

多种群布鲁氏菌病模型的动力学分析及最优控制

张博尧, 代 群*

长春理工大学数学与统计学院, 吉林 长春

收稿日期: 2026年8月29日; 录用日期: 2026年9月22日; 发布日期: 2026年10月8日

摘 要

布鲁氏菌病是世界动物卫生组织划定的重点烈性人畜共患病之一。我国牛羊养殖业体量庞大、养殖覆盖面广, 使得布鲁氏菌病已成为国内突出的公共卫生问题。鉴于此, 本文构建包含牛、羊、人三类宿主种群的多种群布鲁氏菌病传播动力学模型, 重点刻画牛羊种群间的交叉混合感染机制, 以此探究布鲁氏菌病在不同宿主种群间的传播演化规律。理论分析结果表明, 当基本再生数 $R_0 \leq 1$ 时, 系统无病平衡点具有全局渐近稳定性; 当基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 系统存在唯一的地方病平衡点, 且该平衡点同样满足全局渐近稳定条件。在此基础上, 本文采用最小二乘法完成模型参数拟合与参数估计, 通过敏感性分析筛选影响疾病传播的关键参数, 并进一步构建布鲁氏菌病传播最优防控控制系统, 结合数值模拟验证模型动力学特征与防控策略有效性。研究结果证实, 规范牛羊养殖模式、杜绝混养混饲行为, 能够有效阻断牛羊种群间的交叉混合传播路径, 是降低布鲁氏菌病人群与畜禽感染率、遏制疾病扩散的核心防控举措。

关键词

布鲁氏菌病, 多种群模型, 环境污染, 敏感性分析, 最优控制策略

Dynamic Analysis and Optimal Control of a Multi-Group Brucellosis Model

Boyao Zhang, Qun Dai*

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: August 29, 2026; accepted: September 22, 2026; published: October 8, 2026

Abstract

Brucellosis is classified as one of the most severe zoonotic diseases by the World Organization for

*通讯作者。

文章引用: 张博尧, 代群. 多种群布鲁氏菌病模型的动力学分析及最优控制[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 51-65.
DOI: 10.12677/aam.2026.1510396

Animal Health. Due to the large-scale cattle and sheep breeding industry in China, brucellosis has become a prominent public health problem nationwide. Accordingly, this paper establishes a multi-species brucellosis transmission dynamics model involving three host populations: cattle, sheep, and humans, with a particular focus on characterizing the cross-infection mechanism between cattle and sheep populations, to explore the transmission and evolution rules of brucellosis among different host populations. Theoretical analysis results demonstrate that when the basic reproduction number $R_0 \leq 1$, the disease-free equilibrium of the system is globally asymptotically stable; when the basic reproduction number $R_0 > 1$, the system admits a unique endemic equilibrium, which is also globally asymptotically stable. On this basis, the least squares method is adopted for model parameter fitting and estimation. Furthermore, sensitivity analysis is performed to identify the key parameters affecting disease transmission, an optimal control system for brucellosis transmission is constructed, and numerical simulations are carried out to verify the dynamic characteristics of the proposed model and the effectiveness of prevention and control strategies. The research findings confirm that standardizing breeding patterns and prohibiting mixed breeding of cattle and sheep can effectively block the cross-transmission pathways between cattle and sheep populations, which serves as a core prevention and control measure to reduce the infection rate of brucellosis in livestock and humans and curb the spread of the disease.

Keywords

Brucellosis, Multi-Species Model, Environmental Pollution, Sensitivity Analysis, Optimal Control Strategy

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

布鲁氏菌病(简称“布病”)是由布鲁氏菌属细菌引起的一种经典的人兽共患病。它在全球范围内广泛分布,尤其在畜牧业发达地区流行严重,被世界卫生组织列为重要的被忽视的人畜共患病。在我国部分农牧区,布病疫情近年来呈现反弹态势,人间报告病例数居高不下,已成为严重的公共卫生问题。人布病的治疗周期长,药物副作用大,且易因治疗不彻底而转为慢性,导致劳动力丧失,给患者和家庭带来沉重负担。而布病在动物中可引起流产、不孕、产奶量下降等,导致巨大的直接经济损失,制约畜牧业的健康发展。因此,对布病的防控以及预测显得尤为重要,能够减轻对人和动物的危害。

数学模型可以从理论上结合观测数据考察各种控制策略的效果,并清晰阐明疾病的流行病学规律。许多研究人员利用数学模型对布鲁氏菌治病展开了流行病学研究,通过这些研究,他们发现了若干重要因素。Ainseba 等人于 2010 年提出了绵羊中布鲁氏菌病的两种传播方式:来自环境间接传播与感染个体的直接传播[1]。Kenne 等人研究了布鲁氏菌病模型带有感染年龄免疫力减弱的情况。探讨了不同的传播途径,并展示了其模型结果[2]。Li 等人建立了一个确定性模型,得出检测、免疫接种和混合交叉感染是关键因素的结论[3]。Sun 等人发现动物进口、扑杀措施和灭菌工作等因素是影响吉林省布鲁氏菌病的重要变量[4]。后续研究表明,布鲁氏菌病疫情具有独特的周期性和季节性传播机制。在文献[5]-[7]中,研究人员考虑了年龄结构,并提出了关于成年和幼年绵羊的多阶段动力学模型。许多种群动力学模型已经刻画了动物间的相互作用,包括群体间的相互影响和感染。

本文结构如下:在第 2 节中,我们建立一个多种群布鲁氏菌病的数学模型。在第 3 节中,我们分析模型解的正定性,并给出基本再生数,分析平衡点的稳定性。在第 4 节中,我们给出一个最优控制系统,

讨论最优控制策略。在第 5、6 节中, 我们进行敏感性分析并做数值模拟, 分析成本效益。在第 7 节中, 我们进行讨论并总结。

2. 模型建立

依据布鲁氏菌病的传播方式, 本文建立了一个包含牛群、羊群和人群的 $S_1I_1V_1E_1-S_2I_2V_2E_2-S_hI_h$ 多种群传染病模型。该模型所包含的流行病学类别分别是易感牛群 S_1 , 发病牛群 I_1 , 已接种疫苗牛群 V_1 , 牛群环境中布鲁氏菌群 E_1 , 易感羊群 S_2 , 发病羊群 I_2 , 已接种疫苗羊群 V_2 , 羊群环境中布鲁氏菌群 E_2 , 易感人群 S_h 以及发病人群 I_h 。其中群体总数分别为 $N_1 = S_1 + I_1 + V_1$, $N_2 = S_2 + I_2 + V_2$, $N_h = S_h + I_h$ 。

本文采用了动物种群间交叉感染的传播方式, 例如感染牛群以及牛群环境中的布鲁氏菌会感染易感羊群, 羊群的传播方式同理。该传播方式虽然更贴合混养牧场的真实情况, 但是牛羊的患病数据以及致病率不同, 可能导致数据模型存在偏差。同时对动物种群进行疫苗接种, 提高其抗体阳性率。人群方面, 易感人群会被感染牛羊群以及环境中的布鲁氏菌所感染, 为简化方程, 这里统一将感染牛群、羊群对易感人群的感染速率设定为 α_1 , 将牛羊环境中的布鲁氏菌对易感人群的感染速率设定为 α_2 。人群可以通过药物、疫苗以及自然康复等方法以 q 的速率恢复健康。模型的示意图如图 1 所示。参数定义见表 1。

