

基于熵压缩方法的广义无圈边染色

项 盼

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年9月17日; 录用日期: 2026年10月11日; 发布日期: 2026年10月20日

摘 要

图 G 的无圈边染色是一种正常边染色, 且染色中不存在双色圈。图 G 的广义无圈边染色是在无圈边染色基础上进一步要求不存在双色路。本文借助洛瓦兹(Lovász)局部引理(LL)与熵压缩方法, 得到: 对最大度为 Δ 的任意图 G , 当 Δ 充分大时, 其广义无圈边色数上界为 $(k-2)(k-3)^{\frac{k-3}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta$ (其中 k 为图 G 中路长度), 该结果为广义无圈边染色问题提供了一个更优的上界。

关键词

图, 广义无圈边染色, 熵压缩, 算法

Generalized Acyclic Edge Coloring with Entropy Compression Method

Pan Xiang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: September 17, 2026; accepted: October 11, 2026; published: October 20, 2026

Abstract

The acyclic edge coloring of a graph G is a proper coloring without bichromatic cycles. The generalized acyclic edge coloring of a graph G is an acyclic edge coloring without bichromatic paths. Based on Lovász Local Lemma (LLL) and the entropy compression method, we concluded that for any graph G with maximum degree Δ , the generalized acyclic edge chromatic index is at most

$(k-2)(k-3)^{\frac{k-3}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta$ (k is the length of paths in the graph G) when Δ is large

enough, providing a better upper bound for the generalized acyclic edge coloring problem.

Keywords

Graph, Generalized Acyclic Edge Coloring, Entropy Compression, Algorithm

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $G=(V, E)$ 为有限简单无向图。正常边染色是给图的边分配颜色, 使得任意两条相邻边颜色互不相同。若图 G 中一个圈的各边可用恰好两种不同的颜色完成正常染色, 则称该圈为双色圈。因此, G 的不含双色圈的正常边染色, 就称为 G 的无圈边染色。完成该染色所需的最少颜色数称为图 G 的无圈边色数, 记为 $a'(G)$ 。无圈染色的概念由 Grünbaum [1] 提出, 后被 Fiamčík [2] 推广到边染色, 并且 Fiamčík [2] 与 Alon [3] 各自独立提出了一个著名猜想: 任意图的无圈边色数的上界为 $\Delta+2$ 。

猜想 1. 对任意最大度为 Δ 的图 G , 有 $a'(G) \leq \Delta+2$ 。

Lovász 局部引理 (LLL) 由 Lovász [4] 于 1975 年提出, 它是证明一系列“坏事件”全部不发生的概率严格大于 0 的强大的概率工具, 以此保证满足预定条件的结构的存在性。1991 年, Alon、McDiarmid 与 Reed [3] 首次将 LLL 用于图染色, 证明了存在常数 C , 使得对任意图 G 均有 $a'(G) \leq C\Delta$ 成立。2010 年, Moser 与 Tardos [5] 设计了 LLL 的算法化版本, 即后来广为人知的熵压缩方法。随后, Esperet 与 Parreau [6] 将该方法应用于无圈边染色问题。他们证明了: 当 Δ 足够大时, 无圈边色数的通用上界可改进为 $4\Delta-4$ 。之后, Cai、Li 与 Yan [7] 运用该方法证明了: 一般图 G 的退化星色数 (既是退化染色又是星染色的染色)

的上界为 $\left\lceil \frac{19}{6}\Delta^{\frac{3}{2}} + 5\Delta \right\rceil$ 。

关于特殊图类的无圈边染色, 目前已有许多结果。Andersen 等人 [8] 刻画了 3-正则图 (cubic graphs) 的最优无圈边染色, 得出除两个特例 K_4 和 $K_{3,3}$ 外, 所有三次图的无圈边色数等于 4; Cranston 等人 [9] 证明平面图猜想: 当最大度 Δ 充分大时, 平面图满足 $\chi'_a(G) = \Delta$; Basavaraju 等人 [10] 完全确定无弦图 (chordless graphs) 的无圈边色数, 得到对无弦图: 若 $\Delta \geq 3$, 则 $\chi'_a(G) = \Delta$; Hegde 等人 [11] 研究退化图 (k -degenerate) 无圈边色数的上界, 对 3-退化图证明得到 $\chi'_a(G) \leq \Delta+5$; Anto 等人 [12] 则证明了猜想 1 对 3-稀疏图 (3-sparse graphs) 成立。

此外, 正常边染色的一种更强约束是强边染色, 它要求距离至多为 2 的任意两条边都染不同颜色。这种染色所需的最少颜色数称为强边色数, 记作 $\chi'_s(G)$ 。该概念最早由 Fouquet 与 Jolivet 于 1983 年提出 [13]。关于 $\chi'_s(G)$ 的上界, 核心猜想由 Erdős 与 Nešetřil 于 1989 年提出 [14]。

猜想 2. 若 G 是最大度为 Δ 的简单图, 则

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5\Delta^2}{4}, & \text{若 } \Delta \text{ 是偶数,} \\ \frac{5\Delta^2 - 2\Delta + 1}{4}, & \text{若 } \Delta \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

