

长度为 $2^m + 7$ 的II型Z-互补序列对

孙晓月

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年9月13日; 录用日期: 2026年10月6日; 发布日期: 2026年10月15日

摘 要

Z-互补序列因在准同步通信中能够有效的抑制多址干扰和符号间干扰且具有低峰均包络功率比的优势, 使其成为通信信号、雷达、信道估计等领域的重要研究对象。针对现有Z-互补序列长度受限和灵活性不足问题, 本文提出了一种新型长度的序列构造。该构造方法是基于广义布尔函数, 对已有序列采取迭代插入操作, 从而得到序列长度为 $2^m + 7$ 、零相关区宽度为 $2^{m-1} + 4$ 的II型Z-最优互补序列。本文的研究丰富了Z-互补序列在长度灵活性方面的构造, 在理论意义和工程应用方面具有一定的价值。

关键词

广义布尔函数, 迭代插入函数, Z-互补序列, 零相关区

Type-II Z-Complementary Sequence Pairs of Length $2^m + 7$

Xiaoyue Sun

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: September 13, 2026; accepted: October 6, 2026; published: October 15, 2026

Abstract

Owing to their advantages in effectively suppressing multiple access interference and inter-symbol interference in quasi-synchronous communications, as well as possessing low peak-to-average power ratio, Z-complementary sequences have become important research objects in fields such as communication signals, radar, and channel estimation. Aiming at the problems of limited length and insufficient flexibility of existing Z-complementary sequences, this paper proposes a construction of sequences with novel lengths. Based on generalized Boolean functions, the proposed method performs iterative insertion operations on existing sequences, so as to obtain Type-II Z-optimal complementary sequences with sequence length $2^m + 7$ and zero correlation zone width $2^{m-1} + 4$. In this

paper, the research enriches the construction of Z-complementary sequences in terms of length flexibility, and has certain theoretical significance and engineering application value.

Keywords

Generalized Boolean Function, Iterative Insertion Function, Z-Complementary Sequence, Zero Correlation Zone

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Golay 在 1951 年的静态多狭缝原理研究中,为了更好地提升光谱检测效率以及抑制非目标波长干扰,首次提出了互补序列的概念[1],并于 1961 年系统性地互补序列理论进行了完善,确立了其定义、性质、构造方法及其存在性,为之后在通信、雷达、信号处理方面的研究奠定了理论基础,具有一定的历史里程碑意义。但其研究存在一定的局限性,在长度方面具有严格的要求,其必须满足 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 且为偶数,对于奇数长度以及许多常用的偶数长度是不支持的[2]。

2007 年, Fan 等人针对传统的 Golay 互补序列长度受限问题进行了研究,提出了 Z-互补序列,将全域理想自相关约束放宽至零相关区内为零,覆盖了奇数和更多的偶数长度,极大的突破了长度限制[3]。Fan 等人还提出了新的系统化构造方法并给出了奇数和偶数的最大零相关区宽度的猜想,为信道估计、雷达波形设计、准同步系统等工程应用提供了更灵活的序列方案[3]。针对传统的 Golay 互补序列对多普勒频移极度敏感与非零多普勒距离下旁瓣急剧升高问题, Pezeshki 等人于 2008 年提出了抗多普勒 Golay 互补波形,其兼顾了单通道与全极化雷达场景,工程实用性强[4]。2014 年, Liu 等人根据零相关区的位置对 Z-互补序列进行了细分,将其分为 I 型 Z-互补序列和 II 型 Z-互补序列;同时也根据零相关区外非周期自相关和将互补序列分为了 Z-最优和最优[5]。此外, Liu 等人还将广义布尔函数与插入、删除法相结合,分别得到了长度为 $2^m + 1$ 的最优 I 型、最优 II 型的 Z-互补序列和长度为 $2^m - 1$ 的最优 II 型 Z-互补序列[5]。

2017 年, A. R. Adhikary 等人在 Liu 等人的工作基础上,将 Turyn 构造法与插入法进行结合,得到长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 1$ 的最优 Z-互补序列[6]。同年, Chen 等人基于广义布尔函数构造出了一类零相关区宽度大且可同时生成奇数长度与偶数长度的互补序列[7]。2019 年, Shen 等人利用由广义布尔函数构造得到的 Golay-Davis-Jedwab (GDJ)序列并结合插入法,得到了一类 II 型 Z-最优奇数长度为 $2^m + 3$ 的 Z-互补序列[8]; Gu 等人提出了一种全新的偶数长度 Z-互补序列的系统构造方法。2020 年, Palash Sarkar 等人将 A. R. Adhikary 等人关于 Z-互补序列的思想推广到了 Z-互补码集,构造出了长度为 $2^m + 2$ 的最优 Z-互补码集[9]; A. R. Adhikary 等人利用 Turyn 法构造出的长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 二进制 Golay 互补对,对其进行适当的插入操作得到了长度为 $10^\beta + 1$ 、 $26^\gamma + 1$ 、 $10^\beta 26^\gamma + 1$ 的最优 II 型 Z-互补序列对[10]; Zeng 等人证明了序列长度大于 3 的 II 型 Z-互补序列对的存在,并对二进制的 Golay 互补序列对进行插入和删除操作,构造出了 II 型奇数长度最优或 Z-最优的 Z-互补序列对[11];基于广义布尔函数, A. R. Adhikary 等人提出了一类 q 元偶数长度 Z-互补序列对的构造方法,其长度为 $2^{m-1} + 2$ 、零相关区宽度为 $2^{m-2} + 2^{\pi(m-3)} + 1$ (m 为正整数, π 是 $m-2$ 个变量上的置换) [12]。

