

一类非线性感染率的HIV空间扩散模型的研究

刘宇倩¹, 李庆玲¹, 陈焕琳¹, 张宝月¹, 李嘉雯¹, 赖福芳², 黄立壮^{1*}

¹北部湾大学数理学院, 广西 钦州

²北部湾职业技术学校交通运输系, 广西 钦州

收稿日期: 2026年9月15日; 录用日期: 2026年10月9日; 发布日期: 2026年10月20日

摘要

建立一类非线性感染率的HIV空间扩散模型。首先, 通过偏微分方程理论分析模型解适定性, 进一步地计算基本再生数 R_0 和分析地方病平衡点 E^* 的存在性; 其次, 采用特征方程方法, 分析 E_0 和 E^* 两个平衡点的局部稳定性: 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的, 意味着HIV传播难以持续扩散; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)的地方病平衡点 E^* 为局部渐近稳定。最后, 通过构造Lyapunov泛函数证明系统(1)的两个平衡点 E_0 和 E^* 的全局渐近稳定性, 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)的地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

关键词

饱和和感染率, 基本再生数, 全局渐近稳定

Study on an HIV Spatial-Diffusion Model with Nonlinear Infection Rate

Yuqian Liu¹, Qingling Li¹, Huanlin Chen¹, Baoyue Zhang¹, Jiawen Li¹, Fufang Lai², Lizhuang Huang^{1*}

¹School of Mathematics and Physics, Beibu Gulf University, Qinzhou Guangxi

²Department of Transportation, Beibu Gulf Vocational and Technical School, Qinzhou Guangxi

Received: September 15, 2026; accepted: October 9, 2026; published: October 20, 2026

Abstract

An HIV spatial diffusion model with nonlinear infection rate is established. Firstly, the well-
*通讯作者。

文章引用: 刘宇倩, 李庆玲, 陈焕琳, 张宝月, 李嘉雯, 赖福芳, 黄立壮. 一类非线性感染率的 HIV 空间扩散模型的研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 156-168. DOI: 10.12677/aam.2026.1510404

posedness of model solutions is analyzed by partial differential equation theory. The basic reproduction number R_0 is calculated, and the existence of the endemic equilibrium E^* is investigated. Secondly, the characteristic equation method is adopted to analyze the local stability of the two equilibria E_0 and E^* . When $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium E_0 of system (1) is locally asymptotically stable, indicating that HIV transmission cannot spread sustainably. When $R_0 > 1$, the endemic equilibrium E^* of system (1) is locally asymptotically stable. Finally, Lyapunov functionals are constructed to prove the global asymptotic stability of E_0 and E^* for system (1). If $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium E_0 of system (1) is globally asymptotically stable; if $R_0 > 1$, the endemic equilibrium E^* of system (1) is globally asymptotically stable.

Keywords

Saturated Infection Rate, Basic Reproduction Number, Global Asymptotic Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

HIV 的传播蔓延, 给全球公共卫生体系带来严峻挑战。为探究 HIV 传播规律、制定有效防控策略, 已有相关学者开展 HIV 相关数学模型研究[1]-[3]。传统 HIV 传播模型多基于常微分方程建立, 却忽略了高危行为随感染风险的动态变化以及空间异质性等关键因素, 难以精准刻画实际中复杂的传播过程。HIV 在实际的传播中, 我国西南、东南沿海及内陆等不同区域由于地理、人口等空间因素存在异质性, HIV 传播呈现出不同传播特征, 该研究从时间、空间双维度提供了理解与防控 HIV 的新思路, 为政策制定者优化防控策略提供参考[4]。HIV 的传播并不会在均匀的空间进行, 用连续的常微分方程刻画难以反映出客观实际情况。在现有的常微分方程 HIV 模型中, 发病率通常采用双线性, 其所建立的模型, 对于均匀的空间具有一定意义, 但其传播机理难以刻画。为此, 考虑空间异质性并在常微分方程基础上引入非线性发病率, 构建更符合实际的 HIV 传播模型, 研究疾病传播的空间机理, 可为疾控部门优化资源配置、提供科学依据。目前, 异质空间并含非线性发病率的 HIV 模型已有学者开展相关研究[5] [6]。最近, 王非等人[3]建立一类包含两个感染阶段、治疗项与非线性发生率的 HIV/AIDS 传染病动力学模型。利用极限理论讨论系统可行域; 借助再生矩阵方法计算模型基本再生数; 依据基本再生数取值范围讨论平衡点的存在性与个数; 通过构造 Lyapunov 函数、Lasalle 不变集原理、Bendixson 定理与 van den Driessche 原理, 证明无病平衡点、地方病平衡点的局部与全局稳定性, 并开展数值模拟验证理论结论。文献[7]学者基于 SIR 仓室模型引入非线性感染率函数, 将高危行为与感染风险的动态反馈通过投影梯度算子融入空间扩散。文献[8]考虑 HIV 感染机制与抗病毒药物干预效应, 构建同时包含胞间传播、胞外病毒传播以及蛋白酶抑制剂作用的多时滞 HIV 感染模型, 利用 Lyapunov 泛函方法证明无病毒平衡点与感染平衡点的全局渐近稳定性。文献[9]利用地理信息系统(GIS)和空间自相关分析等方法分析实际病例数据, 能有效识别高风险区域, 并支持精准防控策略的制订。文献[10]考虑病毒扩散、潜伏感染细胞激活和空间异质性的 HIV 感染模型, 通过构造合适的 Lyapunov 泛函并结合比较原理, 证明地方病平衡点是全局渐近稳定的; 文献[11]考虑不同国家内部及国家之间的 HIV 感染率存在显著差异, 构建综合数学模型, 探究造成该流行病

