2}{\pi^2}.$$

随着 λ 的变化, 有如下 PES 条件成立

$$\begin{aligned} \beta_{11}(\lambda) & \begin{cases} < 0, & \lambda > \lambda_c, \\ = 0, & \lambda = \lambda_c, \\ > 0, & \lambda < \lambda_c, \end{cases} \\ \beta_{k1}(\lambda_c) & < 0, \quad k \neq 1, k = 2, 3, \dots \\ \beta_{k2}(\lambda_c) & < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \end{aligned} \quad (3.12)$$

引理 3.1 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, 系统在 $(0,0)$ 点处满足 PES 条件, 则该模型在 $(0,0)$ 点处会发生动态跃迁。

定理 3.1 动态跃迁理论分析

若 PES 条件成立, 则系统满足如下结论:

- 1) 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统在 $(0,0)$ 点是渐近稳定的。
- 2) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, 系统在 $(0,0)$ 点失去稳定性, 发生动态跃迁。
- 3) 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 系统在 $(0,0)$ 点处分歧出两个对称的奇点:

$$\omega^\pm = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3 M}} e_{11} + o\left(\sqrt{|\beta_{11}|}\right),$$

其中 $M = \int_{\Omega} \phi_1^4 dx$, $e_{11} = (1, Q)^T \phi_1$, $Q = \frac{r_2}{b_1 + r_1 - \lambda_c \rho_1 + d_2 \rho_1}$ 。

证明 3.1 我们分成下面三步来进行证明。

第一步: 空间分解

空间 H 和 H_1 可被分解为 E_1 和 E_2

$$H = L^2(\Omega) = E_1 \oplus E_2, \quad H_1 = E_1 \oplus \overline{E_2}. \quad (3.13)$$

其中,

$$E_1 = \text{span}\{e_{11}\}, \quad E_2 = \text{span}\{e_{k1} (k \neq 1), e_{k2}\}.$$

则在 $\lambda = \lambda_c$ 附近, 系统(3.1)的解可表示为

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (3.14)$$

其中,

$$\omega_1 = x_{11} e_{11} \in E_1, \quad \omega_2 = \sum_{k \neq 1} x_{k1} e_{k1} + \sum_{k=1} x_{k2} e_{k2} \in E_2.$$

第二步：方程约化

对方程(3.1)有

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \omega_1 + \omega_2 = x_{11}e_{11} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}e_{k2}, \\ L_{\lambda}\omega &= x_{11}L_{\lambda}e_{11} + L_{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}e_{k2}\right) \\ &= x_{11}\beta_{11}e_{11} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}\beta_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}\beta_{k2}e_{k2}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

接下来计算 $G(x_{11}e_{11})$

$$x_{11}e_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ Q \end{pmatrix} x_{11}\phi_k = \begin{pmatrix} x_{11} \\ Qx_{11} \end{pmatrix} \phi_k, G(w) = \begin{pmatrix} b_2u^2 - b_3u^3 - \chi\nabla \cdot (u\nabla v) \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$G(x_{11}e_{11}) = \begin{pmatrix} b_2x_{11}^2\phi_k^2 - b_3x_{11}^3\phi_k^3 - \chi\nabla \cdot (x_{11}\phi_k\nabla Qx_{11}\phi_k) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由(2.1), 得出如下约化方程

$$\frac{d\omega}{dt} = L_{\lambda}\omega + G(\omega, \lambda). \quad (3.16)$$

并对约化方程(3.16) (3.15)两端同时与 $e_{11}^* = (1, 0)^T \phi_1$ 作内积可以得到

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt}, e_{11}^* \right\rangle = \left\langle L_{\lambda}\omega, e_{11}^* \right\rangle + \left\langle G(\omega, \lambda), e_{11}^* \right\rangle.$$

化简得

$$\begin{aligned}\frac{dx_{11}}{dt} &= \beta_{11}x_{11} + \left\langle G(x_{11}e_{11}), e_{11}^* \right\rangle \\ &= \beta_{11}x_{11} - b_3Mx_{11}^3 + o(x_{11}^3).\end{aligned}\quad (3.17)$$