2021 年, Huang 等人提出了一种基于广义布尔函数的二元交叉 Z-互补序列对的构造方法,得到了长

度为 $2^{m-1} + 2^{n+1}$ 的序列, 将其零相关区所占比例提升至 $2/3$ [13]; Yu 等人以长度为 N 的传统 Golay 互补序列为基本单位, 对其进行不同形式的级联得到 8 类 Z-互补对, 其中零相关区比例最高可达 $6/7$ [14]; Gu 等人基于级联和迭代思想, 提出了递归构造框架, 系统地构造出了 $2N \pm 1$ 奇数长度以及 $3N$ 、 $14N$ 等新型偶数长度的最优 II 型 Z-互补序列对 [15]。2022 年, Peng 等人揭示了多次级联与克罗内克积之间的等价关系, 通过引入 Z-最优的种子序列, 生成了 Z-最优的偶数长度 Z-互补序列对, 使其零相关宽度达到 $N-1$ 、零相关区比率接近 1, 显著的提升了抗干扰能力 [16]。2023 年, Chen 等人利用级联与迭代插入对 Z-互补序列进行构造, 生成了长度为 $2N+3$ 的奇数长度 Z-最优 II 型与零相关区比率达 $7/8$ 的 $4N+4$ 偶数长度的 Z-互补序列对 [17]。2025 年, Peter Kazakov 等人设计了一种计算机搜索算法, 其目的在于去搜寻长度不高于 49 的新型最优或次优的 Z-互补序列对 [18]。

本文借助广义布尔函数构造的 GDJ 序列与迭代插入法, 构造了一类长度为 $2^m + 7$ 、零相关区宽度为 $2^{m-1} + 4$ 的 II 型 Z-最优互补序列对。

2. 预备知识

定义 1 (非周期相关函数 [5]) 设 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 与 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ 序列长度为 N , 则非周期相关函数为:

$$\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} (-1)^{a_i + b_{i+\tau}}, & 0 \leq \tau \leq N-1 \\ 0, & |\tau| \geq N \end{cases}$$

其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Z_2^N$, 当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ 时, 上式为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的非周期互相关函数, 记为 $\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau)$; 当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时, 上式则为 $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 的非周期自相关函数, 记为 $\rho_{\mathbf{a}}(\tau)$ 或 $\rho_{\mathbf{b}}(\tau)$ 。

定义 2 (I 型 Z-互补序列对 [5]) 对于长度为 N 的序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 与 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, 若满足 $\rho_{\mathbf{a}}(\tau) + \rho_{\mathbf{b}}(\tau) = 0$, $1 \leq \tau \leq Z-1$, 则称 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是 I 型 Z-互补序列对。

定义 3 (II 型 Z-互补序列对 [5]) 对于长度为 N 的序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 与 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, 若满足 $\rho_{\mathbf{a}}(\tau) + \rho_{\mathbf{b}}(\tau) = 0$, $N-Z+1 \leq \tau \leq N-1$, 则称 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是 II 型 Z-互补序列对。

引理 1 [5]: 对于长度为 N 的序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 与 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, 当 N 为奇数时, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 的零相关区宽度最大为 $\frac{N+1}{2}$, 即 $Z \leq \frac{N+1}{2}$ 。

定义 4 (Z-最优 I 型或 II 型互补序列对 [8]) 当 I 型或 II 型奇数长度的互补序列 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 满足 $Z = \frac{N+1}{2}$ 时, 便称其为 Z-最优 I 型或 II 型奇数长度 Z-互补序列对。

定义 5 (最优 I 型或 II 型互补序列对 [8]) 当 I 型或 II 型奇数长度的互补序列 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 在满足 $Z = \frac{N+1}{2}$ 条件下, 还满足 $|\rho_{\mathbf{a}}(\tau) + \rho_{\mathbf{b}}(\tau)| = 2$, $1 \leq \tau \leq \frac{N-1}{2}$, 便称其为最优 I 型或 II 型奇数长度 Z-互补序列对。