学异质性的驱动因素。这些研究为 HIV 感染的控制乃至根治提供了重要理论参考,也为后续其他传染病模型的建立与分析奠定了基础。

早期 HIV 经典的三变量模型[12]:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \lambda - dT - \beta TV, \\ \frac{dI}{dt} = \beta TV - aI, \\ \frac{dV}{dt} = kI - mV. \end{cases}$$

其中 T, I, V 分别表示 t 时刻未感染 $CD4^+$ 细胞、感染细胞和游离病毒的浓度。

然而,实际感染过程中,由于细胞受体饱和、免疫应答等因素,感染率往往呈现非线性特征。因此,引入饱和感染率函数更能准确描述病毒与靶细胞之间的相互作用。近年来,苗卉和滕志东[13]构建一类包含胞间传播、胞外病毒传播两种感染途径,同时纳入免疫应答与时滞效应的宿主体内 HIV 感染动力学模型,分析了无病毒平衡点和正感染平衡点的全局渐近稳定性。数值模拟讨论时滞、免疫强度、两种感染模式的权重对病毒载量的影响,结果表明胞间传播会显著提升感染持续的风险,免疫反应能够有效抑制病毒复制。

吴鹏和方诚[14]建立带多时滞、非局部扩散以及潜伏感染细胞的 HIV 反应扩散模型,描述病毒在组织空间的非局部传播、潜伏细胞激活以及病毒复制的时间延迟。借助 Lyapunov 泛函与抛物型方程理论,证明无感染平衡点与正稳态的全局渐近稳定性。

基于以上文献分析,发现含有时滞非线性发病率且考虑游离病毒在人体细胞扩散的情况。相关文献鲜有研究,因此,笔者建立如下具有非线性感染率与空间扩散模型的 HIV 动力学模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda - d(x,t) - \frac{\beta T(x,t)V(x,t)}{1 + \alpha_1 T(x,t) + \alpha_2 V(x,t)} + pI(x,t), (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = e^{-m\tau} \frac{\beta T(x,t-\tau)V(x,t-\tau)}{1 + \alpha_1 T(x,t-\tau) + \alpha_2 V(x,t-\tau)} - (a+p)I(x,t), (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \operatorname{div} \Delta V(x,t) + kI(x,t) - mV(x,t), (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 表示人体淋巴组织有界区域, λ 为健康 T 细胞生成率, k 表示感染细胞产生病毒的速率, a 为感染细胞病变死亡速率, m 为游离病毒的清除速率, α_1, α_2 共同构成本文的非线性感染饱和和抑制系数, p 为 CTL 免疫调控系数, τ 为感染潜伏期时滞, d 为健康细胞自然死亡率, Δ 是 Laplace 算子; $e^{-m\tau}$ 表示病毒在时滞期间的存活率,体现了病毒在细胞内成熟过程中可能发生的衰减; $T(x,t)$ 、 $I(x,t)$ 、 $V(x,t)$ 分别表示 t 时刻 x 处的未感染 $CD4^+$ 细胞、感染细胞和游离病毒的浓度。

为刻画病毒在空间中的扩散行为,本文采用如下齐次 Neumann 边界条件性:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty) \quad (2)$$

$\partial\Omega$ 为区域边界, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ 表示为 $\partial\Omega$ 上的外法线导数, Neumann 边界条件意味着疾病的移动不会越过边界 $\partial\Omega$,

初始条件:

$$T(x, 0) = T_0 \geq 0, I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, V(x, 0) = V_0(x) \geq 0, x \in \Omega. \quad (3)$$

2. 基本再生数 R_0 及系统(1)平衡点存在性分析

易知系统(1)的无病平衡点为 $E_0 = \left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0\right)$, 其中 $T_0 = \frac{\lambda}{d}$ 。计算基本再生数 R_0 如下:

$$F_1 = \beta e^{-m\tau} \frac{TV}{(1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V)}, \quad V_1 = (a + p)I,$$

$$F_2 = 0, \quad V_2 = mV - kI,$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial I} & \frac{\partial F_1}{\partial V} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I} & \frac{\partial F_2}{\partial V} \end{pmatrix}_{E_0} = \begin{pmatrix} 0 & \beta e^{-m\tau} \frac{T_0}{1 + \alpha_1 T_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial I} & \frac{\partial V_1}{\partial V} \\ \frac{\partial V_2}{\partial I} & \frac{\partial V_2}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p & 0 \\ -k & m \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \frac{1}{m(a + p)} \begin{pmatrix} m & 0 \\ k & a + p \end{pmatrix},$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta e^{-m\tau} \frac{T_0}{1 + \alpha_1 T_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a + p} & 0 \\ \frac{k}{m(a + p)} & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \beta e^{-m\tau} \frac{kT_0}{(1 + \alpha_1 T_0)m(a + p)} & \frac{\beta e^{-m\tau} T_0}{m(1 + \alpha_1 T_0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{k\beta e^{-m\tau}}{m(a + p)} \cdot \frac{T_0}{1 + \alpha_1 T_0} = \frac{k\beta e^{-m\tau}}{m(a + p)} \cdot \frac{\lambda}{(d + \alpha_1 \lambda)}.$$

