

关于Cauchy-Schwarz不等式的 几点讨论

冯靖骁, 刘玉霞

国防科技大学外国语学院, 江苏 南京

收稿日期: 2026年9月15日; 录用日期: 2026年10月9日; 发布日期: 2026年10月15日

摘 要

文章在充分认识柯西 - 施瓦兹不等式的由来和五种不同领域的表现形式基础之上, 通过多个解题方法探讨了一道数学竞赛题, 并给出不等式进一步拓展的结论及其证明, 同时指出该拓展本质上与Hölder不等式的关系, 对于学习高等数学以及参赛具有重要借鉴意义。

关键词

柯西 - 施瓦兹不等式, 定积分, 归一化处理

On Inequality of Cauchy-Schwarz

Jingxiao Feng, Yuxia Liu

College of International Studies, National University of Defense Technology (NUDT), Nanjing Jiangsu

Received: September 15, 2026; accepted: October 9, 2026; published: October 15, 2026

Abstract

On the basis of fully understanding the origin and five different forms of Cauchy-Schwarz inequality, this article discusses a mathematical competition problem through several problem-solving methods, and provide a conclusion and proof for further expanding the inequality, and points out its relation with Hölder inequality, which has important reference significance for learning higher mathematics and participating in the competition.

Keywords

Cauchy-Schwartz Inequality, Definite Integral, Normalization Processing



1. 引言

在高等数学的学习过程中, 深刻体会到与数学专业的数学分析的学习还是差距甚远。仅仅用高等数学的知识想在竞赛中取得良好的成绩还是挺困难的, 这不仅是因为竞赛本身对高等数学知识的掌握程度要求高, 而其涉及的知识面也远远超过高等数学的学习, 不少竞赛题目使用到的原理来自于数学分析, 这是高等数学中即使打星号部分都没有出现的内容, 比如柯西 - 施瓦兹不等式。此不等式在解题中的应用非常广泛, 表现手法也是多种多样, 应用其解题也就显得十分棘手, 在复习中要善于思考、积累, 总结其常出现的知识点, 才能退去其隐身衣认识其庐山真面目。

2. 柯西 - 施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式的创立背景

柯西 - 施瓦兹不等式是一个基本的数学定理, 它在代数领域中有着广泛的应用。该不等式是法国数学家柯西在 1821 年出版《代数分析教程》时提出, 但最早应用该不等式是在 1829 年, 柯西研究用牛顿法来计算代数与超越方程的根的时候, 其积分形式在 1859 年被俄国数学家布尼亚科夫斯基提出, 而积分形式的现代证明则是由德国数学家施瓦兹于 1888 年给出, 故此不等式又称柯西 - 布尼亚科夫斯基 - 施瓦兹(Cauchy-Buniakowsky-Schwarz)不等式, 见文献[1]。它不仅被广泛的应用在数学的各个领域, 而且也被应用于物理学、工程学等其他科学领域, 成为不可缺少的基本工具之一。

3. 柯西 - 施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式的五种表现形式

3.1. 柯西 - 施瓦兹不等式在实数域中的表现形式

设 $x_i, y_i \in R, i=1, 2, \dots, n$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i^2$ 与 $\sum_{i=1}^n y_i^2$ 均不恒为零, 则有不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$$

成立, 等号成立当且仅当两组数列线性相关; 若其中一组全为零, 等号也成立。当两组均非零时, 等价于存在常数 λ , 使得

$$y_i = \lambda x_i, i=1, 2, \dots, n$$

都成立, 见文献[2]。

3.2. 柯西 - 施瓦兹不等式在复数域中的表现形式

若 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ 是两个复数数列, 其中数列 a_k, b_k 都不恒为零, 那么则有

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2$$

当且仅当数列 a_k 和 b_k 成比例时, 等号成立; 若其中一组全为零, 等号也成立, 见文献[3]。

3.3. 柯西 - 施瓦兹不等式在 n 维欧氏空间中的表现形式

在 n 维欧氏空间中, 对任意两个非零向量 x, y , 都有

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

当且仅当向量 x, y 呈线性相关时, 不等式等号成立; 若其中一组全为零, 等号也成立, 见文献[2]。

3.4. 柯西 - 施瓦兹不等式在概率空间中的表现形式

设 ξ, η 为任意两个随机变量, 如果 $E(\xi), E(\eta)$ 存在, 且 $E(\xi\eta)$ 也存在, 那么则有不等式

$$[E(\xi\eta)]^2 \leq E(\xi^2) \cdot E(\eta^2)$$

等号成立当且仅当 ξ, η 线性相关, 即存在不全为零的常数 α, β , 使得

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0 \quad \text{a.s.}$$

若二者均非退化, 则可表示为常数 t , 使得

$$P(\eta = t\xi) = 1$$

或

$$P(\xi = t\eta) = 1.$$

见文献[3]。

3.5. 柯西 - 施瓦兹不等式在积分学中的表现形式

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 那么则有不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