围绕猜想 2, 一个重要研究方向是寻找一个不依赖图结构的常数 $C < 2$, 使得 $\chi'_s(G) \leq C\Delta^2$ 。1997 年,

Molloy 与 Reed [15]证明了 $\chi'_s(G) \leq (2+o(1))\Delta^2$ (更精确地, 当 Δ 足够大时, 该上界可改进为约 $1.998\Delta^2$)。随后, Bonamy、Perrett 与 Postle [16]将该结果进一步改进为 1.835。迄今为止, 已知的最佳上界来自 Hurley、Verclos 与 Kang [17], 他们证明了当 $\Delta(G)$ 足够大时, $\chi'_s(G) \leq 1.772\Delta(G)^2$ 。

值得注意的是, 不含双色路的边染色是强边染色的一个特例。若我们在 G 的正常边染色的基础上额外要求其同时避免双色圈与双色路, 则可得到广义无圈边染色的定义。2015 年, Hou 与 Wu [18]将熵压缩方法应用于不含双色长路的图的无圈顶点染色。他们证明了: 若 $k \geq 5$ 且 G 不含长度为 4 的圈, 则 G 可以用 $O(\Delta^{(k-1)/(k-2)})$ 种颜色实现无圈染色, 且不存在 k 个顶点构成的双色路。在本文中, 我们通过运用熵压缩方法, 得到了广义无圈边色数的首个上界。

定理 1. 对任意最大度为 Δ 且同时避免双色圈与双色路的图 G , 广义无圈边色数满足上界

$$(k-2)(k-3)^{-\frac{k-3}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta,$$

其中 k 表示 G 中路的长度, 且 Δ 足够大。

2. 算法分析

为证明 **定理 1**, 我们采用反证法。假设存在最大度为 Δ 的图 G , 使得它的广义无圈边色数满足 $\chi'_\alpha(G) > (k-2)(k-3)^{-\frac{k-3}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta$, 然后我们为 G 构造一个使用 κ 种颜色的染色算法, 其中

$$\kappa = (k-2)(k-3)^{-\frac{k-3}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta.$$

设 $<$ 是图上边集的任意一个全序。对任意边 $e \in E(G)$, 记 $N(e)$ 为 e 的邻边集合。取长度为 t 的向量 $\xi \in \{1, 2, \dots, \kappa\}^t$, 其中 t 充分大, 满足 $t \gg m = |E(G)|$ 。将 ξ 作为算法输入, 算法输出两项结果:

1. G 的一个部分无圈染色 $\psi: E(G) \rightarrow \{\bullet, 1, 2, \dots, \kappa\}$, 其中 $\bullet$ 表示该边未被染色;
2. 一份文本记录文件 R , 在本文其余部分中称之为记录(record)。

2.1. 算法

算法 **EdgeColoringGamma_G** (如下所示)按如下方式运行。由于假设可用颜色少于图的边色数, 输出的边染色 ψ 必然是部分染色。记 ψ_i 表示算法循环执行第 i 步完成后得到的部分染色。

在第 i 步中, 我们从部分染色 ψ_{i-1} 出发, 按照算法的第 7 行, 将颜色 $\xi[i]$ 赋予给按序 $<$ 下序号最小的未染色边 e 。设 $e = uv$, 然后我们检查以下三类坏事件是否发生:

1. 事件 N : G 中存在边 ux 或 vy ($x, y \neq v, u$), 其颜色与 uv 的颜色相同(算法的第 9 行);
2. 事件 C : G 中存在长度为 $2l$ 的双色圈($e = e_1, e_2, \dots, e_{2l}$) (算法的第 12 行);
3. 事件 P : G 中存在长度为 k 的双色路, 其中 $e \in \left\{ e_1, e_2, \dots, e_{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} \right\}$ (算法的第 17 行)。

算法 1. EDGECOLORINGGAMMA_G

输入: ξ (长度为 t 的向量);

输出: (ψ, R)

1. 对所有 $e \in E(G)$, 执行
-

续表

2. $\psi(e) \leftarrow \bullet$
3. 结束循环
4. $R \leftarrow$ 新建文件()
5. 对 $i \leftarrow 1$ 到 t :
6. 取按 $\prec$ 序最小的未染色边 e
7. $\psi(e) \leftarrow \xi[i]$
8. 在 R 中写入 “Color”
9. 如果存在 $e' \in N(e)$ 满足 $\psi(e) = \psi(e')$, 那么
10. $\psi(e) \leftarrow \bullet$
11. 在 R 中写入 “Uncolor, neighbor e' ” {正常染色问题}
12. 否则若 e 属于长度为 $2l (l \geq 2)$ 的双色圈, 记为 $(e = e_1, \dots, e_{2l})$, 那么
13. 对 $j \leftarrow 1$ 到 $2l - 2$
14. $\psi(e_j) \leftarrow \bullet$
15. 结束循环
16. 在 R 中写入 “Uncolor, $2l$ -cycle($e = e_1, \dots, e_{2l}$)” {双色圈问题}
17. 否则若 e 属于长度为 $k (k \geq 4)$ 的双色路, 其中 $e \in \left\{ e_1, e_2, \dots, e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right\}$, 那么
18. 对 $j \leftarrow 1$ 到 $k - 2$
19. $\psi(e_j) \leftarrow \bullet$
20. 在 R 中写入 “Uncolor, k -path($e = e_1, \dots, e_k$)” {双色路问题}
21. 结束循环
22. 返回 (ψ, R)