定理 1: 若 $R_0 > 1$ 系统(1)存在唯一正平衡点 E^* 。

证明 由系统(1)中第三个方程有,

$$V^* = \frac{k}{m} I^*,$$

由系统(1)中第二个方程知,

$$\frac{\beta T^* V^*}{1 + \alpha_1 T^* + \alpha_2 V^*} = (a + p) I^* e^{m\tau},$$

代入系统(1)中第一个方程, 有

$$\lambda - dT^* + pI^* = \frac{\beta T^* V^*}{1 + \alpha_1 T^* + \alpha_2 V^*} = (a + p) I^* e^{m\tau}$$

$$T^* = \frac{\lambda + pI^* - (a+p)I^*e^{m\tau}}{d} = \frac{\lambda + I^*[p - (a+p)e^{m\tau}]}{d}$$

$$T^* = \frac{\lambda}{d} + \frac{[p - (a+p)e^{m\tau}]}{d} \cdot \frac{m}{k} V^* = T_0 + \frac{m}{dk} [p - (a+p)e^{m\tau}] V^* = T_0 + CV^*,$$

其中 $C = \frac{m}{dk} [p - (a+p)e^{m\tau}]$ 。

又由于,

$$\phi(T^*, V^*) = \frac{\beta T^* V^*}{1 + \alpha_1 T^* + \alpha_2 V^*} = (a+p)e^{m\tau} \cdot \frac{m}{k} V^*,$$

$$\frac{\beta T^*}{1 + \alpha_1 T^* + \alpha_2 V^*} = (a+p)e^{m\tau} \cdot \frac{m}{k} = L,$$

$$\beta T^* = L + \alpha_1 L T^* + \alpha_2 L V^*,$$

$$\beta(T_0 + CV^*) = L + \alpha_1 L(T_0 + CV^*) + \alpha_2 L V^*,$$

$$\beta T_0 + \beta C V^* = L + \alpha_1 L T_0 + \alpha_1 L C V^* + \alpha_2 L V^*,$$

注意到,

$$R_0 = \frac{\beta k}{m(a+p)e^{m\tau}} \cdot \frac{T_0}{1 + \alpha_1 T_0} = \frac{\beta k}{m(a+p)e^{m\tau}} \cdot \frac{\lambda}{d + \alpha_1 \lambda},$$

$$[\beta C - L(\alpha_1 C + \alpha_2)] V^* = L(1 + \alpha_1 T_0) - \beta T_0,$$

$$V^* = \frac{L(1 + \alpha_1 T_0) - \beta T_0}{\beta C - L(\alpha_1 C + \alpha_2)} = \frac{L(1 + \alpha_1 T_0)(1 - R_0)}{(\beta - L\alpha_1)C - L\alpha_2},$$

注意到 $p - (a+p)e^{m\tau} < 0$, $L = \frac{\beta T^*}{1 + \alpha_1 T^* + \alpha_2 V^*} < \frac{\beta T^*}{\alpha_1 T^*} = \frac{\beta}{\alpha_1}$, $\beta - L\alpha_1 > 0$ 。

当 $1 - R_0 < 0$ 时, 即, $V^* > 0$, $I^* > 0$, $T^* > 0$, 证毕。

3. 系统(1)解的适定性

为方便后面计算, 令 $T := T(x, t), I := I(x, t), V := V(x, t)$, $T^\tau(x) := T(x, t - \tau)$, $V^\tau(x) := V(x, t - \tau)$, 则系统(1)可改为如

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda - dT - \frac{\beta TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} + pI, (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta e^{-m\tau} \frac{T^\tau(x) V^\tau(x)}{1 + \alpha_1 T^\tau(x) + \alpha_2 V^\tau(x)} - (a+p)I, (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = dV \Delta V + kI - mV, (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (4)$$

锥 R_+^3 具有向量 $x \geq 0$ 的 R^3 的子集, 令 $\|\cdot\|_X$ 是 $X = C(\bar{\Omega}, R^3)$ 的 Banach 空间范数, 定义 $X^+ = C(\bar{\Omega}, R_+^3)$, (X, X^+) 是一个序空间, 令 $k \geq v(k \leq v)$, 若 $k_i(x) \geq v_i(x) (k_i(x) \leq v_i(x))$, 其中 $i = 1, 2, 3, x \in \bar{\Omega}$, 对任意 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in X^+$ 且 $\forall x \in \bar{\Omega}$, 定义 $F = (F_1, F_2, F_3)$, $X^+ \rightarrow X$, 如下

$$F_1(\phi)(x) = \lambda - d\phi_1(x, 0) - \frac{\beta\phi_1(x, 0)\phi_3(x, 0)}{1 + \alpha_1\phi_1(x, 0) + \alpha_2\phi_3(x, 0)} + p\phi_2(x, 0)$$

$$F_2(\phi)(x) = \frac{\beta e^{-m\tau}\phi_1(x, -\tau)\phi_3(x, -\tau)}{1 + \alpha_1\phi_1(x, -\tau) + \alpha_2\phi_3(x, -\tau)} - (a + p)\phi_1(x, 0)$$

$$F_3(\phi)(x) = k\phi_1(x, 0) - m\phi_3(x, 0)$$

显然 F 在 X^+ 上的任意有界子集上是 Lipschitz 连续的, 因此, 系统(2)~(4)写成如下抽象泛函微分方程:

$$\frac{du}{dt} = \Delta u + F(u),$$

$$u_0 = \phi \in X^+,$$

其中 $u = (T, I, V)$, $Au = (0, 0, dv)$, $\varphi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (T_0(x), I_0(x), V_0(x))$ 。