3. 新型 Z-互补序列对的构造

3.1. 广义布尔函数与 Golay-Davis-Jedwab 序列

对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in Z_2^m$, 定义 q 进制广义布尔函数 $f(\mathbf{x})$ 是 f 在 $Z_2^m \rightarrow Z_q$ 上的一个映射。设整数 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ 是二进制向量, 对于给定的广义布尔函数 $f(\mathbf{x})$, 定义:

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2^m-1}) = (f(0, 0, \dots, 0), f(1, 0, \dots, 0), f(1, 1, 0, \dots, 0), \dots, f(1, 1, \dots, 1))$$

其中 $i = \sum_{k=1}^m i_k 2^{k-1}$, $f_i = f(i_1, i_2, \dots, i_m)$ 。

引理 2 (Golay-Davis-Jedwab 序列[5])设:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + \sum_{k=1}^m c_k x_k$$

对于序列 $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{2^m-1})$ 与 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_{2^m-1})$, 如果满足: $\mathbf{g} = \mathbf{f} + c \cdot \mathbf{1}$; $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{x}_{\pi(1)} + c' \cdot \mathbf{1}$, 则 $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ 是长度为 2^m 的 Golay 互补序列对, 也称其为 Golay-Davis-Jedwab 序列。

其中, $c_k \in Z_2$ 且 π 是集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 上的一个置换, $c, c' \in Z_2$ 。

3.2. 迭代插入函数

设 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 是长度为 N 的序列向量, $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{S-1})$ 是长度为 S 的位置向量, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{S-1})$ 是元素向量。迭代插入函数[8]定义如下:

第 0 次迭代: $\mathbf{I}_0(\mathbf{a}^0, r_0, x_0) = \mathbf{a}^1 = (a_0^1, a_1^1, \dots, a_N^1)$

第 1 次迭代: $\mathbf{I}_1(\mathbf{a}^1, r_1, x_1) = \mathbf{a}^2 = (a_0^2, a_1^2, \dots, a_{N+1}^2)$

第 $i-1$ 次迭代: $\mathbf{I}_{i-1}(\mathbf{a}^{i-1}, r_i, x_i) = \mathbf{a}^i = (a_0^i, a_1^i, \dots, a_{N+i-1}^i)$

第 i 次迭代: $\mathbf{I}_i(\mathbf{a}^i, r_i, x_i) = \begin{cases} (x_i, a_0^i, a_1^i, \dots, a_{N+i-1}^i), & r_i = 0 \\ (a_0^i, a_1^i, \dots, a_{N+i-1}^i, x_i), & r_i = N+i \\ (a_0^i, \dots, a_{r_i-1}^i, x_i, a_{r_i}^i, \dots, a_{N+i-1}^i), & 1 \leq r_i \leq N+i-1 \end{cases}$

其中, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_{N-1}^0) = \mathbf{a}^0$ 且 $1 \leq i \leq S-1$ 。 $\mathbf{I}_i(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{x})$ 是第 i 次迭代的插入函数, 在第 i 次迭代中生成长度为 $N+i+1$ 的序列; 当 $i=0$ 时, 则为基本插入函数。

3.3. 构造 II 型奇数长度 Z-互补序列

定理 1: 设 $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ 是由引理 2 生成的 GDJ 序列, $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_6)$ 表示 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的插入位置, $\mathbf{x} = (d_1, d_2, \dots, d_7)$ 与 $\mathbf{y} = (d'_1, d'_2, \dots, d'_7)$ 表示插入的元素向量, 若 $\mathbf{a} = \mathbf{I}_6(\mathbf{g}, \mathbf{r}, \mathbf{x})$ 且 $\mathbf{b} = \mathbf{I}_6(\mathbf{h}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$, 并满足表 1 情况, 则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是 $(2^m + 7, 2^{m-1} + 4)$ 的 II 型 Z-最优互补序列对。

根据广义布尔函数的定义, 我们有 $(\tau)_m = \begin{cases} 0, & 1 \leq \tau \leq 2^{m-1} - 1 \\ 1, & 2^{m-1} \leq \tau \leq 2^m - 1 \end{cases}$ 。由于类似位置时延分类相同且证明

过程相似, 故本文只对表 1 中的情况 1、3、6 进行详细证明, 剩余情况省略(情况 2 与情况 1 类似; 情况 4、5 与情况 3 类似; 情况 7、8 与情况 6 类似)。具体证明如下:

情况 1:

当 $2^{m-1} + 4 \leq \tau \leq 2^m$ 时, 有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{a}}(\tau) + \rho_{\mathbf{b}}(\tau) &= \rho_{\mathbf{g}}(\tau) + (-1)^{d_1+g_{\tau-3}} + (-1)^{d_2+g_{\tau-2}} + (-1)^{d_3+g_{\tau-1}} + (-1)^{d_4+g_{2^m-\tau}} + (-1)^{d_5+g_{2^m-\tau+1}} \\ &\quad + (-1)^{d_6+g_{2^m-\tau+2}} + (-1)^{d_7+g_{2^m-\tau+3}} + \rho_{\mathbf{h}}(\tau) + (-1)^{d'_1+h_{\tau-3}} + (-1)^{d'_2+h_{\tau-2}} \\ &\quad + (-1)^{d'_3+h_{\tau-1}} + (-1)^{d'_4+h_{2^m-\tau}} + (-1)^{d'_5+h_{2^m-\tau+1}} + (-1)^{d'_6+h_{2^m-\tau+2}} + (-1)^{d'_7+h_{2^m-\tau+3}} \end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 1$ 时, 有

$$\rho_{\mathbf{a}}(\tau) + \rho_{\mathbf{b}}(\tau) = (-1)^{d_1+g_{2^m-2}} + (-1)^{d_2+g_{2^m-1}} + (-1)^{d_3+d_4} + (-1)^{d_5+g_0} + (-1)^{d_6+g_1} + (-1)^{d_7+g_2}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{d'_1+h_{2^{m-2}}} + (-1)^{d'_2+h_{2^{m-1}}} + (-1)^{d'_3+d'_4} + (-1)^{d'_5+h_0} + (-1)^{d'_6+h_1} + (-1)^{d'_7+h_2} \\
& = (-1)^{g_{2^{m-2}}} \times \left[(-1)^{d_1} + (-1)^{d'_1+(2^m-2)_{\pi(1)}+c'-c} \right] + (-1)^{g_{2^{m-1}}} \times \left[(-1)^{d_2} + (-1)^{d'_2+(2^m-1)_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
& + \left[(-1)^{d_3+d_4} + (-1)^{d'_3+d'_4} + (-1)^{g_0} \times [(-1)^{d_5} + (-1)^{d'_5+0_{\pi(1)}+c'-c}] \right] + (-1)^{g_1} \times \left[(-1)^{d_6} + (-1)^{d'_6+1_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
& + (-1)^{g_2} \times \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+2_{\pi(1)}+c'-c} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) & = (-1)^{d_1+g_{2^{m-1}}} + (-1)^{d_2+d_4} + (-1)^{d_3+d_5} + (-1)^{d_6+g_0} + (-1)^{d_7+g_1} \\
& + (-1)^{d'_1+h_{2^{m-1}}} + (-1)^{d'_2+d'_4} + (-1)^{d'_3+d'_5} + (-1)^{d'_6+h_0} + (-1)^{d'_7+h_1} \\
& = (-1)^{g_{2^{m-1}}} \times \left[(-1)^{d_1} + (-1)^{d'_1+(2^m-1)_{\pi(1)}+c'-c} \right] + \left[(-1)^{d_2+d_4} + (-1)^{d'_2+d'_4} \right] \\
& + \left[(-1)^{d_3+d_5} + (-1)^{d'_3+d'_5} \right] + (-1)^{g_0} \times \left[(-1)^{d_6} + (-1)^{d'_6+0_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
& + (-1)^{g_1} \times \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+1_{\pi(1)}+c'-c} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 3$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) & = (-1)^{d_1+d_4} + (-1)^{d_2+d_5} + (-1)^{d_3+d_6} + (-1)^{d_7+g_0} + (-1)^{d'_1+d'_4} \\
& + (-1)^{d'_2+d'_5} + (-1)^{d'_3+d'_6} + (-1)^{d'_7+h_0} \\
& = \left[(-1)^{d_1+d_4} + (-1)^{d'_1+d'_4} \right] + \left[(-1)^{d_2+d_5} + (-1)^{d'_2+d'_5} \right] \\
& + \left[(-1)^{d_3+d_6} + (-1)^{d'_3+d'_6} \right] + (-1)^{g_0} \times \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+0_{\pi(1)}+c'-c} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 4$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) & = (-1)^{d_1+d_5} + (-1)^{d_2+d_6} + (-1)^{d_3+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_5} + (-1)^{d'_2+d'_6} + (-1)^{d'_3+d'_7} \\
& = \left[(-1)^{d_1+d_5} + (-1)^{d'_1+d'_5} \right] + \left[(-1)^{d_2+d_6} + (-1)^{d'_2+d'_6} \right] + \left[(-1)^{d_3+d_7} + (-1)^{d'_3+d'_7} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 5$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) & = (-1)^{d_1+d_6} + (-1)^{d_2+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_6} + (-1)^{d'_2+d'_7} \\
& = \left[(-1)^{d_1+d_6} + (-1)^{d'_1+d'_6} \right] + \left[(-1)^{d_2+d_7} + (-1)^{d'_2+d'_7} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 6$ 时, 有

$$\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = (-1)^{d_1+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_7}$$

$$\text{对于 } 2^{m-1} + 4 \leq \tau \leq 2^m + 6, \text{ 当其满足 } \begin{cases} \pi_{(1)} = m \\ d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, \quad i = 1, 2, 3 \\ d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, \quad j = 4, 5, 6, 7 \end{cases} \text{ 时, 有 } \rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0,$$