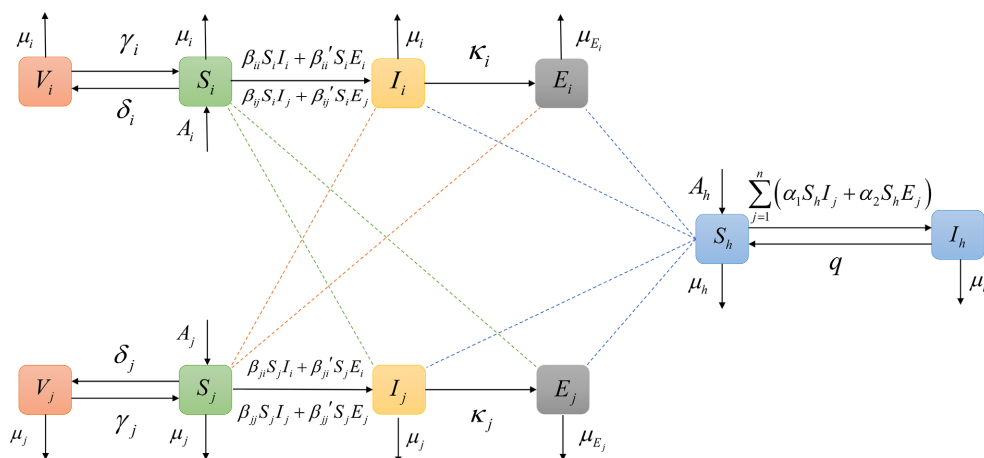


Figure 1. Model flowchart

图 1. 模型流程图

该数学模型由以下常微分方程表示:

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = A_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i E_j - (\mu_i + \delta_i) S_i + \gamma_i V_i \\ \frac{dI_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i E_j - \mu_i I_i \\ \frac{dV_i}{dt} = \delta_i S_i - (\mu_i + \gamma_i) V_i \\ \frac{dE_i}{dt} = \kappa_i I_i - \mu_{E_i} E_i \\ \frac{dS_h}{dt} = A_h - \sum_{j=1}^n (\alpha_1 S_h I_j + \alpha_2 S_h E_j) - \mu_h S_h + q I_h \\ \frac{dI_h}{dt} = \sum_{j=1}^n (\alpha_1 S_h I_j + \alpha_2 S_h E_j) - (\mu_h + q) I_h \end{cases}, \quad i=1,2 \quad (1)$$

并且系统(1)中所有极限集均包含于 10 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{10}$ 非负锥内的如下有界区域:

$$\Gamma = \left\{ (S_i, I_i, V_i, E_i, S_h, I_h) \mid S_i, I_i, V_i, E_i, S_h, I_h \geq 0, 0 \leq (S_i + I_i + V_i) \leq \frac{A_i}{\mu_i}, 0 \leq E_i \leq \frac{\kappa_i A_i}{\mu_{E_i} \mu_i}, i = 1, 2 \right\}$$

Table 1. Definitions of parameters in the model

表 1. 模型中每个参数的含义

参数	含义	参数	含义
A_i	出生率	μ_i	自然死亡率
μ_{E_i}	环境中布鲁氏菌自然消亡率	β_{11}	感染牛群对易感牛群的感染率
β_{12}	感染羊群对易感牛群的感染率	β_{21}	感染牛群对易感羊群的感染率
β_{22}	感染羊群对易感羊群的感染率	β'_{11}	牛群环境中布鲁氏菌对易感牛群的感染率
β'_{12}	羊群环境中布鲁氏菌对易感牛群的感染率	β'_{21}	牛群环境中布鲁氏菌对易感羊群的感染率
β'_{22}	羊群环境中布鲁氏菌对易感羊群的感染率	α_1	感染动物种群对易感人群的感染率
α_2	环境中布鲁氏菌对易感人群的感染率	δ_i	疫苗接种率
γ_i	疫苗失效率	κ_i	布鲁氏菌脱落率
q	人群康复率		

其中当 $i = 1$ 时表示牛群, $i = 2$ 时表示羊群, $i = h$ 时表示人群。

3. 动力学分析

系统(1)可以由向量法表示成:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

其中 $x(t) = (S_1, I_1, V_1, E_1, S_2, I_2, V_2, E_2, S_h, I_h)$, $f(x(t)) = (f_1(x(t)), \dots, f_{10}(x(t)))$ 由系统(1)定义。

3.1. 解的正定性

定理 1 集合 Γ 是系统(1)的正不变集。也就是说, 对所有的初值 $x(t) \in \Gamma$, 系统(1)的解 $x(t)$ 在任意时刻 $t > 0$ 都始终在 Γ 中。

证明: 考虑边界 $\partial\Gamma$ 。令 $H_{k,1} (k = 1, \dots, 8)$ 。而他们的法向量分别为

$$\begin{aligned} \omega_{1,1} &= (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \omega_{2,1} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \omega_{3,1} &= (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \omega_{4,1} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \omega_{5,1} &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \omega_{6,1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0), \\ \omega_{7,1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0), \omega_{8,1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

令 $x \in H_{k,1} (k = 1, \dots, 8)$, 并考虑以下情形:

情形 1: $S_1 = 0$ 。由 $V_1 \geq 0$ 可得 $\langle f(x), \omega_{1,1} \rangle = -(\mu_1 + \gamma V_1) \leq 0$ 。

情形 2: $I_1 = 0$ 。由 $S_1 \geq 0, E_i \geq 0$ 可得 $\langle f(x), \omega_{2,1} \rangle = -\sum_{j=1}^n \beta'_{ij} S_1 E_j \leq 0$ 。

情形 3: $V_1 = 0$ 。由 $S_1 \geq 0$ 可得 $\langle f(x), \omega_{3,1} \rangle = -\delta_1 S_1 \leq 0$ 。

情形 4: $E_1 = 0$ 。由 $I_1 \geq 0$ 可得 $\langle f(x), \omega_{4,1} \rangle = -\kappa_1 I_1 \leq 0$ 。

情形 5: $S_1 + I_1 + V_1 = 1$ 。可得 $\langle f(x), \omega_{5,1} \rangle = 0$ 。

情形 6: $S_h = 0$ 。由 $I_h \geq 0$ 可得 $\langle f(x), \omega_{6,1} \rangle = -(\mu_h + q I_h) \leq 0$ 。

情形 7: $I_h = 0$ 。由 $S_h \geq 0, I_j \geq 0, E_j \geq 0$ 可得

$$\langle f(x), \omega_{7,1} \rangle = -\left(\sum_{j=1}^n \alpha_1 S_h I_j + \sum_{j=1}^n \alpha_2 S_h E_j \right) \leq 0。$$

情形 8: $S_h + I_h = 1$ 。可得 $\langle f(x), \omega_{8,1} \rangle = 0$ 。

证毕。

3.2. 无病平衡点及基本再生数

定理 2 系统(1)的基本再生数为

$$R_0 = \rho(B_1) = \rho \left(\left(\frac{\beta_{ij} S_{0,i}}{\mu_i} + \frac{\kappa_i \beta'_{ij} S_{0,i}}{\mu_i^2} \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \right)。$$