定理 2: 系统(4)满足初值条件(2)和(3)的解 $(T, I, V)^T$ 存在且在 $[0, +\infty)$ 上非负且有解的。

证明: 先证解存在且非负, 对任意 $\phi \in C$, 定义

$$H(t, \phi) = \begin{pmatrix} \lambda - d\phi_1(0) - \frac{\beta\phi_1(0)\phi_3(0)}{1 + \alpha_1\phi_1(0) + \alpha_2\phi_3(0)} + p\phi_2(0) \\ \frac{\beta e^{-m\tau}\phi_1(-\tau)\phi_3(-\tau)}{1 + \alpha_1\phi_1(-\tau) + \alpha_2\phi_3(-\tau)} - (a + p)\phi_1(0) \\ k\phi_1(0) - m\phi_3(0) \end{pmatrix},$$

因为 $H(t, \phi)$ 在 $(t, \phi) \in R \times C$ 上是连续的, 且在 C 的任意紧集上 Lipschitz 连续的, 由微分方程基本定理, 具体见文献[15]定理[2.2.1 和定理 2.2.3]和文献[16][定理 3.4], 若对 $i = 1, 2, 3$ 有 $\phi_i(0) = 0$, 则 $H(t, \phi) \geq 0$, 对任意 $\phi \in C_1$ 有唯一解 $h_i(t, \phi) \geq 0$, 其中 $i = 1, 2, 3$ 对任意 $t \in [0, \infty)$ 。

下证有界性:

$$W(x, t) = \beta \int_{t-\tau}^t e^{-m(t-u)} \frac{TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} du = \beta e^{-m\tau} \int_{t-\tau}^t e^{mu} \frac{TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} du$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} &= -m\beta e^{-m\tau} \int_{t-\tau}^t e^{mu} \frac{TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} du + \beta e^{-m\tau} \left(e^{m\tau} \frac{TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} - e^{m(t-\tau)} \frac{T^\tau(x)V^\tau(x)}{1 + \alpha_1 T^\tau(x) + \alpha_2 V^\tau(x)} \right) \\ &= -mW(x, t) + \frac{\beta TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} - \beta e^{-m\tau} \frac{T^\tau(x)V^\tau(x)}{1 + \alpha_1 T^\tau(x) + \alpha_2 V^\tau(x)} \end{aligned}$$

$$\text{令 } F_1(x, t) = W(x, t) + I(x, t) + T(x, t), \text{ 则 } \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda - dT - mW(x, t) - aI,$$

令 $\rho = \min\{d, m, a\}$, 因,

$$\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} \leq \lambda - \rho T - \rho W - \rho I = \lambda - \rho(T + W + I) = \lambda - \rho F_1(x, t),$$

因此, 利用比较定理[17], 得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} F_1(x, t) \leq \frac{\lambda}{\rho},$$

即

$$I(x, t) \leq \frac{\lambda}{\rho}, T(x, t) \leq \frac{\lambda}{\rho},$$

因此,

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \operatorname{div} \Delta V \leq k \cdot \frac{\lambda}{\rho} - mV = \frac{\lambda k}{\rho} - mV, \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial \Omega} = 0, \\ V(x, 0) = V_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

令 V_1 是常微分方程的解

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{\lambda k}{\rho} - mV_1, \\ V_1(x, 0) = \max_{x \in \Omega} V_0(x) \end{cases},$$

则

$$V_1 \leq \max \left\{ \frac{\lambda k}{\rho m}, \max_{x \in \Omega} V_0(x) \right\},$$

对 $t \in [0, \sigma)$, $\sigma \leq +\infty$, 由比较定理可得 $V(x, t) \leq V_1(x, t)$, $t \in [0, \sigma)$ 且 $x \in \bar{\Omega}$,

$V(x, t) \leq \max \left\{ \frac{\lambda k}{\rho m}, \max_{x \in \Omega} V_0(x) \right\}$, 故解 $(T, I, V)^T$ 是有界的, 证毕。

4. E_0 和 E^* 局部稳定性分析

本节中, 通过分析系统(1)的两个稳定点 E_0 和 E^* 相应的特征方程, 并研究其稳定性。

令 $0 = u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$ 是 Ω 上具有 Neuman 边界条件的算子 $-\Delta$ 的特征值, 且 $E(u_i)$ 是 $C^1(\Omega)$ 上与 u_i 相应的特征空间。令 $X = [C^1(\Omega)]^3$, $\chi_{ij} : j = 1, 2, \dots$, $\dim E[u_i]$ 是 $E(u_{ij})$ 上的一组标准正交基, 且

$X_{ij} = C\chi_{ij} : C \in \mathbb{R}^3$, 则 $X := \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_j$, $X_i := \bigoplus_{j=1}^{\dim E(u_i)} X_{ij}$ 。