2.2. 一一对应关系

由算法 **EdgeColoringGamma_G** 生成的任意输出 (ψ, R) , 其对应的输入向量 ξ 可以被唯一确定。设 $\overline{E(i)} \subset E(G)$ 为在 ψ_i 中已经被染色的边的集合。此外, 我们分别用 e_i 、 R_i 和 ξ_i 表示在第 i 步中被处理的边 e , 执行 i 步之后累积得到的记录 R_i , 以及输入向量 ξ 的前 i 个元素。

引理 1. 给定 (ψ_i, R_i) , 可唯一还原对应的 $E[i]$ 。

证明. 由于 ψ_i 是 G 的一个部分 κ -边染色, 且 G 不是 κ -可染色的, 故 $\overline{E(i)} \subset E(G)$ 。这保证了 ψ_{i+1} 是定义良好的。此外, 我们还能得到记录 R 恰好包含 t 行 “Color” 记录。由此容易看出, R_i 对应于 R 中位于第 $(i+1)$ 行 “Color” 之前的全部内容。

我们对 i 进行归纳。基础情形 $i = 0$ 显然成立; 于是我们考虑 (ψ_i, R_i) , 目标是还原 ξ_i 。由归纳假设, R_{i-1} 、 ψ_{i-1} 和 $\xi[i]$ 可以被完全还原。首先, 要从 R_i 中还原 R_{i-1} , 我们只需取 R_i 中位于其最后一行(即第 i 行) “Color” 之前的那些行。一旦得到 R_{i-1} , 我们便能容易还原 ψ_{i-1} , 并进一步推出第 i 步处理的边 e_i 。

回顾算法的第 i 步中, 记录 R 会以一行或两行进行更新: 一行 “Color”, 其后要么什么也不跟; 要么跟一行 “Uncolor, neighbor e' ”; 要么跟一行 “Uncolor, $2l$ -cycle($e = e_1, \dots, e_{2l}$)”; 要么跟一行 “Uncolor, k -path($e = e_1, \dots, e_k$)”。值得注意的是, 某些行的组合是不可能的: “Uncolor, neighbor e' ” 行之后不能紧跟 “Uncolor, $2l$ -cycle($e = e_1, \dots, e_{2l}$)” 行或 “Uncolor, k -path($e = e_1, \dots, e_k$)” 行, 因为在检查经过 e 的双色圈或双色路之前, 算法已经将边 e 去色。类似地, “Uncolor, $2l$ -cycle($e = e_1, \dots, e_{2l}$)” 行

之后也不能紧跟 “Uncolor, k -path($e = e_1, \dots, e_k$)” 行。下面我们分别分析以下四种情形：

1. 第 i 步为染色步：则 $E[i] = \psi_i(e_i)$ ，且 ψ_{i-1} 由 ψ_i 将 e_i 去色得到；
2. R_i 的最后一行是 “Uncolor, neighbor e' ”：则由算法的第 9 行可知 $E[i] = \psi_i(e')$ ，且 $\psi_{i-1} = \psi_i$ ；
3. R_i 的最后一行是 “Uncolor, $2l$ -cycle($e = e_1, \dots, e_{2l}$)”：则由算法的第 12 行可知 $E[i] = \psi_i(e_{2l-1})$ ，且 ψ_{i-1} 由 ψ_i 将边 e_j ($2 \leq j \leq 2l-2$ ，这些边在 ψ_i 中未被染色)重新染色得到。染色方式为：若 j 为奇数，则 $\psi_{i-1}(e_j) = \psi_i(e_{2l-1})$ ；否则 $\psi_{i-1}(e_j) = \psi_i(e_{2l})$ ；
4. R_i 的最后一行是 “Uncolor, k -path($e = e_1, \dots, e_k$)”：则由算法的第 17 行可知 $E[i] = \psi_i(e_{k-1})$ ，且 ψ_{i-1} 由 ψ_i 将边 e_j ($4 \leq j \leq k-2$ ，这些边在 ψ_i 中未被染色)重新染色得到，染色方式为：若 k 为奇数，则 $\psi_{i-1}(e_j) = \psi_i(e_{k-1})$ ；否则 $\psi_{i-1}(e_j) = \psi_i(e_k)$ 。

引理证毕。

3. 记录和 Dyck 路

3.1. Dyck 路

Dyck 路是由上步 $\nearrow$ (通常对应从点 (i, j) 移动到 $(i+1, j+1)$) 与下步 $\searrow$ (通常对应从点 (i, j) 移动到 $(i+1, j-1)$) 构成的格路。它满足以下三个条件：