由此结论得证。

情况 3:

当 $\tau = 2^{m-1} + 4$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-5) + \rho_h(\tau-5) + (-1)^{d_1+d_5} + (-1)^{d_3+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_5} + (-1)^{d'_3+d'_7} \\
&\quad + (-1)^{g_0+d_6} + (-1)^{g_{2^{m-1}}+d_2} + (-1)^{h_0+d'_6} + (-1)^{h_{2^{m-1}}+d'_2} + (-1)^{1+g_0+g_{2^{m-1}-1}} \\
&\quad + (-1)^{1+g_{2^{m-1}}+g_{2^{m-1}-1}} + (-1)^{1+h_0+h_{2^{m-1}-1}} + (-1)^{1+h_{2^{m-1}}+h_{2^{m-1}-1}} \\
&= \left[(-1)^{d_1+d_5} + (-1)^{d'_1+d'_5} \right] + \left[(-1)^{d_3+d_7} + (-1)^{d'_3+d'_7} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_0} \times \left[(-1)^{d_6} + (-1)^{d'_6+0_{\pi(1)}+c'-c} \right] + (-1)^{g_{2^{m-1}}} \\
&\quad \times \left[(-1)^{d_2} + (-1)^{d'_2+(2^{m-1})_{\pi(1)}+c'-c} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^{m-1} + 5$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-5) + \rho_h(\tau-5) + (-1)^{d_1+d_6} + (-1)^{d_2+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_7} + (-1)^{d'_2+d'_7} \\
&= \left[(-1)^{d_1+d_6} + (-1)^{d'_1+d'_6} \right] + \left[(-1)^{d_2+d_7} + (-1)^{d'_2+d'_7} \right]
\end{aligned}$$

当 $2^{m-1} + 6 \leq \tau \leq 2^m + 5$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-5) + (-1)^{d_1+g_{\tau-6}} + (-1)^{d_7+g_{2^{m-1}+\tau-5}} + \rho_h(\tau-5) + (-1)^{d'_1+h_{\tau-6}} + (-1)^{d'_7+h_{2^{m-1}+\tau-5}} \\
&= (-1)^{g_{\tau-6}} \times \left[(-1)^{d_1} + (-1)^{d'_1+(\tau-6)_{\pi(1)}+c'-c} \right] + (-1)^{g_{2^{m-1}+\tau-5}} \\
&\quad \times \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+(2^{m-1}+\tau-5)_{\pi(1)}+c'-c} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^m + 6$ 时, 有

$$\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = (-1)^{d_1+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_7}$$

$$\text{对于 } 2^{m-1} + 4 \leq \tau \leq 2^m + 6, \text{ 当其满足 } \begin{cases} \pi_{(1)} = m \\ d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ 时, 有 } \rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0, \\ d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, \quad j = 5, 6, 7 \end{cases}$$

由此结论得证。

情况 6:

当 $\tau = 2^{m-1} + 4$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-6) + \rho_h(\tau-6) + (-1)^{g_0+d_5} + (-1)^{h_0+d'_5} + (-1)^{g_1+d_6} + (-1)^{h_1+d'_6} \\
&\quad + (-1)^{g_{3 \times 2^{m-2}-2}+d_1} + (-1)^{h_{3 \times 2^{m-2}-2}+d'_1} + (-1)^{g_{2^{m-1}}+d_3} + (-1)^{h_{2^{m-1}}+d'_3} \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-2}+1}+d_7} + (-1)^{h_{2^{m-2}+1}+d'_7} + (-1)^{d_2+g_{2^{m-2}}} + (-1)^{d'_2+h_{2^{m-2}}} \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-2}}+g_{3 \times 2^{m-2}-1}} + (-1)^{h_{2^{m-2}}+h_{3 \times 2^{m-2}-1}} + (-1)^{1+g_0+g_{2^{m-1}-2}} \\
&\quad + (-1)^{1+h_0+h_{2^{m-1}-2}} + (-1)^{1+g_1+g_{2^{m-1}-1}} + (-1)^{1+h_1+h_{2^{m-1}-1}} \\
&\quad + (-1)^{1+g_{2^{m-2}}+g_{3 \times 2^{m-2}-2}} + (-1)^{1+h_{2^{m-2}}+h_{3 \times 2^{m-2}-2}} + (-1)^{1+g_{2^{m-2}+1}+g_{3 \times 2^{m-2}-1}} \\
&\quad + (-1)^{1+h_{2^{m-2}+1}+h_{3 \times 2^{m-2}-1}} + (-1)^{1+g_{2^{m-1}}+g_{2^{m-2}}} + (-1)^{1+h_{2^{m-1}}+h_{2^{m-2}}} \\
&\quad + (-1)^{1+g_{2^{m-1}+1}+g_{2^{m-1}}} + (-1)^{1+h_{2^{m-1}+1}+h_{2^{m-1}}}
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^{m-1} + 5$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-6) + \rho_h(\tau-6) + (-1)^{g_0+d_6} + (-1)^{h_0+d'_6} \\
&\quad + (-1)^{g_{3 \times 2^{m-2}-1}+d_1} + (-1)^{h_{3 \times 2^{m-2}-1}+d'_1} + (-1)^{g_{2^{m-2}}+d_7} + (-1)^{h_{2^{m-2}}+d'_7} \\
&\quad + (-1)^{d_2+g_{2^{m-1}}} + (-1)^{d'_2+h_{2^{m-1}}} + (-1)^{1+g_0+g_{2^{m-1}-1}} + (-1)^{1+h_0+h_{2^{m-1}-1}} \\
&\quad + (-1)^{1+g_{2^{m-2}}+g_{3 \times 2^{m-2}-1}} + (-1)^{1+h_{2^{m-2}}+h_{3 \times 2^{m-2}-1}} \\
&= (-1)^{g_{3 \times 2^{m-2}-1}} \times \left[(-1)^{d_1} + (-1)^{d'_1+(3 \times 2^{m-2}-1)_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-2}}} \times \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+(2^{m-2})_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-1}}} \times \left[(-1)^{d_2} + (-1)^{d'_2+(2^{m-1})_{\pi(1)}+c'-c} \right] + (-1)^{g_0} \times \left[(-1)^{d_6} + (-1)^{d'_6+0_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&= (-1)^{g_0} \times \left[(-1)^{d_5} + (-1)^{d'_5+0_{\pi(1)}+c'-c} \right] + (-1)^{g_1} \times \left[(-1)^{d_6} + (-1)^{d'_6+1_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{3 \times 2^{m-2}-2}} \times \left[(-1)^{d_1} + (-1)^{d'_1+(3 \times 2^{m-2}-2)_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-2}+1}} \times \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+(2^{m-2}+1)_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-2}}} \times \left[(-1)^{d_2} + (-1)^{d'_2+(2^{m-2})_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{2^{m-1}}} \times \left[(-1)^{d_3} + (-1)^{d'_3+(2^{m-1})_{\pi(1)}+c'-c} \right]
\end{aligned}$$

当 $\tau = 2^{m-1} + 6$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-6) + \rho_h(\tau-6) + (-1)^{d_1+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_7} \\
&= \left[(-1)^{d_1+d_7} + (-1)^{d'_1+d'_7} \right]
\end{aligned}$$

当 $2^{m-1} + 7 \leq \tau \leq 3 \times 2^{m-2} + 6$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) &= \rho_g(\tau-6) + \rho_h(\tau-6) + (-1)^{g_{2^{m-2}+\tau-7}} \\
&\quad \left[(-1)^{d_1} + (-1)^{d'_1+(2^{m-2}+\tau-7)_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + (-1)^{g_{3 \times 2^{m-2}-\tau+6}} \left[(-1)^{d_7} + (-1)^{d'_7+(3 \times 2^{m-2}-\tau+6)_{\pi(1)}+c'-c} \right] \\
&\quad + \left[\sum_{i=3 \times 2^{m-2}-\tau+7}^{2^{m-2}-1} (-1)^{g_i+g_{i+\tau-7}} + \sum_{i=3 \times 2^{m-2}-\tau+7}^{2^{m-2}-1} (-1)^{h_i+h_{i+\tau-7}} \right] \\
&\quad - \left[\sum_{i=3 \times 2^{m-2}-\tau+6}^{2^{m-2}-1} (-1)^{g_i+g_{i+\tau-6}} + \sum_{i=3 \times 2^{m-2}-\tau+6}^{2^{m-2}-1} (-1)^{h_i+h_{i+\tau-6}} \right]
\end{aligned}$$

当 $3 \times 2^{m-2} + 7 \leq \tau \leq 2^m + 6$ 时, 有

$$\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = \rho_g(\tau-7) + \rho_h(\tau-7)$$

对于 $2^{m-1} + 4 \leq \tau \leq 2^m + 6$, 当其满足 $\begin{cases} \pi_{(1)} = m \\ d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ 时, 有 } \rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0, \\ d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, \quad j = 5, 6, 7 \end{cases}$

由此结论得证。

Table 1. Insertion positions and conditions for complementary sequence pairs of length $2^m + 7$