其中 $M = \int_{\Omega} \phi_1^4 dx$ 。

第三步：分歧分析

对系统(3.17) (3.16)进行求解, 令

$$\beta_{11}x_{11} - b_3Mx_{11}^3 = 0.$$

解得

$$x_{11} = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3M}}.$$

显然, 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 系统分歧出两个对称的奇点

$$x^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3M}} + o(\sqrt{|\beta_{11}|}).$$

从而原系统分歧出的平衡点为

$$\omega^{\pm} = x^{\pm}e_{11} + o(|\beta_{11}|) = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3M}}e_{11} + o(\sqrt{|\beta_{11}|}),$$

为系统(3.1)分歧出的奇点, 且 $\omega^\pm$ 的稳定性与 $x^\pm$ 的稳定性相同。

3.2. 正稳态解的稳定性和动态跃迁

现将系统 (u_1, v_1) 点平移至 $(0, 0)$ 点处, 再令 $u' = u - u_1, v' = v - v_1$, 可得 $u = u' + u_1, v = v' + v_1$ 。又因为 v_1 为常数, $\nabla v_1 = 0$, 对趋化项线性化为

$$-\chi \nabla \cdot (u \nabla v) \approx -\chi u_1 \Delta v - \chi \nabla \cdot (u_1 \nabla v_1) = -\chi u_1 \Delta v + \text{高阶项},$$

同时, 将 $f(u) = f(u_1 + u')$ 在 u_1 处进行泰勒展开

$$f(u_1 + u') = f(u_1) + f'(u_1)u' + \frac{1}{2}f''(u_1)u'^2 + \frac{1}{6}f'''(u_1)u'^3 + \dots,$$

其中,

$$f(u_1) = 0, f'(u_1) = b_1 + 2b_2u_1 - 3b_3u_1^2, f''(u_1) = 2b_2 - 6b_3u_1, f'''(u_1) = -6b_3.$$

利用平衡方程 $b_1 + b_2u_1 - b_3u_1^2 = 0$ 消去 b_1 , 得

$$f'(u_1) = b_2u_1 - 2b_3u_1^2,$$

因为 $u_1 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_3} > \frac{b_2}{2b_3}$, 所以 $f'(u_1) < 0$ 恒成立。

定义函数空间为 $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^2), H_1 = \left\{ \omega \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \left| \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \text{ on } \Omega \right. \right\}$ 。令

$$\omega = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

定义线性算子 $L_\lambda: H_1 \rightarrow H$ 是一个关于 λ 的线性全连续场, 有

$$L_\lambda \omega = \begin{pmatrix} d_1 \Delta u - \chi u_1 \Delta v + f'(u_1)u \\ d_2 \Delta v - r_1 v + r_2 u \end{pmatrix}, \text{ 其中 } L_\lambda = \begin{pmatrix} d_1 \Delta + f'(u_1)I & -\chi u_1 \Delta \\ r_2 I & d_2 \Delta - r_1 I \end{pmatrix}.$$

定义 $G: H_1 \rightarrow H$, 则有

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f''(u_1)u^2 + \frac{1}{6}f'''(u_1)u^3 - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

则系统(3.1)可以写为以下抽象算子形式

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = L_\lambda w + G(w), \\ w(0) = \phi. \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 $\phi = (u - u_1, v - v_1)^\top$ 。

依据线性全连续场的谱理论, 设 e_k 和 ρ_k 为 $-\Delta$ 的本征值和本征函数, 并满足 Neumann 边界条件

$$\begin{cases} -\Delta \phi_k = \rho_k \phi_k, \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

其中,

$$\begin{cases} \rho_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, k \in \mathbb{N}, \\ \phi_k = \cos \frac{k \pi x}{L}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

L_λ 对应的离散矩阵为

$$M_k = \begin{pmatrix} -d_1 \rho_k + f'(u_1) & \chi u_1 \rho_k \\ r_2 & -d_2 \rho_k - r_1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

记 L_λ (1.3) 的特征值为 $\beta_{ki} (i=1,2)$, 特征值满足矩阵方程

$$|\beta_k I - M_k| = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} \beta_k + d_1 \rho_k - f'(u_1) & -\chi u_1 \rho_k \\ -r_2 & \beta_k + d_2 \rho_k + r_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