1. 路从原点 $(0, 0)$ 出发，并在 x 轴上终止(即其终点为 $(2n, 0)$ ，其中 n 为非负整数，表示上步/下步的总数)；
2. 路在任意点都不低于 x 轴；
3. 上步的总数量等于下步的总数量。

最简单的 Dyck 路是“空路”，它不含任何步，起点与终点相同。对 $n=1$ ，唯一的 Dyck 路为 $\nearrow \searrow$ (从 $(0, 0)$ 移动到 $(1, 1)$ ，再到 $(2, 0)$)。对 $n=2$ ，存在两条不同的 Dyck 路： $\nearrow \nearrow \searrow \searrow$ 与 $\nearrow \searrow \nearrow \searrow$ 。

广义 Dyck 路是标准 Dyck 路的推广，它同样由上步 $\nearrow$ 与下步 $\searrow$ 组成，并从原点 $(0, 0)$ 出发。与标准 Dyck 路不同的是，它不必在横轴上终止，因此本质上它是某个标准 Dyck 路的子路。

此外，我们定义两个关键参数：广义 Dyck 路的水平(level)为上步数减去下步数的值，其大小(size)为上步的总数。由此可见，若一条广义 Dyck 路的水平为 0(即上步数等于下步数)，则其终点恰好位于 x 轴上。此时，该广义 Dyck 路退化为标准 Dyck 路。

3.2. 记录的数目

根据引理 1，从输入 ξ 到输出对 (ψ, R) 的映射是单射。可能的输入 ξ 的总数为 κ^l ，这直接由 ξ 的长度 l 得到。其次，注意到图 G 的部分 κ -边染色 ψ 最多有 $(1+\kappa)^n$ 种——因为每条边要么未被染色，要么被赋予 κ 种可用颜色中的一种。现在我们继续对可能记录 R 的数目进行计数。

由于 ψ_i 是 G 的部分边染色，记录 R 恰好由 t 行 “Color” 以及一组 “Uncolor” 行构成，其中 “Uncolor” 行分为三种类型：“Uncolor, neighbor” (类型 N)、“Uncolor, $2l$ -cycle” (类型 C) 与 “Uncolor, k -path” (类型 P)。设 $\mathcal{E} = \{N, C, P\}$ 为坏事件类型的集合。对每个 $i \in \mathcal{E}$ ，设 A_i 为当类型 i 的坏事件发生时被去色的先前已染色边的数目， B_i 为在单个 “Uncolor” 步中类型 i 事件可能发生的次数。

断言 1. 对每个 “Uncolor, neighbor” 步， $A_N = 1$ 且 $B_N = 2\Delta - 2$ 。

断言 2. 对每个 “Uncolor, $2l$ -cycle” 步，当 $2 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ 时， $A_C = 2l - 2$ 且 $B_C = (\Delta - 1)^{2l-2}$ 。

证明. 算法会去色 $2l-2$ 条先前已染色的边，仅保留最后两条异色的边的颜色，因此设 $A_C = 2l - 2$ ，由此可以得到条目的数目至多为 $(\Delta - 1)^{2l-2}$ ，所以设 $B_C = (\Delta - 1)^{2l-2}$ 。

证毕。

断言 3. 对每个 “Uncolor, k -path” 步, 当 $2l \leq k \leq m$ 时, $A_p = k-2$ 且 $B_p = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil (\Delta-1)^{k-1}$ 。

证明. 算法会去色 $k-2$ 条先前已染色的边, 因此设 $A_k = k-2$ 。我们根据 k 的奇偶性分两种情形讨论。

情形 1: 若 k 为偶数。

当 $e = e_1/e_k$ 时, 条目的数目至多为 $(\Delta-1)^{k-1}$; 当 $e = \{e_2, e_3, \dots, e_{k-1}\}$ 时, 条目的数目至多为 $(\Delta-1)^{k-1}$ 。因此, 条目的数目至多为 $\frac{k}{2}(\Delta-1)^{k-1}$ 。

情形 2: 若 k 为奇数。

当 $e = e_1/e_k$ 时, 条目的数目至多为 $(\Delta-1)^{k-1}$; 当 $e = \{e_2, e_3, \dots, e_{k-1}\}$ 时, 条目的数目至多为 $(\Delta-1)^{k-1}$ 。因此, 条目的数目至多为 $\frac{k+1}{2}(\Delta-1)^{k-1}$ 。

于是, 条目的数目总计至多为 $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil (\Delta-1)^{k-1}$, 设 $B_K = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil (\Delta-1)^{k-1}$ 。

证毕。

我们将与第 j 个条目相关联的类型 i 的坏事件记为 (i, j) -事件 ($i \in \mathcal{E}, j \in [1, B_i]$)。记录 R 由 “Color” 行与 “Uncolor” 行组成, 因此可以被看作一条带有参数集 $((A_i, B_i))_{i \in \mathcal{E}}$ 标注的广义 Dyck 路。记录的数目等于带标注的广义 Dyck 路的数目, 其对应关系规定如下:

1. 每个上步对应一行 “Color”;
2. 长度为 ℓ 的每个下降(即一段极长的连续下步序列)被标注为一对 (i, j) , 对应于一个 (i, j) -事件, $\ell = A_i$ 。这里, A_i 是类型 i 坏事件发生后被去色的边的数目。

下面的定理使我们可以对带标注 Dyck 路的数目进行界定。

定理 2. 对任意集合 $\mathcal{E}$, 具有参数 $((A_i, B_i))_{i \in \mathcal{E}}$ 、大小为 t 的带标注广义 Dyck 路的数目至多为

$$O\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right), \text{ 其中对任意 } x \in (0, 1], Q(x) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i x^{A_i}.$$

为证明定理 2, 我们将采用 Meir 与 Moon 提出的光滑隐函数模式(smooth implicit-function schema)。

定义 1 (光滑隐函数模式) [19].