等号成立当且仅当 f, g 几乎处处线性相关。若二者均非零, 则等价于存在常数 k , 使得

$$f(x) = kg(x)$$

几乎处处成立; 若其中一个几乎处处为零, 等号也成立。见文献[4]。

4. 柯西 - 施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式在高数竞赛中的应用

微积分是高等数学中主要研究的内容, 因此柯西 - 施瓦兹不等式积分形式的考察在高等数学竞赛中很受偏爱。在 2023 年第十五届全国大学生数学竞赛非数学类的试题中就出现了对该不等式的考察, 下面就此次竞赛中的试题来探究柯西 - 施瓦兹不等式在高等数学竞赛中的应用。

4.1. 实例解析

实例: 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数, 且 $f(0) = 0$, 求证

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$ 。

分析: 对于第一小问, 首先, 我们观察到所证不等式的右边出现了平方的形式, 这让我们很容易联想到柯西 - 施瓦兹不等式两端均出现平方的对称和谐的形式, 其次, 开始分析 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数, 且 $f(0) = 0$ 这一条件, 出现函数端点值和积分相结合的题, 一般我们会采用分部积分的方法来处理

或化简, 最后, 有了上面两点的分析, 我们可以大胆的采用柯西 - 施瓦兹不等式来处理第一问。对于第二小问, 很明显可以令左右两端积分符号内的式子相等, 进而解此微分方程得到满足条件的 $f(x)$ 。下面先分析求解第一小问。

方法一之反向思维拓展法:

证明: 由 $f(0)=0$, 利用分部积分得

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f^2(x) d(x-1) = \left[f^2(x)(x-1) \right]_0^1 - \int_0^1 (x-1) 2f(x)f'(x) dx.$$

因为 $f(0)=0$, 所以

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 2 \int_0^1 (1-x) f(x) f'(x) dx.$$

于是

$$\left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^2 = 4 \left(\int_0^1 (1-x) f(x) f'(x) dx \right)^2.$$

由柯西 - 施瓦兹不等式

$$\left(\int_0^1 (1-x) f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right) \left(\int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx \right)$$

因此

$$\left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right) \left(\int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx \right)$$

若 $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$, 则 $f \equiv 0$, 不等式显然成立; 若其大于零, 两边约去 $\int_0^1 f^2(x) dx$, 得

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx.$$

即证

方法二之构造辅助函数法:

证明: 对任意常数 t , 有

$$0 \leq \int_0^1 [f(x) + t(1-x)f'(x)]^2 dx.$$

展开得

$$0 \leq \int_0^1 f^2(x) dx + 2t \int_0^1 (1-x) f(x) f'(x) dx + t^2 \int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx.$$

由方法一中的分部积分结果,

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 2 \int_0^1 (1-x) f(x) f'(x) dx.$$

所以上式化为

$$0 \leq (1+t) \int_0^1 f^2(x) dx + t^2 \int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx.$$

该二次式对任意 $t \in \mathbb{R}$ 非负。若

$$\int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx = 0,$$

则 $(1-x)f'(x) = 0$ 几乎处处成立, 结合 $f(0) = 0$ 和连续性可知 $f \equiv 0$, 不等式显然成立。否则, 二次式二次项系数大于零, 其判别式非正, 即

$$\left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^2 - 4 \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right) \left(\int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx \right) \leq 0.$$

若 $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$, 显然成立; 若其大于零, 约去后得

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx.$$

证毕

4.2. 第二小问: 取等条件与等号函数

由柯西 - 施瓦兹不等式取等条件, 存在常数 λ , 使得

$$\lambda(1-x)f'(x) = f(x).$$

若 $\lambda = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$ 。若 $\lambda \neq 0$, 在 $f(x) \neq 0$ 处有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lambda(1-x)}.$$

积分得

$$f(x) = C(1-x)^{-1/\lambda}.$$

又由题设 $f(0) = 0$, 代入得

$$C = 0.$$

所以

$$f(x) \equiv 0.$$

因此使原不等式成为等式的函数为

$$f(x) = 0.$$

本题不存在非零等号函数。

4.3. 柯西 - 施瓦茨不等式取等条件的归一化说明

对于任何实数 x, y 都有

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

通过归一化处理引入变量

$$\hat{a} = \frac{a_k}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \hat{b} = \frac{b_k}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

其中 $(k=1, 2, 3, \dots, n)$, 且变量满足

$$\sum_{k=1}^n \hat{a}^2 = \sum_{k=1}^n \hat{b}^2 = 1$$

将 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ 分别代替 x 、 y , 再对两端进行求和可得

$$\sum_{k=1}^n \hat{a}\hat{b} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \hat{a}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \hat{b}^2 = 1$$

整理可得

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

我们考虑 $\{a_k\}$ 、 $\{b_k\}$ 都不恒为零, 那么上面的每一步的推导都是可逆的。从 $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ 出发, 易

知 $\sum_{k=1}^n \hat{a}\hat{b} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \hat{a}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \hat{b}^2$, 但要使得