令 $LM = D\Delta M + g(E)M$, 其中 $D = \operatorname{diag}(0, 0, dv)$, $M = (T, I, V)^T$, 且

$$g(E)M = \begin{pmatrix} -(d + H_1)T + pI - H_2V \\ e^{-m\tau} H_1 T^\tau(x) - (a + p)I + e^{-m\tau} H_2 V^\tau(x) \\ KI - mV \end{pmatrix}$$

$H_1 = \frac{\beta \bar{V}(1 + \alpha_2 \bar{V})}{(1 + \alpha_1 \bar{T} + \alpha_2 \bar{V})^2}$, $H_2 = \frac{\beta \bar{T}(1 + \alpha_1 \bar{T})}{(1 + \alpha_1 \bar{T} + \alpha_2 \bar{V})^2}$, 且 $E(\bar{T}, \bar{I}, \bar{V})$ 表示系统(1)的任意平衡点, LM 为系统

(1)在平衡点 E 处的线性化方程。对任意 $i \geq 1$, X_i 在算子 L 下是不变的, 且 λ 是 L 的一个特征值, 当且仅当对某个 $i \geq 1$ 是矩阵 $-u_i D + g(E)$ 的特征值, 因此, 在 X_i 上就有一个特征向量, 其特征方程如下

$$\begin{vmatrix} \lambda + d + H_1 & -p & H_2 \\ -e^{-m\tau - \lambda\tau} H_1 & \lambda + a + p & -e^{-m\tau - \lambda\tau} H_2 \\ 0 & -k & \lambda + m + u_i D \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

可得如下定理。

定理 3: 若 $R_0 < 1$, 则系统(1) 的无病平衡点 E_0 是局部渐进稳定的; 若 $R_0 > 1$, 则系统(1)的无病平衡点是不稳定的。

证明: 令 $(\bar{T}, \bar{I}, \bar{V}) = \left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0\right)$, 经简单计算, 系统(4)的无病平衡点 E_0 代入(5)得特征方程如下

$$(\lambda + d) \left((\lambda + a + p)(\lambda + m + u_i D) - \frac{\beta k T_0}{1 + \alpha_1 T_0} e^{-m\tau} e^{-\lambda\tau} \right) = 0 \quad (6)$$

易知方程(6)有负根 $\lambda_1 = -d < 0$, 而方程(6)的其他根由如下方程给出

$$1 = \frac{\frac{\beta k T_0}{1 + \alpha_1 T_0} e^{-m\tau} e^{-\lambda\tau}}{(\lambda + a + p)(\lambda + m + u_i D)} \quad (7)$$

令 $\lambda_0 = k e \lambda_0 + i \operatorname{Im} \lambda_0$ 是方程(7)的一个解, 其中 $\operatorname{Re} \lambda_0 \geq 0$, 且方程(7)两边取模有

$$1 = \left| \frac{\frac{\beta k T_0}{1 + \alpha_1 T_0} e^{-m\tau} e^{-\lambda\tau}}{(\lambda + a + p)(\lambda + m + u_i D)} \right| \leq \frac{\beta k T_0 e^{-m\tau}}{(1 + \alpha_1 T_0) m(a + p)} = R_0 < 1,$$

矛盾, 因此, 当 $R_0 < 1$ 时, 方程(6)所有根都有负实部, 从而 $R_0 < 1$ 时, E_0 是局部渐近稳定的。

下面考虑 $R_0 > 1$ 情形, 令 $g_1(\lambda) = (\lambda + a + p)(\lambda + m + u_i D) - \frac{\beta k T_0}{1 + \alpha_1 T_0} e^{-m\tau} e^{-\lambda\tau}$, 显然 $g_1(\lambda)$ 是关于 λ 连续的, 且 $i=1(u_i=0)$ 有

$$\begin{aligned} g_1(0)|_{i=1} &= m(a + p) - \frac{\beta k T_0}{1 + \alpha_1 T_0} e^{-m\tau} \\ &= m(a + p) \left(1 - \frac{\beta k T_0 e^{-m\tau}}{(1 + \alpha_1 T_0) m(a + p)} \right), \\ &= m(a + p)(1 - R_0) < 0 \end{aligned}$$

此外, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g_1(\lambda) = +\infty$ 。因此, $R_0 > 1$ 时, $g_1(\lambda) = 0$ 有正根, 则 E_0 不稳定, 证毕。

定理 4: 若 $R_0 > 1$, 则系统(1)的流行病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

证明: 由方程(5)有

$$(\lambda + d + H_1) \left((\lambda + a + p)(\lambda + m + u_i D) - k H_2 e^{-m\tau - \lambda\tau} \right) + e^{-m\tau - \lambda\tau} \left[-p(\lambda + m + u_i D) + k H_2 \right] = 0 \quad (8)$$

