

非对称对偶两步插值细分格式

郝金双, 王佳怡, 亓万锋*, 俞震果

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年9月13日; 录用日期: 2026年10月6日; 发布日期: 2026年10月15日

摘要

非对称对偶插值型细分是一类近年来受到关注的细分曲线构造方法, 其通过引入非对称掩模, 在保持插值特性的同时, 在相同性质下, 非对称具有更灵活的参数, 在复杂几何建模与形状控制中具有更高的灵活性。本文提出并构建了一类非对称的五重点对偶两步插值型细分格式, 该格式细分两次可实现插值效果, 进一步增强了形状调节的灵活性。文中分析了该格式的连续性、多项式再生性, 并给出数值实例, 以展示该格式在保持插值约束下调整曲线形态方面的灵活能力。

关键词

细分格式, 多项式再生性, 非对称细分格式

Asymmetric Dual Two-Step Interpolatory Subdivision Scheme

Jinshuang Hao, Jiayi Wang, Wanfeng Qi*, Zhenguo Yu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: September 13, 2026; accepted: October 6, 2026; published: October 15, 2026

Abstract

Asymmetric dual interpolatory subdivision is a class of curve construction methods that have attracted increasing attention in recent years. By introducing asymmetric masks, these methods preserve the interpolatory property while offering more flexible parameters under the same constraints, thereby providing greater flexibility in complex geometric modeling and shape control. In this paper, we propose and construct a class of asymmetric five-point quinary dual interpolatory subdivision schemes, Two-step subdivision of this scheme produces interpolation while improving shape-adjustment flexibility. We analyze the continuity and polynomial reproducibility of the

*通讯作者。

proposed scheme, and present numerical examples to demonstrate its capability of flexibly adjusting curve shapes while maintaining interpolatory constraints.

Keywords

Subdivision Scheme, Polynomial Reproduction, Asymmetric Subdivision Scheme

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在计算机辅助几何设计(CAGD)与计算机图形学领域,细分方法作为一种高效、稳定的工具,已广泛应用于曲线曲面设计、动画制作及多分辨率几何处理等任务中。其核心思想是通过对初始控制网格递归地应用加细规则,在极限过程中生成光滑的曲线或曲面。随着计算能力的提升与几何建模需求的复杂化,构造具有更高灵活性、更优光滑性及更强形状调控能力的细分格式,始终是该领域的重要研究方向。

根据拓扑规则的不同,细分格式可分为基本型细分[1]与对偶型细分[2]。基本型细分[3]在每一轮细分中保留上一层的全部控制顶点,并按既定规则更新其位置。对偶型细分其单步操作通过点分裂生成全新顶点,通常不直接满足插值条件。若需构造插值型格式,往往需要多步细分组合才能恢复对初始控制多边形的插值约束。进一步地,根据极限曲线(曲面)是否通过初始控制顶点,细分方法又可分为逼近型[4]与插值型。逼近型细分通常能获得更高的光滑性,但无法精确通过原始控制点;插值型细分则严格通过初始控制点,在几何约束保持方面具有显著优势。传统的插值型细分大多属于基本型细分,如经典的四点插值细分[5],其每一步都保留上一层的控制点,呈现“逐步插值”的特征。

近年来,对偶插值型细分取得了一定进展。两步插值格式是对偶型细分框架下为满足插值约束而设计的一类特定构造,但并非所有对偶型细分都具备插值属性。2019年,Romani [6]探讨了对偶插值型细分的构造方法,并提出了一类新的单变量平稳插值对偶细分格式。与单步插值不同,两步格式不要求每步都保留原始控制点,而是两步组合后才恢复插值关系,因此掩模系数的调整空间更大,有利于在光滑性、支撑长度等方面进行优化。同时,两步插值格式本身不强制掩模对称,为非对称设计提供了可能。然而,现有构造多局限于对称格式,虽能有效处理均匀参数化情形,但面对非均匀参数化时,对称结构的自由度有限,难以灵活调整局部形状。为此,本文引入非对称权重以拓展两步插值格式的适用范围。非对称结构在保持两步插值特性的前提下,可进一步提升形状调控的灵活性,尤其适用于非均匀控制网格。