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号成立, 就要有

$$\hat{a} = \hat{b}$$

由归一化的性质, 我们可知

$$a_k = \lambda b_k$$

其中

$$\lambda = \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

那么在积分学中取等号的条件就应该是存在常数 k 使得

$$f(x) = kg(x)$$

4.4. 方法总结

从解题的整体思路上看, 本题的第一问是柯西不等式与分部积分法的考察, 第二问是对柯西不等式取等号条件的考察。

很容易发现, 第一种方法对第一问的处理是将所要证的式子进行构造变形, 然后采用柯西不等式对

某端进行放缩, 即可证明。第二种方法通过构造二次函数并利用判别式, 同样得到结果。原稿中第三种二重积分法因推导复杂且存在错误, 已按期刊建议删减。因此, 我们想要对后两种方法进行掌握, 就需要对柯西不等式的常见证明方法有着一定的认识。这在解题时给了我们一些启发: 如果对于某道题我们已经知道可以用某个公式定理进行处理, 但处理起来比较复杂或者难以实现, 不妨逆向思维, 尝试从证明该定理公式的方法思路的角度来处理这道题, 将问题从具体返回到一般情形, 从而需要我们了解该定理公式的多种常见证明方法, 才能灵活运用该定理公式。

第二问的关键点就在于对柯西不等式取等号的条件的理解。若我们知道取等号的条件是存在常数 λ 使得

$$f(x) = \lambda(1-x)f'(x),$$

便可以很容易的求解出第二问。由该微分方程得

$$f(x) = C(1-x)^{-1/\lambda}.$$

又由 $f(0) = 0$, 得

$$C = 0,$$

所以

$$f(x) \equiv 0.$$

因此本题等号成立时, 函数解为

$$f(x) = 0.$$

本题不存在非零等号函数

5. 柯西施瓦兹不等式的拓展

数学的魅力不仅仅在于其深邃、抽象而又实用的特性, 还在于它那可以从特殊拓展到一般的美感。由特殊拓展到一般是数学中一种非常重要的思维方式和方法。通过这一方法, 我们可以从具体的、特殊的例子中提炼出更一般、更普遍的结论和性质, 从而更深入地理解和掌握数学知识。例如我们所熟知的基本不等式, $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ 可以拓展到更一般的 $A-G$ 不等式 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 。再如完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, 可以拓展到更一般的二项式定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$, 那么柯西施瓦兹不等式是否有更加一般的形式呢? 答案是肯定的。下面我们就该问题进行分析探究并给出证明过程。

在证明之前, 我们先说明: 柯西-施瓦兹不等式本质上是 Hölder 不等式在 $p = q = 2$ 时的特例, 与 Hölder 不等式密切相关, 是已知理论的应用。

Hölder 不等式: 设 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a_k, b_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

当 $p = q = 2$ 时, 即为柯西-施瓦兹不等式:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2}.$$

下面有归一化与 Young 不等式证明 Hölder 不等式:

证明: 先设 $a_k, b_k \geq 0$ 。若 $\sum a_k^p = 0$ 或 $\sum b_k^q = 0$, 结论显然。否则令

$$A = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p}, \quad B = \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q},$$

并令

$$\alpha_k = \frac{a_k}{A}, \quad \beta_k = \frac{b_k}{B}.$$

则

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^p = 1, \quad \sum_{k=1}^n \beta_k^q = 1.$$

由对数 $\ln x$ 的凹性。事实上, 对 $x, y > 0$ 与 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 由 $\ln x$ 的凹性得

$$\frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y \leq \ln \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right),$$

即

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q},$$

这正是 Young 不等式

由 Young 不等式

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x, y \geq 0,$$

可得

$$\alpha_k \beta_k \leq \frac{\alpha_k^p}{p} + \frac{\beta_k^q}{q}.$$

对 $k=1, 2, \dots, n$ 求和, 得

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \alpha_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n \beta_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

因此

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq AB = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}.$$

对于复数情形, 去绝对值后同样成立。

等号成立当且仅当

$$\alpha_k^p = \beta_k^q, k=1, 2, \dots, n,$$

即存在常数 C , 使得

$$|a_k|^p = C |b_k|^q, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

且 $a_k b_k$ 相位相同, 即 a_k 与 b_k 成比例

对柯西不等式拓展的意义在于使我们能够更深入的理解和认识该不等式的本质, 培养我们由特殊拓展到一般的思维方式, 进一步培养发散思维。

参考文献

- [1] J. Michael Steele. 柯西 - 施瓦茨大师课: 不等式的艺术[M]. 欧阳顺湘, 译. 北京: 高等教育出版社, 2022: 7-9.
- [2] 李立明, 徐向红, 魏君. 柯西——施瓦兹不等式的几种形式和应用[J]. 吉林广播电视大学学报, 2019(11): 85-86.
- [3] 于海杰. 柯西 - 施瓦兹不等式的证明[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2012, 28(5): 3.
- [4] 同济大学应用数学系. 高等数学: 上册(第 7 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017: 6-227.