下证方程(8)所有根具有负实部。否则, 方程(8)存在一根 $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_1 + i \operatorname{Im} \lambda_1$, 其中 $\operatorname{Re} \lambda_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\text{令 } p(\lambda) &:= (\lambda + d + H_1)(\lambda + a + p)(\lambda + m + u_i D) \\
&= (\lambda + d + H_1)kH_2 e^{-m\tau - \lambda\tau} + p(\lambda + m + u_i D)e^{-m\tau - \lambda\tau} - kH_2 e^{-m\tau - \lambda\tau} =: Q(\lambda) \\
\text{则有 } Q(\lambda) &= e^{-m\tau - \lambda\tau} [kH_2(\lambda + d + H_1) + p(\lambda + m + u_i D) - kH_2] \\
&= e^{-m\tau - \lambda\tau} [\lambda(kH_2 + p) + (d + H_1)kH_2 + p(m + u_i D) - kH_2], \\
\text{令 } A &= kH_2 + p, \quad B = (d + H_1)kH_2 + p(m + u_i D) - kH_2, \quad \text{即 } Q(\lambda) = e^{-m\tau - \lambda\tau} (A\lambda + B), \\
|p(\lambda_1)| &= |(\lambda_1 + d + H_1)(\lambda_1 + a + p)(\lambda_1 + m + u_i D)| \leq e^{-m\tau} |A\lambda_1 + B|,
\end{aligned}$$

注意到 $p(\lambda_1)$ 是关于 λ_1 的三次多项式, 不等式右边也是关于 λ_1 的一次式。

当 $|\lambda_1|$ 充分大时, $|p(\lambda_1)| \gg e^{-m\tau} |A\lambda_1 + B|$ 与 $|p(\lambda_1)| \leq e^{-m\tau} |A\lambda_1 + B|$ 产生矛盾。

因此, 方程(8)所有根具有负实部, 对于 $R_0 > 1$ 时, 则 E^* 是局部渐近稳定的, 证毕。

5. E_0 和 E^* 全局渐近稳定性分析

本节构造 Lyapunov 泛函证明平衡点全局渐近稳定性, 主要依据各变量相对平衡点的偏差构建正定泛函, 并利用格林第一公式处理扩散带来的空间积分, 沿系统解求导并结合基本再生数进行放缩, 得到泛函导数非正, 再通过 Lasalle 不变集原理, 推证平衡点的全局渐近稳定性。

定理 5: 若 $R_0 < 1$ 时, 则系统(1)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明: 定义 Lyapunov 函数 $L(x, t)$ 如下

$$L(x, t) = \int_{\Omega} (L_1(x, t) + L_2(x, t)) dx,$$

其中 $L_1(x, t) = I + \frac{a+p}{k} V$, $L_2(x, t) = \beta e^{-m\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} ds$, 并注意到

$$R_0 = \frac{\beta k T_0}{m(a+p)(1 + \alpha_1 T_0) e^{m\tau}}, \text{ 沿着系统(1)解求导, 有,}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial t} &= \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{a+p}{k} \frac{\partial V}{\partial t} \\
&= \beta e^{-m\tau} \varphi(T^\tau(x), V^\tau(x)) - (a+p)I + \frac{a+p}{k} (dv\Delta V + kI - mV) \\
&= \beta e^{-m\tau} \varphi(T^\tau(x), V^\tau(x)) - (a+p)I + \frac{a+p}{k} dv\Delta V + (a+p)I - \frac{m(a+p)}{k} V
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial t} = \beta e^{-m\tau} \varphi(T, V) - \beta e^{-m\tau} \varphi(T^\tau(x), V^\tau(x))$$

$$\text{即 } \frac{\partial L_1}{\partial t} + \frac{\partial L_2}{\partial t} = \beta e^{-m\tau} \varphi(T, V) - \frac{m(a+p)}{k} V + \frac{m(a+p)}{k} dv\Delta V,$$

注意到 $\varphi(T, V) = \frac{TV}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V} \leq \frac{TV}{1 + \alpha_1 T} \leq \frac{T_0 V}{1 + \alpha_1 T_0}$, ($T \leq T_0$, 前面已知), 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} &= \int_{\Omega} \left[\beta e^{-m\tau} \frac{T_0 V}{1 + \alpha_1 T_0} - \frac{m(a+p)}{k} V + \frac{(a+p)mdv}{k} \Delta V \right] dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{m(a+p)}{k} \left[\left(\frac{\beta e^{-m\tau} T_0}{(1 + \alpha_1 T_0)} \cdot \frac{k}{m(a+p)} - 1 \right) V + \frac{(a+p)mdv}{k} \Delta V \right] dx
\end{aligned}$$

利用格林第一公式和 R_0 表达式可知

$\frac{\partial L(x,t)}{\partial t} \leq \int_{\Omega} \frac{m(a+p)}{k} (R_0 - 1) V dx$, $\frac{dL}{dt} = 0$, 当且仅当 $V = 0$, 把 $V = 0$ 代入系统(1)第三个方程, 可得 $I = 0$, 把 $V = 0$, $I = 0$ 代入系统(1)第一个方程, $T \rightarrow T_0 = \frac{\lambda}{d}$, 由此可知 $\{(T(t,x), I(t,x), V(x,t)) : L(x,t) = 0\}$ 的最大不变子集有唯一的 E_0 。根据 Lasalle's 不变性原理[15], E_0 是全局吸引点, 即 $R_0 < 1$ 时, E_0 是全局渐近稳定的, 证毕。