在此基础上,考虑到目前对偶插值型细分的研究多集中于二重、三重或四重格式,五重细分格式相对较少,其掩模设计、连续性分析和形状调控仍有较大探索空间,本文提出了一类非对称五重点对偶插值型细分格式,并采用两步细分以增强形状调节的灵活性与收敛行为的可控性。与传统的单步插值细分不同,两步结构允许在偶数步保持严格插值、奇数步呈现逼近行为,从而在保持初始控制点约束的同时,获得更丰富的光滑过渡效果。文中系统分析了该格式的光滑性与多项式再生性,并通过数值实例验证了其在插值约束下对曲线形态的灵活调节能力,展示了对偶插值型细分在非对称、多步框架下的应用潜力。

2. 预备知识

给定初始控制点集 $f^0 = \{f_j^0 \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}\}$, 第 k 次细分后的控制点集记为 $f^k = \{f_j^k \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}\}$, 则 m

重细分格式 S 的细分规则可以表示为:

$$f_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-mj} f_j^k, i \in \mathbb{Z},$$

其中 $a = \{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 为该细分格式的掩模; $a(z) = \sum a_i z_i$ 称为该细分格式的 Laurent 生成函数。

引理 2.1: [7] 若 m 重细分格式 S 的 n 阶差分格式 S_n 的生成函数为

$$a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^{(n)} z^i = \left(\frac{mz^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{m-1}} \right)^n a(z).$$

该生成函数对应的 n 阶差分格式可用于判定细分格式的 C^n 连续性: 当 n 阶差分格式缩放算子在多次迭代后范数小于 1 时, n 阶差分随细分层数增加而指数衰减至零, 从而保证极限函数具有 n 阶连续导数。

引理 2.2: [8] 设 S 为一个 m 重细分格式, 其掩模为 $a = \{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$, 若存在差分格式 $S_j (j = 1, 2, \dots, n+1)$, 且满足对任意初始控制网格 f^0 , 有 $\frac{1}{m} S_{n+1} f^0 \rightarrow 0$, 则 m 重细分格式 S 是 C^n 连续的。

具体地, 若存在正整数 L 使得 $\left\| \left(\frac{1}{m} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} < 1$, 其中

$$\left\| \left(\frac{1}{m} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| a_{i+m^L j}^{[n+1, L]} \right|, i = 0, 1, \dots, m^L - 1 \right\},$$

且 $a^{[n+1, L]}(z) = \sum_{i=0}^{m^L-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i+m^L j}^{[n+1, L]} z^{i+m^L j} = \frac{1}{m^L} \prod_{j=0}^{L-1} a^{(n+1)}(z^{m^j})$, 则 S 是 C^n 连续的。

引理 2.3: [9] 多项式再生性是指细分格式的极限函数能够精确再生原始多项式函数, 而不产生逼近误差, 这是衡量细分格式逼近阶的重要指标。设细分格式 S_a 收敛, 其对应的参数平移量 $\tau = \frac{a'(1)}{m}$ 。则该格式能够再生 d 次多项式当且仅当对 $k = 0, \dots, d$, 有

$$a^k(1) = m \prod_{l=0}^{k-1} (\tau - i), a^{(k)}(\zeta_m^j) = 0, j = 1, \dots, m-1.$$

其中 $\zeta_m^j = \exp\left(\frac{2\pi I}{m} j\right)$, I 为虚数单位, $a^{(k)}(z)$ 表示生成函数 $a(z)$ 的 k 阶导数。参数 τ 决定了细分后网格相对于原始网格的平移量, 是影响多项式再生性的关键参数。