设 $M(y)$ 是在 0 处解析的函数, $M(y) = \sum a_i y^i$, 其中 $a_0 = 0$ 且 $a_i \geq 0$ 。若存在二元函数 $G(y, z)$ 使得 $M(y) = G(y, M(y))$, 则称该函数属于光滑隐函数模式, 其中 $G(y, z)$ 满足以下条件:

1. $G(y, z) = \sum_{m, n \geq 0} g_{m, n} y^m z^n$ 在区域 $|y| < R$ 与 $|z| < S$ 内解析, 其中 $R, S > 0$ 为某常数。
2. G 的系数满足 $g_{m, n} \geq 0, g_{0, 0} = 0, g_{0, 1} \neq 1$, 并且对某个 $m \geq 0$ 与某个 $n \geq 2$ 有 $g_{-}\{m, n\} > 0$ 。
3. 存在两个数 r 和 s , 满足 $0 < r < R$ 且 $0 < s < S$, 并满足方程组

$$G(r, s) = s, G_z(r, s) = 1,$$

其中 $r < R, s < S$, 该方程组称为特征系统(characteristic system)。

定理 3 [(Meir 与 Moon) [19] [20], 定理 VII.3, 第 468 页]. 设 $M(y)$ 属于由 $G(y, z)$ 定义的光滑隐函数模式, (r, s) 为特征系统的正解。则 $M(y)$ 在 $y=r$ 处收敛, 且在此处具有平方根奇点,

$$\lim_{y \rightarrow r} M(y) = s - \gamma \sqrt{1 - \frac{y}{r}} + O\left(1 - \frac{y}{r}\right), \gamma = \sqrt{\frac{2rG_y(r, s)}{G_{zz}(r, s)}},$$

在 Δ -域内成立。若 $M(y)$ 非周期, 则 r 是唯一主导奇点, 系数渐进满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y^t] M(y) = \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi t^3}} r^{-t} (1 + O(t^{-1})).$$

断言 4. $\frac{Q(x)}{x}$ 的最小值在多项式 $P(x) = -1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} (A_i - 1) B_i x^{A_i}$ 的唯一正根处取得。平凡地, 若对所有 $i \in \mathcal{E}$ 有 $A_i = 1$, 则最小值在 $x = 1$ 处取得, 且 $\frac{Q(x)}{x} = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i$ 。

设 $\mathcal{H}$ 表示具有参数 $((A_i, B_i))_{i \in \mathcal{E}}$ 的带标注广义 Dyck 路的集合, 设 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ 为在水平 0 处终止的带标注路的子类。我们将 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{K}$ 的生成函数分别定义为 $H(y) = \sum_{t \geq 0} h_t y^t$ 与 $K(y) = \sum_{t \geq 0} k_t y^t$, 其中 h_t (相应地 k_t) 是 $\mathcal{H}$ (相应地 $\mathcal{K}$) 中大小为 t 的元素的数目。我们的目标是证明 $h_t = o(\lambda^t)$, 其中 $\lambda = \min_{0 < x \leq 1} \frac{Q(x)}{x}$ 。

断言 5. $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{K}$ 的生成函数分别由

$$H(y) = \sum_{0 \leq \ell \leq n} H_\ell(y) = \sum_{0 \leq \ell \leq n} y^\ell K(y)^{\ell+1}$$

与

$$K(y) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} K_i(y) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} y^{A_i} B_i K(y)^{A_i}$$

给出。

证明. 设 $\mathcal{H}_\ell \subseteq \mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 中在水平 ℓ 处终止的带标注广义 Dyck 路的集合。 $\mathcal{H}_\ell$ 中的一条带标注广义 Dyck 路 R 可以被拆分为 ℓ 个上步和 $\ell+1$ 条带标注 Dyck 路 $\{K_1, K_2, \dots, K_{\ell+1}\} \subseteq \mathcal{K}$ 。因此, $\mathcal{H}_\ell$ 的生成函数满足 $H_\ell(y) = y^\ell K(y)^{\ell+1}$ 。所以,

$$H(y) = \sum_{0 \leq \ell \leq n} H_\ell(y) = \sum_{0 \leq \ell \leq n} y^\ell K(y)^{\ell+1}。$$