证明: 根据文献中[8]所提出的下一代矩阵以及基本再生数相关理论, 我们定义仅包含疾病感染类变量的向量 $m = (I_1, I_2, E_1, E_2)$ 。令系统(1)右端为 0, 可以计算出该系统的无病平衡点:

$$x_0 = (S_i^0, I_i^0, V_i^0, E_i^0, S_h, I_h) = \left(\frac{A_i(\mu_i + \gamma)}{\mu_i(\mu_i + \gamma + \delta_i)}, 0, \frac{A_i \delta_i}{\mu_i(\mu_i + \gamma + \delta_i)}, 0, 1, 0 \right), \quad i = 1, 2。$$

根据下一代矩阵算法[9]方法可得基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \rho \left(\left(\frac{\beta_{ij} S_i^0}{\mu_i} + \frac{\kappa_i \beta'_{ij} S_i^0}{\mu_i^2} \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \right)。$$

3.3. 无病平衡点稳定性分析

定理 3 当 $R_0 \leq 1$ 时, 系统(1)的无病平衡点 x_0 在 Γ 内是全局渐进稳定的。

证明: 根据[10]的方法证明该定理。首先将疾病相关仓室改写为 $x = (I_1, I_2, E_1, E_2)$, 仅考虑这两个仓室的系统(1)可改写为: $x' = (F - V)x - f(x, S)$, 其中

$$f(x, S) = \left(\sum_{j=1}^2 (\beta_{1j} I_j + \beta'_{1j} E_j) (S_1^0 - S_1), \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j} I_j + \beta'_{2j} E_j) (S_2^0 - S_2) \right) \geq 0。$$

对所有的 $(x, S) \in \Gamma$, $f(x, S)$ 是一个任意元素都非负的向量, 且对所有的 $(x, S_0) \in \Gamma$, 都有 $f(x, S_0) = 0$ 。

给出一个 ω^T 作为 R_0 的左特征向量, 并定义 $\omega^T = (\omega_1, \omega_2)$, 其中 ω_1 为非负矩阵。我们要证明 $\omega > 0$, 显然 ω_1 是非负矩阵 B_1 对应其谱半径 $\rho(B_1) = R_0$ 的左特征向量。由于 B_1 是不可约非负矩阵, 根据 Perron-

Frobenius 定理可知 $\omega_1 > 0$ 。此外, 记 $B_2 = \left(\frac{\beta'_{ij} S_i^0}{\mu_i} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$, 则有 $\omega_1 B_2 = R_0 \omega_2$, 因为 $\omega_1 B_2 > 0$, 故 $\omega_2 > 0$ 。综

上可证 $\omega > 0$ 。

现在构造李雅普诺夫函数:

$$\begin{aligned} L' &= \omega^T V^{-1} x \\ &= \omega^T V^{-1} (F - V)x - \omega^T V^{-1} f(x, S) \\ &= (R_0 - 1) \omega^T x - \omega^T V^{-1} f(x, S). \end{aligned}$$

由于 $\omega^T > 0$, $V^{-1} \geq 0$ 且 $f(x, S) \geq 0$, 因此可以推出 $L' \leq (R_0 - 1) \omega^T x$ 。于是当 $R_0 \leq 1$ 时, 必定有 $L' \leq 0$ 。因此, 根据 LaSalle 不变集原理[11], 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点 x_0 时全局渐进稳定的。

3.4. 地方性平衡点存在唯一性与稳定性

定理 4 当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)在 Γ 内存在唯一的地方性平衡点 $x^* = (S_i^*, I_i^*, V_i^*, E_i^*, S_h^*, I_h^*)$ 。

证明: 考虑系统(a)

$$\begin{cases} A_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i E_j - (\mu_i + \delta_i) S_i + \gamma_i (1 - S_i - I_i) = 0 \\ \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i E_j - \mu_i I_i = 0 \\ \kappa_i I_i - \mu_{E_i} E_i = 0 \end{cases}$$

排除无病平衡点 x_0 , 假设存在 $I_i^* > 0$ 。由系统(a)可得

$$I_i^* = \frac{\sum_{j=1}^2 (A_i)_{i,j} I_i^*}{1 + \sum_{j=1}^2 (A_i)_{i,j} I_i^*}。$$

定义函数 $P = (p_1, p_2): \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, 如下所示:

$$p_i(g) = \frac{\sum_{j=1}^2 (A_i)_{i,j} g_j}{1 + \sum_{j=1}^2 (A_i)_{i,j} g_j}, \quad i = 1, 2. \text{ 并取 } \varepsilon = \min_i \frac{(1-r) \sum_{j=1}^2 (A_i)_{i,j} g_j}{1 + r \sum_{j=1}^2 (A_i)_{i,j} g_j}。$$

综上所述, 对 $i = 1, 2$, 都有 $\frac{\partial p_j}{\partial g_j} > 0$ 。因此 P 在其所有分量上都是单调递增的。此外 P 在零点处的雅

可比矩阵 $J_p(0) = B_1$, B_1 是一个非负、不可约矩阵。根据[12]可知, 函数 $P(x)$ 是有界且严格次线性的, 系统(a)在 Γ 内存在唯一的地方性平衡点 x^* 。

定理 5 假设 $(\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ 和 $(\beta'_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ 是不可约的, 则当 $R_0 > 1$ 时, 地方性平衡点 x^* 在 Γ 上是全局渐进稳定的。

证明: 令系统(1)右侧均为 0 可得到

$$\begin{cases} A_i = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i^* E_j^* + (\mu_i + \delta_i) S_i^* - \gamma_i V_i^* \\ \mu_i I_i^* = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i^* E_j^* \\ \delta_i S_i^* = (\mu_i + \gamma_i) V_i^* \\ \kappa_i I_i^* = \mu_{E_i} E_i^* \\ A_h = \sum_{j=1}^n (\alpha_1 S_h^* I_j^* + \alpha_2 S_h^* E_j^*) + \mu_h S_h^* - q I_h^* \\ (\mu_h + q) I_h^* = \sum_{j=1}^n (\alpha_1 S_h^* I_j^* + \alpha_2 S_h^* E_j^*) \end{cases}$$

$$\text{令 } L_{i,1} = S_i - S_i^* - S_i^* \ln \frac{S_i}{S_i^*} + I_i - I_i^* - I_i^* \ln \frac{I_i}{I_i^*} + V_i - V_i^* - V_i^* \ln \frac{V_i}{V_i^*}, \quad L_{i,2} = E_i - E_i^* - E_i^* \ln \frac{E_i}{E_i^*},$$