3. 一种新的非对称五重两步插值细分格式

本文构造了一个非对称的五重点两步插值的细分格式。相比于对称格式, 非对称结构提供了更多的自由度, 能够增强极限曲线的灵活性, 并提高其在复杂形状拟合中的适应性与稳定性。本文提出五重细分的加细规则如下:

$$\begin{cases} p_{5i}^{k+1} = a_{10} p_{i-2}^k + a_5 p_{i-1}^k + a_0 p_i^k + a_{-5} p_{i+1}^k + a_{-10} p_{i+2}^k, \\ p_{5i+1}^{k+1} = a_{11} p_{i-2}^k + a_6 p_{i-1}^k + a_1 p_i^k + a_{-4} p_{i+1}^k + a_{-9} p_{i+2}^k, \\ p_{5i+2}^{k+1} = a_7 p_{i-1}^k + a_2 p_i^k + a_{-3} p_{i+1}^k + a_{-8} p_{i+2}^k, \\ p_{5i+3}^{k+1} = a_8 p_{i-1}^k + a_3 p_i^k + a_{-2} p_{i+1}^k + a_{-7} p_{i+2}^k, \\ p_{5i+4}^{k+1} = a_9 p_{i-1}^k + a_4 p_i^k + a_{-1} p_{i+1}^k + a_{-6} p_{i+2}^k, \end{cases}$$

其中 $\{a_i\}_{i=-10}^{11}$ 为掩模, a_{-10} 到 a_{11} 依次为

$$\begin{aligned} & \frac{b_0}{125}, -\frac{91}{18000}, -\frac{b_0}{125}, -\frac{91}{2000}, -\frac{1}{16}, -\frac{119}{2000}, -\frac{57}{2000}, -\frac{4b_0}{125}, \\ & \frac{1057}{18000} + \frac{4b_0}{125}, \frac{663}{2000}, \frac{9}{16}, \frac{1547}{2000}, \frac{1881}{2000} + \frac{6b_0}{125}, \frac{1211}{1200}, -\frac{6b_0}{125}, \\ & \frac{1547}{2000}, \frac{9}{16}, \frac{663}{2000}, \frac{209}{2000}, -\frac{4b_0}{125}, -\frac{1337}{18000} + \frac{4b_0}{125}, -\frac{119}{2000}, \\ & -\frac{1}{16}, -\frac{91}{2000}, -\frac{33}{2000} + \frac{b_0}{125}, \frac{103}{9000}, -\frac{b_0}{125}. \end{aligned}$$

再根据引理 2.2, 五重五点细分格式的生成多项式为

$$\begin{aligned} a(z) = & -\frac{1}{18000z^{10}}(1+z+z^2+z^3+z^4)^4(91z+455z^2-1605z^3+1121z^4-206z^5-144b_0 \\ & +720zb_0-1440z^2b_0+1440z^3b_0-720z^4b_0+144z^5b_0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

两步插值细分来源于将同一个细分格式(3.1)先后两次应用于初始控制点集, 第一次加密后得到新点集, 第二次再对结果重复应用同一格式, 将这两步加密作用合并为一次整体细分, 得到 25 重细分格式(3.2), 其生成函数为

$$\begin{aligned} z^{-3}a(z)a(z^5) = & \frac{1}{324000000z^{63}}(1+z+z^2+z^3+z^4)^4(1+z^5+z^{10}+z^{15}+z^{20})^4 \\ & (91z+455z^2-1605z^3+1121z^4-206z^5-144b_0+720zb_0-1440z^2b_0 \\ & +1440z^3b_0-720z^4b_0+144z^5b_0)(91z^5+455z^{10}-1605z^{15}+1121z^{20} \\ & -206z^{25}-144b_0+720z^5b_0-1440z^{10}b_0+1440z^{15}b_0-720z^{20}b_0+144z^{25}b_0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

经计算, 该格式的掩模系数之和为 25, 其掩模的支撑区间为 $[-63, 63]$, 且中心系数 $a_0=1$, $a_{-50}=a_{-25}=a_{25}=a_{50}=0$, 因而(3.2)式是一个插值型细分格式, 可将细分格式(3.1)看作一个两步插值型格式, 且插值型细分格式(3.2)与细分格式(3.1)具有相同的整数阶光滑度、Hölder 指数、基函数。