由(3.21)展开行列式得

$$(\beta + d_1 \rho_k - f'(u_1))(\beta + d_2 \rho_k + r_1) - \chi u_1 \rho_k r_2 = 0.$$

将上式展开为

$$\beta^2 + (d_1 \rho_k + d_2 \rho_k + r_1 - f'(u_1))\beta + (d_1 \rho_k - f'(u_1))(d_2 \rho_k + r_1) - \chi u_1 \rho_k r_2 = 0.$$

令

$$\begin{aligned} T_k &= d_1 \rho_k + d_2 \rho_k + r_1 - f'(u_1), \\ D_k &= (d_1 \rho_k - f'(u_1))(d_2 \rho_k + r_1) - \chi u_1 \rho_k r_2. \end{aligned}$$

则方程化为

$$\beta^2 + T_k \beta + D_k = 0.$$

可得特征值为

$$\beta_{k1} = \frac{-T_k + \sqrt{T_k^2 - 4D_k}}{2}, \quad \beta_{k2} = \frac{-T_k - \sqrt{T_k^2 - 4D_k}}{2} < 0.$$

由 $\beta_{ki} (i=1,2)$, 可得特征向量 $e_{ki} (i=1,2)$ 为

$$e_{k1} = (1, Q_1)^T \phi_k, \quad e_{k2} = (1, Q_2)^T \phi_k. \quad (3.22)$$

其中 $Q_i = \frac{r_2}{\beta_{ki} + d_2 \rho_k + r_1}, i=1,2$ 。

依据特征向量 e_i 求共轭向量 e_i^* , 将 M_k 进行转置

$$M_k^T = \begin{pmatrix} -d_1 \rho_k + f'(u_1) & r_2 \\ \chi u_1 \rho_k & -d_2 \rho_k - r_1 \end{pmatrix},$$

共轭特征值满足矩阵方程

$$|\beta_k^* I - M_k^T| = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} \beta_k^* + d_1 \rho_k - f'(u_1) & -r_2 \\ -\chi u_1 \rho_k & \beta_k^* + d_2 \rho_k + r_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.23)$$

由(3.23), 可得共轭特征值为

$$\beta_{k1}^* = \beta_{k1}, \quad \beta_{k2}^* = \beta_{k2},$$

共轭特征向量 $e_{ki}^* (i=1,2)$ 为

$$e_{k1}^* = (P_1, 1)^T \phi_k, \quad e_{k2}^* = (P_2, 1)^T \phi_k. \quad (3.24)$$

其中 $P_i = \frac{\beta_{ki} + d_2 \rho_k + r_1}{\chi u_1 \rho_k}, i=1,2$ 。

令 $\beta_{11} = 0$, 得临界条件

$$(d_1 \rho_k - f'(u_1))(d_2 \rho_k + r_1) - \chi u_1 \rho_k r_2 = 0.$$

选择 d_1 为控制参数, 并记为 λ , 解得

$$\lambda = \frac{f'(u_1)}{\rho_k} + \frac{\chi u_1 r_2}{d_2 \rho_k + r_1}$$

取 $k=1$ 为最先穿越的模式, 得临界扩散系数为

$$\lambda_c = \frac{f'(u_1)}{\rho_1} + \frac{\chi u_1 r_2}{d_2 \rho_1 + r_1}$$

其中 $\rho_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, u_1 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1 b_3}}{2b_3}$ 。

若强度满足

$$\chi > \frac{-f'(u_1)(d_2 \rho_1 + r_1)}{\rho_1 r_2 u_1},$$

则随着 λ 的变化, 有如下 PES 条件成立

$$\begin{aligned} \beta_{11}(\lambda) & \begin{cases} < 0, & \lambda > \lambda_c, \\ = 0, & \lambda = \lambda_c, \\ > 0, & \lambda < \lambda_c, \end{cases} \\ \beta_{k1}(\lambda_c) & < 0, \quad k \neq 1, k=2,3,\dots \\ \beta_{k2}(\lambda_c) & < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \end{aligned} \quad (3.25)$$

引理 3.2 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, 系统在 (u_1, v_1) 点处满足 PES 条件, 则该模型在 (u_1, v_1) 点处会发生动态跃迁。

定理 3.2 动态跃迁理论分析

若 PES 条件成立, 则系统满足如下结论:

- 1) 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统在 (u_1, v_1) 点是渐近稳定的。
- 2) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时, 系统在 (u_1, v_1) 点失去稳定性, 发生动态跃迁。
- 3) 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 系统在 (u_1, v_1) 点处分歧出两个对称的奇点:

$$\omega^\pm = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_{3PM}}} e_{11} + o(\sqrt{|\beta_{11}|}),$$

其中 $M = \int_{\Omega} \phi_1^4 dx$, $P = \frac{d_2 \rho_1 + r_1}{\chi u_1 \rho_1}$ 。

证明 3.2 我们分成下面三步来进行证明。

第一步：空间分解

空间 H 和 H_1 可被分解为 E_1 和 E_2

$$H = L^2(\Omega) = E_1 \oplus E_2, \quad H_1 = E_1 \oplus \overline{E_2}. \quad (3.26)$$

其中,

$$E_1 = \text{span}\{e_{11}\}, \quad E_2 = \text{span}\{e_{k1} (k \neq 1), e_{k2}\}.$$

则在 $\lambda = \lambda_c$ 附近, 系统(3.1)的解可表示为

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (3.27)$$

其中,

$$\omega_1 = x_{11}e_{11} \in E_1, \quad \omega_2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}e_{k2} \in E_2.$$

第二步：方程约化

对方程(3.1)有

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \omega_1 + \omega_2 = x_{11}e_{11} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}e_{k2}, \\ L_{\lambda}\omega &= x_{11}L_{\lambda}e_{11} + L_{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}e_{k2}\right) \\ &= x_{11}\beta_{11}e_{11} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k1}\beta_{k1}e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k2}\beta_{k2}e_{k2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

接下来计算 $G(x_{11}e_{11})$

$$x_{11}e_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ Q_1 \end{pmatrix} x_{11}\phi_k = \begin{pmatrix} x_{11} \\ Q_1 x_{11} \end{pmatrix} \phi_k, \quad G(w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f''(u_1)u^2 + \frac{1}{6}f'''(u_1)u^3 - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$G(x_{11}e_{11}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f''(u_1)x_{11}^2\phi_k^2 + \frac{1}{6}f'''(u_1)x_{11}^3\phi_k^3 - \chi \nabla \cdot (x_{11}\phi_k \nabla Q_1 x_{11}\phi_k) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由(2.1), 得出如下约化方程

$$\frac{d\omega}{dt} = L_{\lambda}\omega + G(\omega, \lambda). \quad (3.29)$$

并对约化方程(3.29) (3.15)两端同时与 $e_{11}^* = (P_1, 1)^T \phi_1$ 作内积可以得到

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt}, e_{11}^* \right\rangle = \left\langle L_{\lambda}\omega, e_{11}^* \right\rangle + \left\langle G(\omega, \lambda), e_{11}^* \right\rangle.$$

化简得

$$\begin{aligned}\frac{dx_{11}}{dt} &= \beta_{11}x_{11} + \langle G(x_{11}e_{11}), e_{11}^* \rangle \\ &= \beta_{11}x_{11} - b_3PMx_{11}^3 + o(x_{11}^3).\end{aligned}\quad (3.30)$$

其中 $M = \int_{\Omega} \phi_1^4 dx$, $P = \frac{d_2\rho_1 + r_1}{\chi u_1\rho_1}$ 。

第三步：分歧分析

对系统(3.30) (3.16)进行求解，令

$$\beta_{11}x_{11} - b_3PMx_{11}^3 = 0.$$

解得

$$x_{11} = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3PM}}.$$

显然，当 $\lambda < \lambda_c$ 时，系统分歧出两个对称的奇点

$$x^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3PM}} + o(\sqrt{|\beta_{11}|}).$$

从而原系统分歧出的平衡点为

$$\omega^{\pm} = x^{\pm}e_{11} + o(|\beta_{11}|) = \pm \sqrt{\frac{\beta_{11}}{b_3PM}}e_{11} + o(\sqrt{|\beta_{11}|}),$$