$L_h = S_h - S_h^* - S_h^* \ln \frac{S_h}{S_h^*} + I_h - I_h^* - I_h^* \ln \frac{I_h}{I_h^*}$, $i=1,2$, 对其求导并利用平衡方程可得:

$$\begin{aligned} \frac{dL_{i,1}}{dt} &= \mu_i S_i^* \left(2 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{S_i}{S_i^*} \right) + \gamma_i V_i^* \left(1 - \frac{S_i^*}{S_i} \right) \left(\frac{V_i}{V_i^*} - 1 \right) + \delta_i S_i^* \left(3 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{V_i}{V_i^*} - \frac{S_i V_i^*}{S_i^* V_i} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(2 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{I_i}{I_i^*} + \frac{I_j}{I_j^*} - \frac{S_i I_j I_i^*}{S_i^* I_j^* I_i} \right) + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i^* E_j^* \left(2 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{I_i}{I_i^*} + \frac{E_j}{E_j^*} - \frac{S_i E_j I_i^*}{S_i^* E_j^* I_i} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*} \right) + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i^* E_j^* \left(\frac{E_j}{E_j^*} - \ln \frac{E_j}{E_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*} \right) \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{dL_{i,2}}{dt} \leq \kappa_i I_i^* \left(\frac{I_i}{I_i^*} - \ln \frac{I_i}{I_i^*} + \ln \frac{E_i}{E_i^*} - \frac{E_i}{E_i^*} \right)$$

$$\frac{dL_h}{dt} \leq \sum_{j=1}^2 \alpha_1 S_h^* I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_h}{I_h^*} - \frac{I_h}{I_h^*} \right) + \sum_{j=1}^2 \alpha_2 S_h^* E_j^* \left(\frac{E_j}{E_j^*} - \ln \frac{E_j}{E_j^*} + \ln \frac{I_h}{I_h^*} - \frac{I_h}{I_h^*} \right)$$

$$\text{定义 } L = \sum_{i=1}^2 l_i \left(L_{i,1} + \frac{\sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i^* E_j^*}{\kappa_i I_j^*} L_{i,2} \right) + \omega_h L_h$$

$$\begin{aligned} \text{则有 } \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^2 l_i \left(\sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*} \right) + \sum_{j=1}^2 \alpha_1 S_h^* I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_h}{I_h^*} - \frac{I_h}{I_h^*} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^2 \alpha_2 S_h^* E_j^* \left(\frac{E_j}{E_j^*} - \ln \frac{E_j}{E_j^*} + \ln \frac{I_h}{I_h^*} - \frac{I_h}{I_h^*} \right) \right) \end{aligned}$$

令 $F_i(x_i) = -\frac{x_i}{x_i^*} + \ln \frac{x_i}{x_i^*}$, 则可证 F_i 与 L 满足文献[13]。因此文献所定义的函数 V 是系统(1)的李雅普诺

夫函数, 即对所有 $P^* \in X$, 均有 $V' \leq 0$ 。根据 LaSalle 不变性原理[11], 当 $R_0 > 1$ 时, P^* 在区域 X 内是全局渐进稳定的。故当 $R_0 > 1$ 时, 地方性平衡点 x^* 在 Γ 上是全局渐进稳定的。证毕。

4. 最优控制问题

在本节中, 引入控制并变量 μ_1 , μ_2 , μ_3 , 并给出以下方程:

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = A_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i E_j - \mu_i S_i + \gamma_i V_i - (\delta_i + u_1(t)) S_i \\ \frac{dI_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \sum_{j=1}^2 \beta'_{ij} S_i E_j - \mu_i I_i - u_2(t) I_i \\ \frac{dV_i}{dt} = (\delta_i + u_1(t)) S_i - (\mu_i + \gamma_i) V_i \\ \frac{dE_i}{dt} = \kappa_i I_i - \mu_{E_i} E_i - u_3(t) E_i \\ \frac{dS_h}{dt} = A_h - \sum_{j=1}^n (\alpha_1 S_h I_j + \alpha_2 S_h E_j) - \mu_h S_h + q I_h \\ \frac{dI_h}{dt} = \sum_{j=1}^n (\alpha_1 S_h I_j + \alpha_2 S_h E_j) - (\mu_h + q) I_h \end{cases}, \quad i=1,2$$

其中 $u_1(t)$ 表示增加疫苗的接种率, 让更多的牛羊进行疫苗接种; $u_2(t)$ 表示对已经感染的牛羊进行扑杀; $u_3(t)$ 表示对环境中的布鲁氏菌进行消除。接下来, 考虑依赖于状态变量 S, I, V, E 的控制变量集合 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in U_{ad}$ 。控制集 U_{ad} 的定义为:

$$U_{ad} = \{(u_1, u_2, u_3) | 0 \leq u_i \leq 1, t \in [0, T], i=1, 2, 3\},$$

其中 $u_i(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上是 Lebesgue 可测的。这里 U (控制域) 指每个控制变量的取值范围约束 $[0, 1]$, 控制集 U_{ad} 进一步加入了控制变量在该时间区间上的可测性条件。该最优控制的目标函数定义为

$$J(u) = \int_0^T \left(\omega_1 I_1(t) + \omega_2 I_2(t) + \omega_3 I_h(t) + \frac{1}{2} \xi_1 u_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2 u_2^2 + \frac{1}{2} \xi_3 u_3^2 \right) dt$$

其中, ω_1 , ω_2 , ω_3 别为感染牛个体, 感染羊个体以及感染人个体的权重系数, ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 为对应三个控制变量的权重系数。目标是找到最优控制策略组合 $(u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t))$, 使得防控成本、感染牛、羊数量与感染人类数量同时最小化。因此, 我们希望满足以下条件:

$$J(u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)) = \min_{u_i \in U_{ad}} J(u_1, u_2, u_3)$$

根据 Pontryagin 极大值原理, 可以将哈密顿函数表示如下:

$$\begin{aligned} H = & \omega_1 I_1(t) + \omega_2 I_2(t) + \omega_3 I_h(t) + \frac{1}{2} \xi_1 u_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2 u_2^2 + \frac{1}{2} \xi_3 u_3^2 + \lambda_1 \frac{dS_1}{dt} + \lambda_2 \frac{dI_1}{dt} \\ & + \lambda_3 \frac{dV_1}{dt} + \lambda_4 \frac{dE_1}{dt} + \lambda_5 \frac{dS_2}{dt} + \lambda_6 \frac{dI_2}{dt} + \lambda_7 \frac{dV_2}{dt} + \lambda_8 \frac{dE_2}{dt} + \lambda_9 \frac{dS_h}{dt} + \lambda_{10} \frac{dI_h}{dt} \end{aligned}$$

其中, $\lambda_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 为对应的伴随变量。根据 Pontryagin 极大值原理, 可以得到