3.1. 光滑性分析

在本节中根据引理 2.2 给出由上述细分格式生成的极限曲线的收敛性和光滑性的条件并证明。

定理 3.1: 当参数 b_0 满足 $-\frac{511}{72} < b_0 < \frac{307}{36}$, 细分格式是 C^0 连续的; 当 $-\frac{47}{432} < b_0 < \frac{665}{432}$, 细分格式是 C^1 连续的。

证明: 对原函数一阶差分细分序列分组求和得到

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{5}S_1 \right\|_{\infty} = & \max \left\{ \left| \frac{b_0}{125} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{1800} - \frac{19(1121-720b_0)}{1800} + \frac{103-72b_0}{500} + \frac{6b_0}{125} \right. \right. \\ & \left. - \frac{3(-107+96b_0)}{200} + \frac{(-91+288b_0)}{240} \right| + \left| \frac{107-96b_0}{1200} + \frac{103-72b_0}{1500} + \frac{-1121+720b_0}{6000} \right| \\ & \left| \frac{-91-720b_0}{1200} + \frac{107-96b_0}{200} + \frac{103-72b_0}{9000} + \frac{18b_0}{125} + \frac{-91+288b_0}{360} + \frac{-1121+720b_0}{6000} \right|, \\ & \left. \left| \frac{-91-720b_0}{18000} + \frac{3b_0}{125} \right| + \left| \frac{103-72b_0}{3000} + \frac{-1121+720b_0}{18000} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{1000} + \frac{107-96b_0}{120} \right| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{103-72b_0}{3000} + \frac{19b_0}{125} + \frac{-91+288b_0}{240} + \frac{-1121+720b_0}{3000} \Big| + \Big| \frac{-91-720b_0}{3000} + \frac{107-96b_0}{80} \\
& + \frac{3b_0}{125} - \frac{19(-103+72b_0)}{9000} + \frac{-91+288b_0}{360} + \frac{-1121+720b_0}{1000} \Big|, \Big| \frac{107-96b_0}{80} + \frac{103-72b_0}{1500} \\
& + \frac{18b_0}{125} + \frac{-91+288b_0}{200} + \frac{-1121+720b_0}{1800} - \frac{19(91+720b_0)}{18000} \Big|, \Big| \frac{-91-720b_0}{3000} + \frac{107-96b_0}{1200} \\
& + \frac{2b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{1200} \Big| + \Big| \frac{-91-720b_0}{18000} + \frac{107-96b_0}{200} + \frac{103-72b_0}{600} + \frac{-91+288b_0}{1200} \\
& + \frac{-1121+720b_0}{1800} \Big| + \Big| \frac{-91-720b_0}{1000} + \frac{103-72b_0}{900} + \frac{3b_0}{25} - \frac{3(-107+96b_0)}{200} + \frac{19(-91+288b_0)}{3600} \\
& + \frac{-1121+720b_0}{1200} \Big|, \Big| \frac{-91-720b_0}{1800} + \frac{107-96b_0}{400} + \frac{3b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{600} + \frac{-1121+720b_0}{18000} \Big| \\
& + \Big| \frac{107-96b_0}{400} + \frac{103-72b_0}{900} + \frac{-91+288b_0}{3600} + \frac{-1121+720b_0}{3000} \Big| + \Big| \frac{-91-720b_0}{1200} + \frac{103-72b_0}{600} \\
& + \frac{2b_0}{25} - \frac{19(-107+96b_0)}{1200} + \frac{-91+288b_0}{200} + \frac{-1121+720b_0}{1000} \Big|.
\end{aligned}$$

经 Mathematica 求解不等式 $\left\| \frac{1}{5} S_1 \right\|_{\infty} < 1$ 可得 $-\frac{511}{72} < b_0 < \frac{307}{36}$ 。由引理 2.3 知此时是 C^0 连续的, 即细分格式收敛。