表 1. 长度为 $2^m + 7$ 互补序列对的插入位置与条件

情况	$\mathbf{r}$	条件
1	$(0, 1, 2, 2^m + 3, 2^m + 4, 2^m + 5, 2^m + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 4, 5, 6, 7$
2	$(0, 1, 2, 3, 2^m + 4, 2^m + 5, 2^m + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3, 4$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$
3	$(0, 2^{m-1} + 1, 2^{m-1} + 2, 2^{m-1} + 3, 2^{m-1} + 4, 2^{m-1} + 5, 2^m + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$
4	$(0, 1, 2^{m-1} + 2, 2^{m-1} + 3, 2^{m-1} + 4, 2^m + 5, 2^m + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$
5	$(0, 1, 2, 2^{m-1} + 3, 2^m + 4, 2^m + 5, 2^m + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$
6	$(2^{m-1}, 2^{m-1} + 1, 2^{m-1} + 2, 2^{m-1} + 3, 2^{m-1} + 4, 2^{m-1} + 5, 3 \times 2^{m-2} + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$
7	$(2^{m-2}, 2^{m-2} + 1, 2^{m-1} + 2, 2^{m-1} + 3, 2^{m-1} + 4, 3 \times 2^{m-2} + 5, 3 \times 2^{m-2} + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$
8	$(2^{m-2}, 2^{m-2} + 1, 2^{m-2} + 2, 2^{m-1} + 3, 3 \times 2^{m-2} + 4, 3 \times 2^{m-2} + 5, 3 \times 2^{m-2} + 6)$	$\pi_{(1)} = m$ $d_i + d'_i \equiv c' - c \pmod{2}, i = 1, 2, 3$ $d_j + d'_j \equiv c' - c + 1 \pmod{2}, j = 5, 6, 7$

由上述可说明本文构造出了长度为 $2^m + 7$ 、零相关区宽度为 $2^{m-1} + 4$ 的 II 型 Z-最优互补序列对。

4. 实例与结论

4.1. 实例

令 $m = 3$, $(c, c', c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 1, 0, 0)$ 且 $\pi = (3, 1, 2)$, 利用引理 2 得到互补序列 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$\mathbf{a} = (01000001)$, $\mathbf{b} = (01001110)$

对于插入向量 $\mathbf{x} = (0000000)$ 与 $\mathbf{y} = (0001111)$, 根据表 1 中第 1 种情况进行插入, 有:

$\mathbf{g} = \mathbf{I}_6(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = (000010000010000)$, $\mathbf{h} = \mathbf{I}_6(\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{y}) = (000010011101111)$;

$$\rho_g(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=14} = (15, 6, 5, 4, 3, 6, 9, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1); \quad \rho_h(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=14} = (15, 4, 1, 2, 3, 4, -3, -2, -3, -2, -1, -4, -3, -2, -1);$$

$$(\rho_g(\tau) + \rho_h(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=14} = (30, 10, 6, 6, 6, 10, 6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

根据表 1 中第 6 种情况进行插入, 有:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{I}_6(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = (010000000000001), \quad \mathbf{h}' = \mathbf{I}_6(\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{y}) = (010000011111110);$$

$$\rho_{g'}(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=14} = (15, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, 2, -1);$$

$$\rho_{h'}(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=14} = (15, 6, 5, 2, -1, -4, -3, -6, -3, -2, -1, 0, 1, -2, 1);$$

$$(\rho_{g'}(\tau) + \rho_{h'}(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=14} = (30, 14, 14, 10, 6, 2, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

根据上述 $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ 与 $(\mathbf{g}', \mathbf{h}')$ 的非周期自相关和可以看出零的个数都为 7, 而零相关区宽度为零的个数再加一, 所以其零相关区宽度为 8; 再结合定义 4 可得, $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ 与 $(\mathbf{g}', \mathbf{h}')$ 是长度为 15、零相关区宽度为 8 的 II 型 Z-最优互补序列对。

4.2. 结论

本文基于广义布尔函数构造出的 GDJ 互补序列, 利用迭代插入函数在构造出的序列上进行插入操作, 得到了新长度 II 型 Z-最优互补序列对。在现有的文献中, 未涉及长度为 $2^m + 7$ 的探究, 本文在序列长度灵活方面具有一定新颖性。在长度为 2^m 的序列的特定位置插入 7 个码元, 可得到长度为 $2^m + 7$ 、零相关区宽度为 $2^{m-1} + 4$ 奇数长度 II 型 Z-最优互补序列对。后续研究可以结合级联探讨是否存在其他奇数长度的最优或 Z-最优的 I 型或 II 型 Z-互补序列, 进而扩大序列长度的灵活性。