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = ((\beta_{11} + \beta_{12})I_1 + (\beta'_{11} + \beta'_{12})E_1)(\lambda_1 - \lambda_2) - (\mu_1 + \delta_1)\lambda_1 - \delta_1\lambda_2 \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\omega_1 + (\beta_{11} + \beta_{12})S_1(\lambda_1 - \lambda_2) + (\mu_1 + u_2)I_1 - \kappa_1\lambda_3 + \alpha_1S_h(\lambda_9 - \lambda_{10}) \\ \frac{d\lambda_3}{dt} = -\gamma_1\lambda_1 + (\mu_1 + \gamma_1)\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_4}{dt} = (\beta'_{11} + \beta'_{12})S_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu_{E_1}\lambda_4 + \alpha_2S_h(\lambda_9 - \lambda_{10}) \\ \frac{d\lambda_5}{dt} = ((\beta_{21} + \beta_{22})I_2 + (\beta'_{21} + \beta'_{22})E_2)(\lambda_5 - \lambda_6) - (\mu_2 + \delta_2)\lambda_5 - \delta_2\lambda_6 \\ \frac{d\lambda_6}{dt} = -\omega_2 + (\beta_{21} + \beta_{22})S_2(\lambda_5 - \lambda_6) + (\mu_2 + u_2)I_2 - \kappa_2\lambda_7 + \alpha_1S_h(\lambda_9 - \lambda_{10}) \\ \frac{d\lambda_7}{dt} = -\gamma_2\lambda_2 + (\mu_2 + \gamma_2)\lambda_7 \\ \frac{d\lambda_8}{dt} = (\beta'_{21} + \beta'_{22})S_2(\lambda_5 - \lambda_6) + \mu_{E_2}\lambda_8 + \alpha_2S_h(\lambda_9 - \lambda_{10}) \\ \frac{d\lambda_9}{dt} = (\alpha_1(I_1 + I_2) + \alpha_2(E_1 + E_2))(\lambda_9 - \lambda_{10}) + \mu_h\lambda_9 \\ \frac{d\lambda_{10}}{dt} = -(\omega_3 + q\lambda_9 - (\mu_h + q)\lambda_{10}) \end{cases}$$

由于最优控制系统的状态变量没有指定终值, 因此横截条件在 T 时刻有 $\lambda_i(T) = 0, i = (1, 2, \dots, 10)$ 。

5. 数值模拟

5.1. 参数估计

在本节中, 首先采用最小二乘法进行参数估计。所需数据以埃及兽医总局报告公布的 1999 年 2011 年埃及牛、羊群布鲁氏菌病流行数据为依据[14], 再结合埃及人群患病数据进行拟合[15]。拟合结果如图 2 所示, 其中散点代表实际观测数据, 曲线表示模型预测结果。模型各参数取值见表 2。其中经计算后的牛群 RMSE 为 202.47, 羊群的 RMSE 为 739.30, 人群的 RMSE 为 817.21。

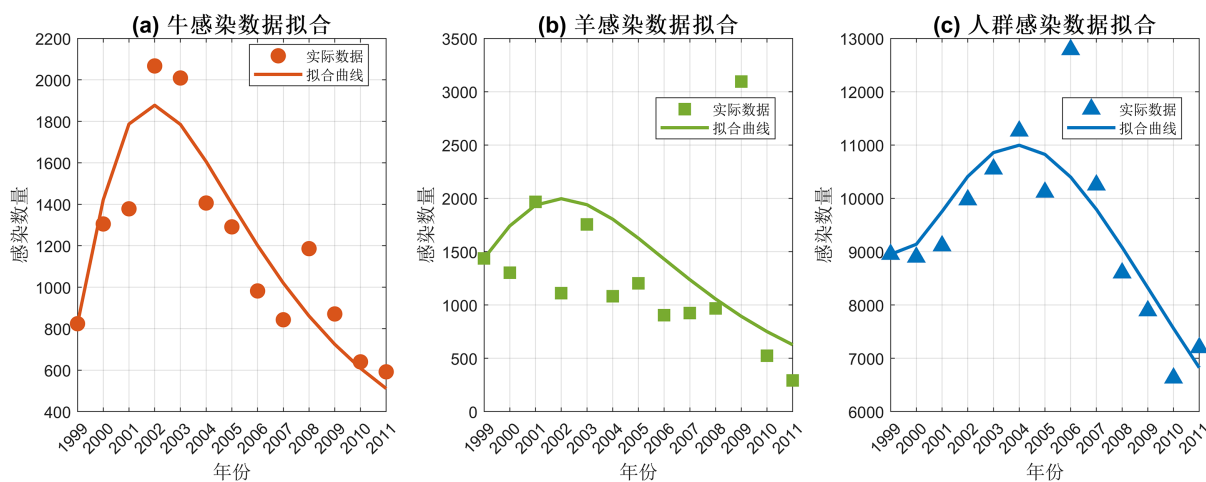


Figure 2. Fitting curves for parameter estimation

图 2. 参数估计拟合曲线

Table 2. Values of each parameter
表 2. 各参数取值结果

参数	取值结果	参数	取值结果
A_1	327	A_2	200
A_h	441	μ_1	0.2323
μ_2	0.2229	μ_h	0.01
μ_{E_1}	0.0717	μ_{E_2}	0.0694
β_{11}	6.194513e-05	β_{12}	1.002448e-06
β_{21}	8.408996e-06	β_{22}	1.418904e-05
β'_{11}	2.668082e-07	β'_{12}	1.846825e-07
β'_{21}	1.010383e-07	β'_{22}	1.001270e-07
α_1	3.722276e-06	α_2	8.428948e-08
δ_1	0.2426	δ_2	0.0917
γ_1	0.05	γ_2	0.3211
κ_1	0.8493	κ_2	1.1642
q	0.4504		

5.2. PRCC 敏感性分析

为识别影响布鲁氏菌病传播的关键参数, 采用偏秩相关系数(Partial Rank Correlation Coefficient, PRCC)方法, 对模型中的参数进行全局敏感性分析。以基本再生数作为输出指标, 评估各参数变化对疫情传播风险的影响程度。

本文采用拉丁超立方采样(Latin Hypercube Sampling, LHS), 取样本量 $N = 500$, 基于上述拟合的参数值进行分析。由于基本再生数 R_0 仅与牛群羊群的参数相关, 并且牛羊群的室及其传播方式相同, 故在此仅展示牛群的 PRCC 结果图。由图 3 可见, 出生率、种群内部感染参数、疫苗接种率以及动物的自然死亡率对基本再生数 R_0 的影响较大。

5.3. 最优控制数值模拟

通过对模型的数值模拟分析, 验证了最优控制理论结果的正确性以及参数取值对传染病传播的影响。

令状态变量为 $X = (S_1, I_1, V_1, E_1, S_2, I_2, V_2, E_2, S_h, I_h)$, 令伴随变量为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10})$, 并令控制变量为 $U_{ad} = (u_1, u_2, u_3)$ 。

具体算法步骤如下:

在时间区间 $[0, t_f]$ 内对控制变量 U 进行初始预估。

利用初始条件以及预估的控制变量 U 值, 基于系统(1)向前时域求解状态变量 X 。

利用横截性条件、控制函数以及状态变量取值, 逆时间向后求解伴随变量。

将更新后的状态变量与伴随变量数值代入最优控制条件, 对控制变量 U 进行迭代更新。

检查收敛性, 重复上述步骤, 直至当前状态变量值、伴随变量值和控制变量值均达到充分收敛。

本文展示了最优控制和无防控措施两种情景下, 感染牛群, 感染羊群, 环境中布鲁氏菌病含量以及易感人群和感染人群的时间动态变化规律。

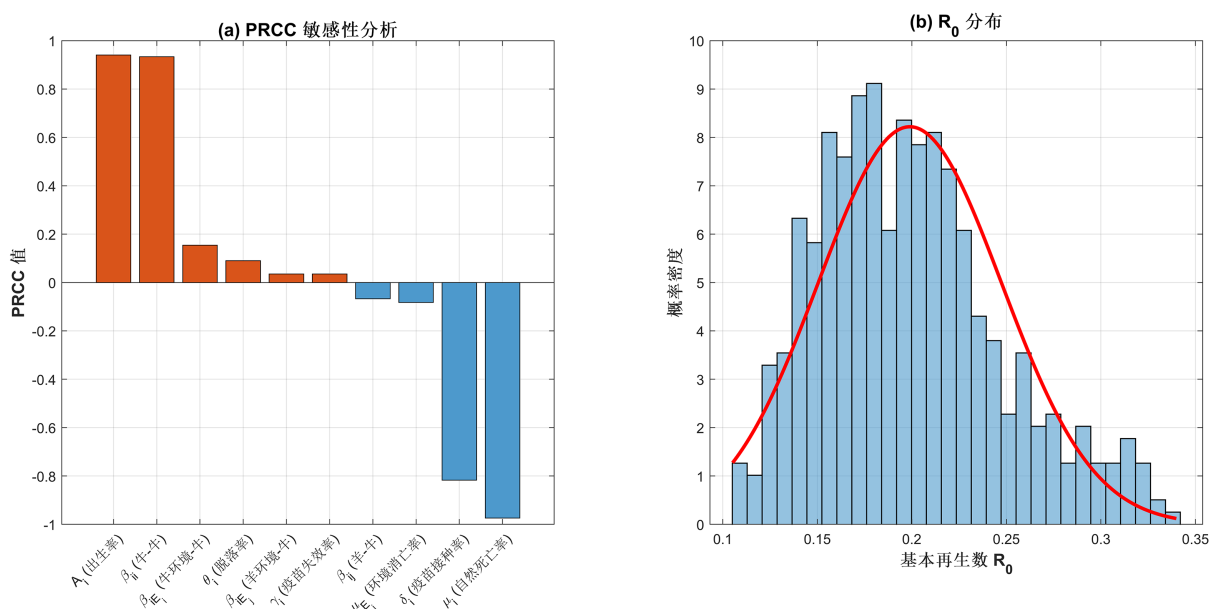


Figure 3. PRCC sensitivity analysis results
图 3. PRCC 敏感性分析结果图

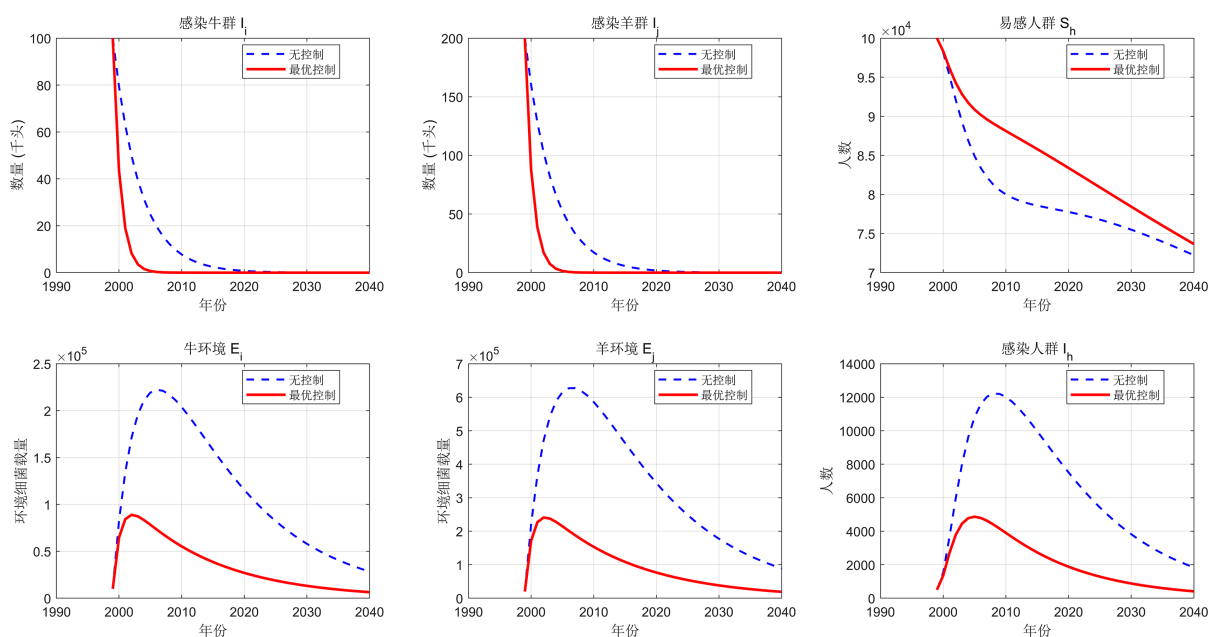


Figure 4. Comparison of the numbers of infected cattle, sheep-goats, Brucella in the environment and human
图 4. 感染牛、羊群数量、环境中布鲁氏菌以及人群对比图

由图 4 分析可知, 作为病原体主要传染源的感染牛群、羊群的动态变化。在无控制情景下, 感染动

物种群数量下降缓慢, 在 2025 年才几乎平稳。这也是疫病在未受管控时的典型传播特征, 病原体在易感个体间快速增殖并扩散。施加最优控制措施后, 与之形成鲜明对比。感染动物种群在 2006 年时, 其数量曲线平稳维持在低位, 表明疫病传播被迅速遏制。而环境中的布鲁氏菌在最优控制的影响下, 也有显著的变化。通过对比发现, 在动物种群受管控以后, 易感人群在疾病爆发初期直至疾病结束, 数量都处于无控制之上, 大大减少了患病人群的数量。

整体而言, 采用本文所提出的防控策略后, 不仅能够缓解疫病带来的短期影响, 还有利于维持动物群体以及人群的长期健康与可持续发展。鉴于布鲁氏菌病具有人畜共患病风险, 该最优防控策略对畜牧生产与公共卫生安全均具有十分重要的现实意义。

6. 恒定控制策略

为研究不同防控策略对布鲁氏菌病的防控效果, 本文将控制变量 u_1 , u_2 , u_3 统一设定为 0.5, 对单一防控、双重联合防控以及三重联合防控进行分析。由于 $u \in [0,1]$, 故取值 0.5 代表中等强度防控措施, 在同等强度的防控策略下, 能够直观区分各类组合方案的不同之处。

对于动物种群, 如图 5 所示, 三类单一防控策略均能减少牛羊布鲁氏菌病总感染量以及环境中布鲁氏菌的数量。其中, u_3 对于感染动物数量的减少并没有显著效果, 但是对于减少环境中布鲁氏菌的数量有着显著的效果。而 u_1 , u_2 对于两种情况的效果都处于中等水平, 且 u_2 效果优于 u_1 。如图 6 所示, 三种双重防控策略都能够有效进行防控, 并且不同的控制组合在不同的防控方面上各有优势所在。所以选择哪种双重防控策略均可。图 7 表明三重防控策略相比于单一、双重防控策略, 能够大幅减少动物的感染数量以及环境中布鲁氏菌的数量。故三重防控策略在减少牛羊布鲁氏菌病总感染量以及环境中布鲁氏菌的数量上效果最优。