设 $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$ 为 $\mathcal{K}$ 中以标注为 (i, j) 的下降终止(对某个 j)的带标注 Dyck 路的集合。则 $\mathcal{K}_i$ 中的任意带标注 Dyck 路 H 都以一个最终上步后接一段长度为 A_i 的末端下降结束。设 H' 为从 H 中删去这最后一个上步与末端下降后得到的子路; 可以验证 $H' \in \mathcal{H}_{A_i-1}$ 。相应地, $\mathcal{K}_i$ 的生成函数为

$$K_i(y) = H_{A_i-1}(y) \times y B_i = y^{A_i-1} \times K(y)^{A_i} \times y B_i = y^{A_i} B_i K(y)^{A_i}。$$

此外, $\mathcal{K}$ 中的每条带标注 Dyck 路 H 要么是空的(即大小为 0), 要么以标注为 (i, j) 的下降终止(对某个 $i \in \mathcal{E}$ 与 j), 因此我们得到

$$K(y) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} K_i(y) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} y^{A_i} B_i K(y)^{A_i}。$$

断言 5 证毕。

现在我们旨在证明**定理 2**, 论证分两种情形进行。

情形 1: $A_i = 1$ 。

由上式, 我们有 $K(y) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} y B_i K(y)$, 由此可得

$$K(y) = \frac{1}{1 - \sum_{i \in \mathcal{E}} y B_i} = \sum_{t \geq 0} \left(\sum_{i \in \mathcal{E}} B_i \right)^t y^t,$$

相应地, 系数 k_t 满足 $k_t = \left(\sum_{i \in \mathcal{E}} B_i \right)^t$ 。

记 $\lambda = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i$, 注意最小值在 $x = 1$ 处取得。显然 $k_t = (\lambda - 1)^t$, 且简化形式为 $K(y) = \frac{1}{1 - y(\lambda - 1)}$ 。

将其代入 $H(y)$ 的表达式可得

$$H(y) = \sum_{0 \leq l \leq m} y^l \left(\frac{1}{1 - y(\lambda - 1)} \right)^{l+1} = \sum_{0 \leq l \leq m} \sum_{a \geq 0} \binom{a+l}{a} (\lambda - 1)^a y^{a+l}.$$

令 $t = a + l$, 则 $H(y) = \sum_{t \geq 0} \left(\sum_{0 \leq l \leq m} \binom{t}{l} (\lambda - 1)^{t-l} \right) y^t$ 。由此立即可得系数 h_t 为 $h_t = \sum_{0 \leq l \leq m} \binom{t}{l} (\lambda - 1)^{t-l}$ 。因此我

们推出不等式 $r_t < (n+1)\lambda^{n+1}(\lambda - 1)^t$, 从而 $r_t = o(\lambda^t)$ 。

情形 2: 若 $A_i \geq 2$ 。

根据 Esperet 与 Parreau [6], 存在一个常数 C (仅依赖于下降的长度), 使得 $h_t \leq k_{t+C}$ 。只需证明 $k_t = o(\lambda^t)$ 。

由于 $k_0 = 1$ 不满足条件 $k_0 = 0$ (参见定义 1), 且 $k(y) = \frac{1}{1 - (\lambda - 1)y}$ 的隐式方程为 $G(y, z) = 1 + (\lambda - 1)yz$ 。

此时, $G(y, z)$ 的系数为 $g_{0,0} = 1 \neq 0$, 故 $k(y)$ 不满足光滑隐函数模式(SIFS)。我们需要定义一个新函数

$F(y) = k\left(y^{\frac{1}{d}}\right) - 1$, 其中 $d = \gcd\{A_i \mid i \in \mathcal{E}\}$ 。

断言 6. 函数 $F(y) = k\left(y^{\frac{1}{d}}\right) - 1$ 满足光滑隐函数模式, 其特征系统为 (r, s) 。

证明. 注意 $\mathcal{K}$ 中带标注 Dyck 路的大小都是 d 的倍数, 因此

$$K(y) = \sum_{t \geq 0} k_t y^t = \sum_{\substack{t \geq 0 \\ t \text{ 是 } d \text{ 的倍数}}} k_t y^t$$

由此可得 $K\left(y^{\frac{1}{d}}\right) = 1 + \sum_{t \geq 1} k_{dt} y^t$ 。相应地, 我们定义生成函数 $F(y) = \sum_{t \geq 0} f_t y^t$, 其中 $f_0 = 0$, 且对 $t \geq 1$ 有

$f_t = k_{dt}$ 。函数 $F(y)$ 在 0 处解析。

此外, 对所有 $t \geq 0$ 有 $f_t \geq 0$, 且对足够大的 t 有 $f_t > 0$ 。为证明这一性质, 注意对任意足够大的整数 t , 值 dt 可以表示为集合 $\{A_i \mid i \in \mathcal{E}\}$ 的组合。这意味着对足够大的 t 有 $f_t = k_{dt} > 0$, 并进一步推出 $F(y)$ 是非周期的。然后我们通过变量代换, 将 $K(y)$ 所满足的隐式方程转化为 $F(y)$ 的相应隐式方程。