定理 6: 若 $R_0 > 1$ 时, $A \leq 0$ 且 $B \leq 0$ 成立, 则系统(1)的平衡点 E^* 是全局渐进稳定的, 其中

$$A = g\left(\frac{T^* \varphi(T, V)}{T \varphi(T^*, V^*)}\right) - g\left(\frac{T}{T^*}\right); \quad B = 2g\left(\frac{I}{I^*}\right) + g\left(\frac{T^*}{T}\right) - g\left(\frac{IT^*}{I^* T}\right) - g\left(\frac{IV^*}{I^* V}\right)。$$

证明: 定义 Lyapunov 泛函如下,

$$L_3(x, t) = \int_{\Omega} \left[T^* g\left(\frac{T}{T^*}\right) \cdot e^{-m\tau} + I^* g\left(\frac{I}{I^*}\right) + \frac{e^{-m\tau} p I^*}{m V^*} \cdot V^* g\left(\frac{V}{V^*}\right) + L_7(x, t) \right] dx$$

$$\text{在平衡点 } E^* \text{ 处有 } \begin{cases} \lambda = \beta \varphi(T^*, V^*) + d T^* - p I^* \\ \beta e^{-m\tau} \varphi(T^*, V^*) = (a + p) I^* \\ k I^* = m V^* \end{cases}$$

$L_3(x, t)$ 沿着系统(1)解的导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3(x, t)}{\partial t} &= \int_{\Omega} \left[e^{-m\tau} \left(1 - \frac{T^*}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{p I^*}{m V^*} e^{-m\tau} \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \frac{\partial V}{\partial t} \right] dx \\ &:= \int_{\Omega} L_4(x, t) dx \\ L_4(x, t) &= e^{-m\tau} \left(1 - \frac{T^*}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{p I^*}{m V^*} e^{-m\tau} \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= -e^{-m\tau} \cdot d \frac{(T - T^*)^2}{T} + e^{-m\tau} \left(1 - \frac{T^*}{T} \right) \left(\beta \varphi(T^*, V^*) - \beta \varphi(T, V) - p I^* + p I \right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \left(\frac{\varphi(T^*, V^*)}{\varphi(T^*, V^*)} (a + p) I^* - (a + p) I \right) + \frac{p I^*}{m V^*} e^{-m\tau} \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) dv \Delta V \\ &\quad + \frac{p I^*}{m V^*} e^{-m\tau} \left(m V^* \frac{I}{I^*} - m V \right) \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \\ &:= L_5(x, t) + L_6(x, t) \end{aligned}$$

其中

$$L_5(x, t) = -d e^{-m\tau} \frac{(T - T^*)^2}{T} + \frac{p I^*}{m V^*} e^{-m\tau} \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) dv \Delta V$$

$$\begin{aligned}
L_6(x, t) &= e^{-m\tau} \left(1 - \frac{T^*}{T} \right) \left(\beta\varphi(T^*, V^*) - \beta\varphi(T, V) - pI^* + pI \right) + \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \left(\frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} (a+p)I^* - (a+p)I \right) \\
&\quad + \frac{pI^*}{mV^*} e^{-m\tau} \left(mV^* \frac{I}{I^*} - mV \right) \cdot \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \\
&= \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \left[2 + \frac{T^*}{T} \frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} + \frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} \frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} - \frac{I^*}{I} \frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} - \frac{I}{I^*} - \frac{T}{T^*} \right] \\
&\quad + pI^* e^{-m\tau} \left[\frac{I}{I^*} + \frac{I}{I^*} + \frac{T^*}{T} - \frac{I}{I^*} \frac{T^*}{T} - \frac{IV^*}{I^*V} - \frac{V}{V^*} \right] \\
&= \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{T^*}{T} \frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) + g \left(\frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) - g \left(\frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) - g \frac{I^*}{I} \frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} \right] \\
&\quad - \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{I}{I^*} \right) + g \left(\frac{T}{T^*} \right) \right] + pI^* e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{I}{I^*} \right) + g \left(\frac{I}{I^*} \right) + g \left(\frac{T^*}{T} \right) \right] \\
&\quad - pI^* e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{IV^*}{I^*T} \right) + g \left(\frac{IV^*}{I^*V} \right) + g \left(\frac{V}{V^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$L_7(x, t) = \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \int_{t-\tau}^t g \left(\frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) ds$$

$$\frac{\partial L_7(x, t)}{\partial t} = \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) - g \left(\frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) \right]$$

有

$$\begin{aligned}
L_6(x, t) + \frac{\partial L_7(x, t)}{\partial t} &= \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{T^*}{T} \frac{\varphi(T, V)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) - g \left(\frac{I^*}{I} \frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) - g \left(\frac{I}{I^*} \right) - g \left(\frac{T}{T^*} \right) \right] \\
&\quad + pI^* e^{-m\tau} \left[g \left(\frac{I}{I^*} \right) + g \left(\frac{I}{I^*} \right) + g \left(\frac{T^*}{T} \right) - g \left(\frac{IV^*}{I^*T} \right) - g \left(\frac{IV^*}{I^*V} \right) - g \left(\frac{V}{V^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