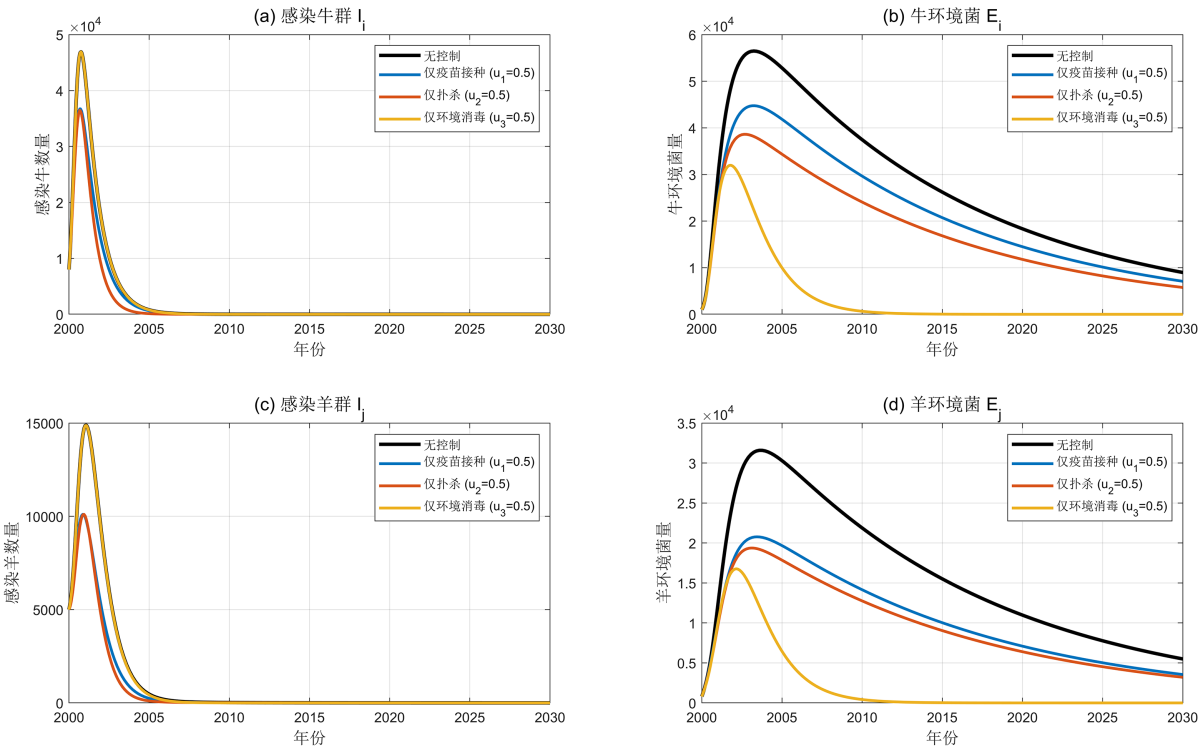


Figure 5. Comparison of animals and environment under single-control strategies

图 5. 单一防控策略动物及环境对比图

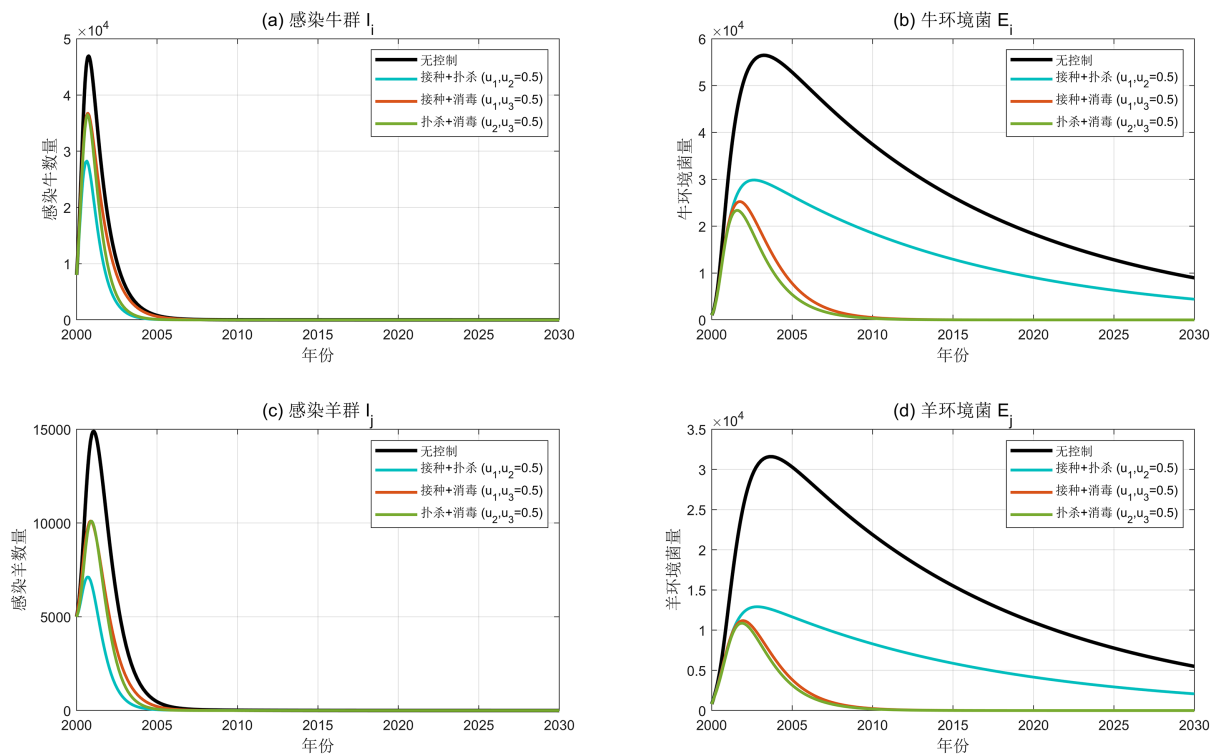


Figure 6. Comparison of animals and environment under dual-control strategies

图 6. 双重防控策略动物及环境对比图

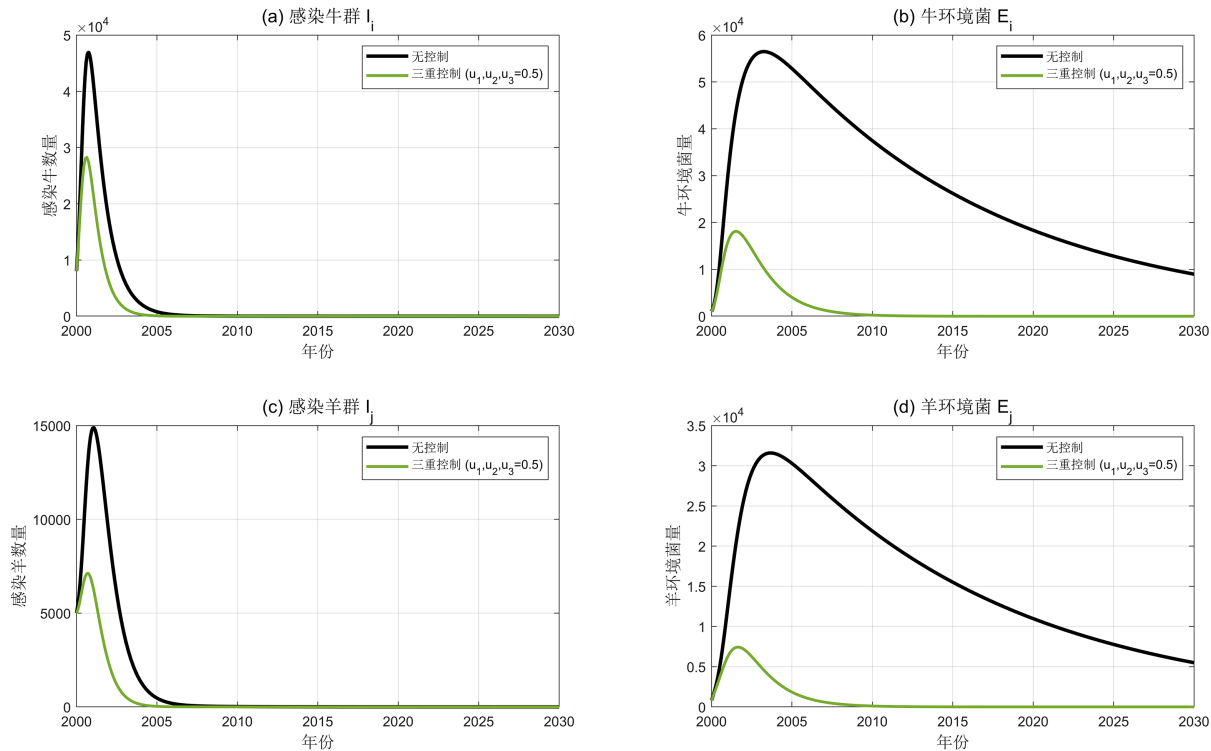


Figure 7. Comparison of animals and environment under triple-control strategies

图 7. 三重防控策略动物及环境对比图

7. 结论与讨论

本文建立了一个包含牛群、羊群和人群的 $S_1I_1V_1E_1 - S_2I_2V_2E_2 - S_hI_h$ 多种群传染病模型。理论分析部分证明：当基本再生数 $R_0 \leq 1$ 时，系统的无病平衡点具有全局渐近稳定性；当基本再生数 $R_0 > 1$ 时，系统存在唯一的地方性平衡点，该地方性平衡点具有全局渐近稳定性，同时本文分析了最优控制策略。数值模拟部分，本文通过最小二乘法完成模型参数估计，并对基本再生数中的参数进行了 PRCC 敏感性分析。最后，本文基于理论部分构建的最优控制开展数值模拟，并研究了三项防控策略。

布鲁氏菌病传播模式极为复杂，本文在动物种群相互感染的情况下，添加了牛羊群对应的环境仓室，意味着环境中的布鲁氏菌也会对动物进行感染。同时加入了人群，而人群会同时被感染动物以及环境中的布鲁氏菌感染。受模型复杂度限制，以及三种群数据的契合度，导致数值模拟以及分析的效果并不能达到最佳效果。

综上所述，要避免动物混养导致布鲁氏菌病的大爆发，同时应当增加疫苗接种率。在经济情况的允许下，对感染动物进行扑杀以及消除环境中布鲁氏菌，从而达到减少感染动物数量以及环境中布鲁氏菌的数量。进而能够减少因布鲁氏菌而感染的人类数量。

参考文献

- [1] Aïnseba, B.E., Benosman, C. and Magal, P. (2010) A Model for Ovine Brucellosis Incorporating Direct and Indirect Transmission. *Journal of Biological Dynamics*, **4**, 2-11. <https://doi.org/10.1080/17513750903171688>
- [2] Kenne, C., Mophou, G., Dorville, R. and Zongo, P. (2022) A Model for Brucellosis Disease Incorporating Age of Infection and Waning Immunity. *Mathematics*, **10**, Article 670. <https://doi.org/10.3390/math10040670>
- [3] Li, M., Sun, G., Zhang, J., Jin, Z., Sun, X., Wang, Y., et al. (2014) Transmission Dynamics and Control for a Brucellosis Model in Hinggan League of Inner Mongolia, China. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **11**, 1115-1137. <https://doi.org/10.3934/mbe.2014.11.1115>
- [4] Nie, J., Sun, G., Sun, X., Zhang, J., Wang, N., Wang, Y., et al. (2014) Modeling the Transmission Dynamics of Dairy Cattle Brucellosis in Jilin Province, China. *Journal of Biological Systems*, **22**, 533-554. <https://doi.org/10.1142/s021833901450020x>
- [5] Hou, Q., Sun, X., Zhang, J., Liu, Y., Wang, Y. and Jin, Z. (2013) Modeling the Transmission Dynamics of Sheep Brucellosis in Inner Mongolia Autonomous Region, China. *Mathematical Biosciences*, **242**, 51-58. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.11.012>