由于 $F(y) = k\left(y^{\frac{1}{d}}\right) - 1$, 我们可以得到

$$K\left(y^{\frac{1}{d}}\right) = F(y) + 1 = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i y^{\frac{A_i}{d}} k\left(y^{\frac{1}{d}}\right)^{A_i},$$

$$F(y) = \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i y^{\frac{A_i}{d}} k\left(y^{\frac{1}{d}}\right)^{A_i} = \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i y^{\frac{A_i}{d}} (F(y) + 1)^{A_i}.$$

因此,

$$G(y, z) = \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i y^{\frac{A_i}{d}} (z+1)^{A_i} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{0 \leq j \leq A_i} \binom{A_i}{j} B_i y^{\frac{A_i}{d}} z^j.$$

设 $X = r^{1/d} (s+1)$, 则 $G(r, s) = s$ 与 $G_z(r, s) = 1$ 分别变为

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} B_i x^{A_i} = s$$

与

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} A_i B_i x^{A_i} = s+1.$$

用后一式减去前一式, 可得 x 是 $P(x)$ 的唯一正根。将两个方程结合, 可得

$$r^{\frac{1}{d}} \left(1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i x^{A_i} \right) = (s+1) r^{\frac{1}{d}} \quad \text{和} \quad r = \frac{(s+1)^d r}{\left(1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i x^{A_i} \right)^d} = \left(\frac{x}{Q(x)} \right)^d.$$

因此, $G(y, z)$ 是满足定义 1 三个条件的二元幂级数。证毕。

根据定理 3, $F(y)$ 在 $y=r$ 处具有平方根奇点, 且系数满足

$$[y^t] F(y) \sim \frac{r}{2\sqrt{\pi t^3}} r^{-t} (1 + O(t^{-1})).$$

因此, $f_t = O\left(t^{-\frac{3}{2}} r^{-t}\right) = o(r^{-t})$, 且 $k(y)$ 的系数满足

$$[y^t] F(y) = [y^{dt}] F\left(y^{\frac{1}{d}}\right) \sim \frac{r}{2\sqrt{\pi (dt)^3}} r^{-dt} (1 + O(t^{-1})).$$

因此, $k_t = O(r^{-dt}) = o(\lambda^t) = o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right)$ 。

由于 x 是 $P(x)$ 的唯一正根, 证毕。

4. 图 G 的广义无圈边色数上界

注意 $h_t = o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right)$, 现在我们需要对可能记录的数目进行界定。

引理 2. 算法 `AcyclicEdgeColoringGamma_G` 至多产生 $o(\kappa^t)$ 条不同的记录 R 。

证明. 由定理 2, `AcyclicEdgeColoringGamma_G` 至多产生 $o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right)$ 条可能的记录, 其中

$Q(x) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{E}} B_i x^{A_i}$, $x \in (0, 1]$, 参数如下: $\mathcal{E} = \{N, C, P\}$, $A_N = 1$, $B_N = 2\Delta - 2$; 当 $2 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ 时, $A_C = 2l - 2$,

$B_C = (\Delta - 1)^{2l-2}$; 当 $2l \leq k \leq m$ 时, $A_P = k - 2$, $B_P = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor (\Delta - 1)^{k-1}$ 。因此有:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 1 + (2\Delta - 2)x + \sum_{2 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} (\Delta - 1)^{2l-2} x^{2l-2} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil (\Delta - 1)^{k-1} x^{k-2} \\ &< 1 + 2\Delta x + \sum_{2 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \Delta^{2l-2} x^{2l-2} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \Delta^{k-1} x^{k-2}. \end{aligned}$$

所以, 对 $x < \frac{1}{\Delta}$,

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{x} &< \frac{1}{x} + 2\Delta + \sum_{2 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \Delta^{2l-2} x^{2l-3} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \Delta^{k-1} x^{k-3} \\ &< \frac{1}{x} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \Delta^{k-1} x^{k-3} + \frac{\Delta^2 x}{2 - 2\Delta^2 x^2}. \end{aligned}$$

根据均值不等式, 当 k 为偶数时, 令 $x = (k-3)^{-\frac{1}{k-2}} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}}$,

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{x} &< \frac{1}{x} + \frac{k}{2} \Delta^{k-1} x^{k-3} + \frac{\Delta^2 x}{2 - 2\Delta^2 x^2} \\ &\leq (k-2)^{k-2} \sqrt[k-2]{\frac{1}{(k-3)x} \times \cdots \times \frac{1}{(k-3)x} \times \frac{k}{2} \Delta^{k-1} x^{k-3}} + \frac{\Delta^2 x}{2 - 2\Delta^2 x^2} \\ &\leq (k-2)(k-3)^{-\frac{k-3}{k-2}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta \leq \kappa \end{aligned}$$

当 k 为奇数时, 令 $x = (k-3)^{-\frac{1}{k-2}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{-\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}}$,

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{x} &< \frac{1}{x} + \frac{k+1}{2} \Delta^{k-1} x^{k-3} + \frac{\Delta^2 x}{2 - 2\Delta^2 x^2} \\ &\leq (k-2)^{k-2} \sqrt[k-2]{\frac{1}{(k-3)x} \times \cdots \times \frac{1}{(k-3)x} \times \frac{k+1}{2} \Delta^{k-1} x^{k-3}} + \frac{\Delta^2 x}{2 - 2\Delta^2 x^2} \\ &\leq (k-2)(k-3)^{-\frac{k-3}{k-2}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta \leq \kappa \end{aligned}$$