参考文献

- [1] Golay, M.J.E. (1951) Static Multislit Spectrometry and Its Application to the Panoramic Display of Infrared Spectra. *Journal of the Optical Society of America*, **41**, 468-472. <https://doi.org/10.1364/josa.41.000468>
- [2] Golay, M. (1961) Complementary Series. *IEEE Transactions on Information Theory*, **7**, 82-87. <https://doi.org/10.1109/tit.1961.1057620>
- [3] Fan, P., Yuan, W. and Tu, Y. (2007) Z-Complementary Binary Sequences. *IEEE Signal Processing Letters*, **14**, 509-512. <https://doi.org/10.1109/lsp.2007.891834>
- [4] Pezeshki, A., Calderbank, A.R., Moran, W. and Howard, S.D. (2008) Doppler Resilient Golay Complementary Waveforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, **54**, 4254-4266. <https://doi.org/10.1109/tit.2008.928292>
- [5] Liu, Z., Parampalli, U. and Guan, Y.L. (2014) Optimal Odd-Length Binary Z-Complementary Pairs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **60**, 5768-5781. <https://doi.org/10.1109/tit.2014.2335731>
- [6] Adhikary, A.R., Majhi, S., Liu, Z. and Guan, Y.L. (2017) New Optimal Binary Z-Complementary Pairs of Odd Lengths. 2017 8th International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA), Sapporo, 24-28 September 2017, 14-18. <https://doi.org/10.1109/iwdsa.2017.8095727>
- [7] Chen, C. (2017) A Novel Construction of Z-Complementary Pairs Based on Generalized Boolean Functions. *IEEE Signal Processing Letters*, **24**, 987-990. <https://doi.org/10.1109/lsp.2017.2701834>
- [8] Shen, B., Yang, Y., Zhou, Z., Fan, P. and Guan, Y. (2019) New Optimal Binary Z-Complementary Pairs of Odd Length $2^m + 3$. *IEEE Signal Processing Letters*, **26**, 1931-1934. <https://doi.org/10.1109/lsp.2019.2954805>
- [9] Sarkar, P., Roy, A. and Majhi, S. (2020) Construction of Z-Complementary Code Sets with Non-Power-of-Two Lengths Based on Generalized Boolean Functions. *IEEE Communications Letters*, **24**, 1607-1611. <https://doi.org/10.1109/lcomm.2020.2987625>
- [10] Adhikary, A.R., Majhi, S., Liu, Z. and Guan, Y.L. (2020) New Sets of Optimal Odd-Length Binary Z-Complementary Pairs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **66**, 669-678. <https://doi.org/10.1109/tit.2019.2944185>
- [11] Zeng, F., He, X., Zhang, Z., Xuan, G., Peng, Y. and Yan, L. (2020) Optimal and Z-Optimal Type-II Odd-Length Binary Z-Complementary Pairs. *IEEE Communications Letters*, **24**, 1163-1167. <https://doi.org/10.1109/lcomm.2020.2977897>
- [12] Adhikary, A.R., Sarkar, P. and Majhi, S. (2020) A Direct Construction of q-Ary Even Length Z-Complementary Pairs Using Generalized Boolean Functions. *IEEE Signal Processing Letters*, **27**, 146-150.

-
- <https://doi.org/10.1109/lsp.2019.2961210>
- [13] Huang, Z.M., Pai, C.Y. and Chen, C. (2021) Binary Cross Z-Complementary Pairs with Flexible Lengths from Boolean Functions. *IEEE Communications Letters*, **25**, 1057-1061. <https://doi.org/10.1109/lcomm.2020.3045727>
- [14] Yu, T., Du, X., Li, L. and Yang, Y. (2021) Constructions of Even-Length Z-Complementary Pairs with Large Zero Correlation Zones. *IEEE Signal Processing Letters*, **28**, 828-831. <https://doi.org/10.1109/lsp.2021.3055482>
- [15] Gu, Z., Zhou, Z., Wang, Q. and Fan, P. (2021) New Construction of Optimal Type-II Binary Z-Complementary Pairs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **67**, 3497-3508. <https://doi.org/10.1109/tit.2020.3007670>
- [16] Peng, X., Shen, M. and Liu, S. (2022) Generalized Construction of Z-Complementary Pairs with Fixed Zero Correlation Zone Ratios. 2022 10th International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA), Colchester, 1-5 August 2022, 1-5. <https://doi.org/10.1109/iwsda50346.2022.9870446>
- [17] Chen, X., Zhang, Y., Sun, L. and Li, Y. (2023) New Constructions of Type-II Binary Z-Complementary Pairs. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **106**, 1272-1276. <https://doi.org/10.1587/transfun.2022eal2071>
- [18] Kazakov, P. and Liu, Z. (2025) A Computer Search of New OBZCPs of Lengths Up to 49. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **61**, 5469-5476. <https://doi.org/10.1109/taes.2024.3501232>