- [6] Li, M., Sun, G., Wu, Y., Zhang, J. and Jin, Z. (2014) Transmission Dynamics of a Multi-Group Brucellosis Model with Mixed Cross Infection in Public Farm. *Applied Mathematics and Computation*, **237**, 582-594. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.094>
- [7] Li, M., Jin, Z., Sun, G. and Zhang, J. (2017) Modeling Direct and Indirect Disease Transmission Using Multi-Group Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **446**, 1292-1309. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.09.043>
- [8] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P. and Roberts, M.G. (2010) The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *Journal of The Royal Society Interface*, **7**, 873-885. <https://doi.org/10.1098/rsif.2009.0386>
- [9] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6)
- [10] Shuai, Z. and van den Driessche, P. (2013) Global Stability of Infectious Disease Models Using Lyapunov Functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **73**, 1513-1532. <https://doi.org/10.1137/120876642>
- [11] La Salle, J.P. (1976) The Stability of Dynamical Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970432>
- [12] Hethcote, H.W. and Thieme, H.R. (1985) Stability of the Endemic Equilibrium in Epidemic Models with Subpopulations. *Mathematical Biosciences*, **75**, 205-227. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(85\)90038-0](https://doi.org/10.1016/0025-5564(85)90038-0)
- [13] Li, M.Y. and Shuai, Z. (2010) Global-Stability Problem for Coupled Systems of Differential Equations on Networks. *Journal of Differential Equations*, **248**, 1-20. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.09.003>
- [14] Wareth, G., Hikal, A., Refai, M., Melzer, F., Roesler, U. and Neubauer, H. (2014) Animal Brucellosis in Egypt. *The Journal of Infection in Developing Countries*, **8**, 1365-1373. <https://doi.org/10.3855/jidc.4872>

-
- [15] El-Ghitany, E.M., Omar, S.R., Abaza, A.M., *et al.* (2014) Trends in the Epidemiology of Brucellosis in a Highly Afflicted Region in Egypt: A 16 Year Experience (1997-2012). *International Journal of Tropical Disease & Health*, **4**, 250-271.
<https://doi.org/10.9734/ijtdh/2014/7025>