为系统(3.1)分歧出的奇点，且 $\omega^{\pm}$ 的稳定性与 $x^{\pm}$ 的稳定性相同。

4. 总结

本文研究了一类带有三次多项式生长源项 $f(u) = b_1u + b_2u^2 - b_3u^3$ 的二元细胞趋化系统在齐次 Neumann 边界条件下的稳定性与动态跃迁问题，其中着重讨论趋化系数 $\chi \neq 0$ 的一般情形。该源项能够刻画具有 Allee 效应的种群增长行为，较经典的 Logistic 源更适用于描述低密度下种群增长受抑制的生态学现象。在保留趋化交叉项的假设下，本文利用线性全连续场谱理论和中心流形约化方法，系统分析了系统两个常数稳态解——零平衡点 $(0,0)$ 和正平衡点 (u_1, v_1) 的线性稳定性和动态跃迁行为。研究发现，以细胞扩散系数 d_1 作为控制参数时，零平衡点处由于趋化项线性化后为零，仍存在特征值实部发生正负穿越的 PES 条件，当控制参数穿过临界值 $\lambda_c = b_1/\rho_1$ 时系统发生连续性动态跃迁，分歧出一对对称的非平凡稳态解。对于正平衡点，趋化项的引入使得线性化矩阵产生非对角耦合项，临界阈值由源项导数与趋化效应共同决定，即使源项导数为负，足够强的趋化作用仍可诱发扩散驱动的失稳现象，从而丰富了系统的动力学行为。该研究为理解具有 Allee 效应的趋化系统提供了理论依据，所采用的方法也可推广至其他反应扩散系统的稳定性分析。

基金项目

本项工作由重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2022NSCQ-MSX1609)和重庆交通大学科研启动项目(No. 2020023034)资助完成。

参考文献

- [1] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(70\)90092-5](https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5)

-
- [2] Ma, T., Liu, A. and Wang, S.H. (2014) Dynamic Transition and Pattern Formation for Chemotactic Systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, **19**, 2809-2835. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.2809>
 - [3] Li, Q.C. and Chen, H.M. (2024) Global Boundedness and Asymptotic Stability of the Keller-Segel System with Logistic-Type Source in the Whole Space. arXiv: 2410.08648.
 - [4] Bisi, M., Groppi, M., Martalò, G. and Soresina, C. (2023) A Chemotaxis Reaction-Diffusion Model for Multiple Sclerosis with Allee Effect. *Ricerche di Matematica*, **73**, 29-46. <https://doi.org/10.1007/s11587-023-00806-9>
 - [5] Fu, S.M. and Liu, J. (2013) A Mathematical Characterization for Patterns of a Keller-Segel Model with a Cubic Source Term. *Advances in Mathematical Physics*, **2013**, 1-11. <https://doi.org/10.1155/2013/934745>
 - [6] Izuhara, H., Kuto, K. and Tsujikawa, T. (2018) Bifurcation Structure of Stationary Solutions for a Chemotaxis System with Bistable Growth. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **35**, 441-475. <https://doi.org/10.1007/s13160-017-0298-0>
 - [7] Qiao, Q. and Zhang, X. (2025) Traveling Waves to a Chemotaxis-Growth Model with Allee Effect. *Journal of Differential Equations*, **416**, 1747-1770. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.10.040>
 - [8] Kong, F.Z. and Wei, J.C. (2023) Existence and Stability of Localized Patterns in the Population Models with Large Advection and Strong Allee Effect. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **55**, 2505-2552. <https://doi.org/10.1137/22m148625x>
 - [9] Şengül, T., Tiryakioglu, B. and Yıldız Akıl, E. (2024) First Transition Dynamics of Reaction-Diffusion Equations with Higher Order Nonlinearity. *Studies in Applied Mathematics*, **153**, e12735. <https://doi.org/10.1111/sapm.12735>
 - [10] Okuda, T. and Osaki, K. (2011) Bifurcation of Hexagonal Patterns in a Chemotaxis-Diffusion-Growth System. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 3294-3305. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.05.026>
 - [11] Wang, Y.L. and Winkler, M. (2024) A Singular Growth Phenomenon in a Keller-Segel-Type Parabolic System Involving Density-Suppressed Motilities. *Mathematische Nachrichten*, **297**, 2353-2364. <https://doi.org/10.1002/mana.202300361>
 - [12] 马天, 汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧[M]. 北京: 科学出版社, 2007.