由格林第一公式并结合诺伊曼边界条件有,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \Delta V dx &= \int_{\Omega} \Delta V dx - \int_{\Omega} \frac{V^*}{V} \Delta V dx = - \int_{\Omega} \frac{\|\Delta V\|^2}{V^2} dx, \\
\frac{\partial L_2(x, t)}{\partial t} &= \int_{\Omega} \left[-de^{-m\tau} \frac{(T - T^*)^2}{T} - \frac{pI^*}{mV^*} e^{-m\tau} \frac{\|\Delta V\|^2}{V^2} \right] dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \beta\varphi(T^*, V^*) e^{-m\tau} \left(A - g \left(\frac{I^*}{I} \frac{\varphi(T^\tau, V^\tau)}{\varphi(T^*, V^*)} \right) - g \left(\frac{I}{I^*} \right) + pI^* e^{-m\tau} \left(B - g \left(\frac{V}{V^*} \right) \right) \right) dx \leq 0
\end{aligned}$$

$\frac{\partial L_3(x,t)}{\partial t} = 0$ 当且仅当 $T = T^*, I = I^*, V = V^*$. 因此, $\{(T, V, I): L_3(x, t) = 0\}$ 的取大不变子集又有唯一的

E^* , 由 Lasalle's 不变性原理[15] E^* 是全局吸引点即 $R_0 > 1$ 时, $A \leq 0$ 且 $B \leq 0$ 时, E^* 是全局渐进稳定的, 证毕。

6. 结语

构建一类含非线性感染率与空间扩散的 HIV 动力学模型。首先证明了解的存在唯一性、非负性与一致有界性, 并定义基本再生数 R_0 。若 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)的无病平衡点全局渐进稳定的, 意味着病毒灭绝; 若 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)的地方病平衡点是全局渐进稳定的, 意味着流行病持久生存, 不会灭绝。模型中虽然考虑了非线性感染率、时滞与病毒空间扩散下 HIV 的动力学行为, 研究的结果具有重要现实意义。但由于笔者能力有限, 仅仅是就建立的模型做了全局渐进稳定性分析, 建模相对简单, 没有考虑潜伏感染细胞、胞间传播, 缺少真实实验数据拟合与数值仿真, 也未考虑药物治疗、耐药等临床因素。这些问题, 笔者在后续研究中进一步考虑。

基金项目

2025 年度北部湾大学大学生创新创业训练计划项目: 一类非线性感染率的 HIV 空间扩散模型的研究项目编号: S202511607267。

参考文献

- [1] 周宇轩, 王芒, 闫鹏邦. HIV 感染者抗逆转录病毒治疗失败后发生多重耐药的相关因素及耐药基因型特征分析[J]. 传染病信息, 2026, 39(4): 393-399.
- [2] 李思彤, 康小雪, 黄立壮. 具有饱和感染率的 HIV 空间扩散模型[J]. 北部湾大学学报, 2026, 41(4): 33-46.
- [3] 王非, 杨亚莉, 金英姬, 等. 具有两个感染阶段和治疗及非线性发生率的 HIV/AIDS 模型的研究[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(10): 67-73.
- [4] Gui, N.S., Zhang, X., Sun, Z., et al. (2024) Uncovering Spatiotemporal Development Patterns of AIDS in China: A Study Using Panel Data with Joinpoint Regression Analysis and Spatial Clustering. *Health & Place*, **90**, Article 103353.
- [5] 郭树敏, 江晓武, 宋新宇. 非线性感染率的 HIV 模型的动力学研究[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(22): 130-135.
- [6] Dorratoltaj, N., Nikin-Beers, R., Ciupe, S.M., Eubank, S.G. and Abbas, K.M. (2017) Multi-Scale Immunoepidemiological Modeling of Within-Host and Between-Host HIV Dynamics: Systematic Review of Mathematical Models. *PeerJ*, **5**, e3877. <https://doi.org/10.7717/peerj.3877>
- [7] 任杰. 随机 HIV/AIDS 模型的数值方法研究[D]: [博士学位论文]. 银川: 宁夏大学, 2021.
- [8] 苗卉夏米西努尔·阿布都热合曼. 具有胞间传播和蛋白酶抑制剂的时滞 HIV 模型的动力学分析[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(4): 90-97.
- [9] 孟媛, 张瑛, 杨永, 等. 地理信息系统在 HIV/AIDS 时空流行病学中的应用研究进展[J]. 中国医药导报, 2025, 22(15): 57-60.
- [10] Xu, R. and Song, C.W. (2022) Dynamics of an HIV Infection Model with Virus Diffusion and Latently Infected Cell Activation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **67**, Article 103618. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2022.103618>
- [11] Estill, J., Ng'ambi, W., Rozanova, L., Merzouki, A. and Keiser, O. (2023) The Spatial Spread of HIV in Malawi: An Individual-Based Mathematical Model. *Heliyon*, **9**, e21948. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e21948>
- [12] 付瑞, 王稳地, 陈虹燕, 等. 一类考虑饱和和发生率的 HIV 感染模型的稳定性分析[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(3): 76-81.
- [13] 苗卉, 滕志东. 具有两种感染模式和免疫反应的多时滞 HIV 模型的动力学分析[J]. 工程数学学报, 2024, 41(4): 693-709.
- [14] 吴鹏, 方诚. 一类具有多时滞非局部扩散 HIV 潜伏感染模型的时空动力学分析[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2024,

39(3): 331-346.

- [15] Hale, J.K. and Verduyn Lunel, S.M. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. Springer.
- [16] Marsden, J.E., Sirovich, L. and Antmun, S.S. (2011) An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Science. Springer.
- [17] Ye, Q. and Li, Z. (1990) Introduction to Reaction Diffusion Equation. Science Press.