于是, 令 $x = (k-3)^{-\frac{1}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{-\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}}$, 我们有:

$$\frac{Q(x)}{x} < (k-2)(k-3)^{-\frac{k-3}{k-2}} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{\frac{1}{k-2}} \Delta^{\frac{k-1}{k-2}} + 3\Delta \leq \kappa.$$

因此, 至多有 $o(\kappa^t)$ 条可能的记录 R 。所以可能输出 (ψ, R) 的数目为 $o(\kappa^t)$, 因为它至多为 $(1+\kappa)^m \times o(\kappa^t)$ ($t \gg m$)。由此得到矛盾: 当 t 选择得足够大时, 可能输出的数目 $o(\kappa^t)$ 严格小于可能输入的数目 κ^t 。这就完成了定理 1 的证明。

基金项目

本工作得到两项研究基金(国家自然科学基金 NSFC 12031018、12201569)的资助。

参考文献

- [1] Grünbaum, B. (1973) Acyclic Colorings of Planar Graphs. *Israel Journal of Mathematics*, **14**, 390-408. <https://doi.org/10.1007/bf02764716>
- [2] Fiamčík, J. (1978) The Acyclic Chromatic Class of a Graph. *Mathematica Slovaca*, **28**, 139-145.
- [3] Alon, N., McDiarmid, C. and Reed, B. (1991) Acyclic Coloring of Graphs. *Random Structures & Algorithms*, **2**, 277-288. <https://doi.org/10.1002/rsa.3240020303>
- [4] Erdős, P. (1974) Problems and Results on 3-Chromatic Hypergraphs and Some Related Questions. https://www.researchgate.net/publication/265681632_Problems_and_results_on_3-chromatic_Hypergraphs_and_some_related_questions
- [5] Moser, R.A. and Tardos, G. (2010) A Constructive Proof of the General Lovász Local Lemma. *Journal of the ACM*, **57**, 1-15. <https://doi.org/10.1145/1667053.1667060>
- [6] Esperet, L. and Parreau, A. (2013) Acyclic Edge-Coloring Using Entropy Compression. *European Journal of Combinatorics*, **34**, 1019-1027. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2013.02.007>
- [7] Cai, J., Li, X. and Yan, G. (2017) Improved Upper Bound for the Degenerate and Star Chromatic Numbers of Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **34**, 441-452. <https://doi.org/10.1007/s10878-016-0076-y>
- [8] Andersen, L.D., Máčajová, E. and Mazák, J. (2012) Optimal Acyclic Edge-Coloring of Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **71**, 353-364. <https://doi.org/10.1002/jgt.20650>
- [9] Cranston, D.W. (2019) Acyclic Edge-Coloring of Planar Graphs: Δ Colors Suffice When Δ Is Large. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **33**, 614-628. <https://doi.org/10.1137/17m1158355>
- [10] Basavaraju, M., Hegde, S.M. and Kulamarva, S. (2023) Acyclic Chromatic Index of Chordless Graphs. *Discrete Mathematics*, **346**, Article ID: 113434. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113434>
- [11] Anto, N., Basavaraju, M., Hegde, S.M. and Kulamarva, S. (2024) Upper Bounds on the Acyclic Chromatic Index of Degenerate Graphs. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 113898. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.113898>
- [12] Anto, N., Basavaraju, M. and Kulamarva, S. (2026) Acyclic Edge Coloring of 3-Sparse Graphs. *Discrete Mathematics*, **349**, Article ID: 115135. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2026.115135>
- [13] Fouquet, J.L. and Jolivet, J.L. (1983) Strong Edge-Colorings of Graphs and Applications to Multi-k-Gons. *Ars Combinatoria*, **16A**, 141-150.
- [14] Erdős, P. and Nešetřil, J. (1989) *Irregularities of Partitions*. Springer.
- [15] Molloy, M. and Reed, B. (1997) A Bound on the Strong Chromatic Index of a Graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **69**, 103-109. <https://doi.org/10.1006/jctb.1997.1724>
- [16] Bonamy, M., Perrett, T. and Postle, L. (2022) Colouring Graphs with Sparse Neighbourhoods: Bounds and Applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **155**, 278-317. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2022.01.009>
- [17] Hurley, E., de Joannis de Verclos, R. and Kang, R.J. (2021) An Improved Procedure for Colouring Graphs of Bounded Local Density. In: *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, SIAM, 135-148.
- [18] Hou, J. and Wu, S. (2015) Acyclic Coloring of Graphs without Bichromatic Long Path. *Frontiers of Mathematics in China*, **10**, 1343-1354. <https://doi.org/10.1007/s11464-015-0497-4>
- [19] Flajolet, P. and Sedgewick, R. (2009) *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511801655>
- [20] Meir, A. and Moon, J.W. (1989) On an Asymptotic Method in Enumeration. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **51**, 77-89. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(89\)90078-2](https://doi.org/10.1016/0097-3165(89)90078-2)