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{5} S_2 \right\|_{\infty} &= \max \left\{ \left| \frac{b_0}{125} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{720} - \frac{107-96b_0}{80} + \frac{103-72b_0}{1800} + \frac{4b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{180} \right. \right. \\
&+ \left. \left| \frac{-1121+720b_0}{1800} \right| + \left| \frac{107-96b_0}{120} + \frac{103-72b_0}{450} + \frac{-91+288b_0}{720} + \frac{-1121+720b_0}{1200} \right|, \right. \\
&\left| \frac{-91-720b_0}{3600} + \frac{2b_0}{25} \right| + \left| \frac{107-96b_0}{240} + \frac{103-72b_0}{600} + \frac{-1121+720b_0}{1800} \right| + \left| \frac{103-72b_0}{900} \right. \\
&+ \left. \frac{107-96b_0}{60} + \frac{103-72b_0}{900} + \frac{3b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{144} + \frac{-1121+720b_0}{1200} \right|, \left| \frac{-91-720b_0}{1800} \right. \\
&\left. \frac{3b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{720} \right| + \left| \frac{103-72b_0}{900} + \frac{-1121+720b_0}{3600} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{1200} + \frac{107-96b_0}{48} \right. \\
&\left. \frac{103-72b_0}{600} + \frac{2b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{180} + \frac{-1121+720b_0}{900} \right|, \left| \frac{103-72b_0}{1800} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{1200} \right. \\
&+ \left. \frac{107-96b_0}{240} + \frac{4b_0}{25} + \frac{-91+288b_0}{360} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{1800} + \frac{107-96b_0}{60} + \frac{103-72b_0}{450} + \frac{b_0}{25} \right. \\
&+ \left. \frac{-91+288b_0}{240} + \frac{-1121+720b_0}{720} \right|, \left| \frac{-91-720b_0}{900} + \frac{107-96b_0}{120} + \frac{b_0}{5} + \frac{-91+288b_0}{240} \right. \\
&+ \left. \frac{-1121+720b_0}{3600} \right| + \left| \frac{-91-720b_0}{3600} + \frac{107-96b_0}{80} + \frac{103-72b_0}{360} + \frac{-91+288b_0}{360} \right. \\
&+ \left. \frac{-1121+720b_0}{900} \right|.
\end{aligned}$$

经 Mathematica 求解不等式 $\left\| \frac{1}{5} S_2 \right\|_{\infty} < 1$ 可得 $-\frac{47}{432} < b_0 < \frac{665}{432}$ 。由引理 2.3 知此时是 C^1 连续的, 即细分格式收敛。

3.2. 再生性分析

定理 3.2: 五重五点细分格式的多项式可以再生 3 次多项式。

证明: 根据引理 2.3, 对该细分生成多项式 $a(z)$ 求一阶导数, 并带入 $z=1$ 可得 $\tau = \frac{a'(1)}{5} = \frac{1}{2}$ 。计算得:

$$a(1)=5, \quad \frac{a'(1)}{5} = \frac{1}{2} = \tau, \quad \frac{a''(1)}{5} = -\frac{1}{4} = \tau(\tau-1), \quad \frac{a'''(1)}{5} = \frac{3}{8} = \tau(\tau-1)(\tau-2),$$

$$\frac{a^{(4)}(1)}{5} = -\frac{5999}{30} \neq -\frac{15}{16} = \tau(\tau-1)(\tau-2)(\tau-3)。$$

由此推出五重五点细分格式的多项式对任意参数均可以再生 3 次。

3.3. Hölder 指数

在本节中, 我们研究非对称五重五点细分格式极限函数的 Hölder 指数随参数变化规律, 采用 Matlab 程序包 `ttoolbox` 工具箱进行计算。在参数 $b_0 \in [-0.107, 1.507]$ 范围内, 以步长 0.00025 进行计算并绘制了 Hölder 指数随参数变化的曲线, 如图 1 所示。结果表明, Hölder 指数存在明显的峰值区域, 并非单调变化, 随着 b_0 的增加, Hölder 指数先上升后下降, 并在某一参数区间内达到最大值。

进一步对比第 3.1 节中关于细分格式连续性的理论结果, 图 2 以 0.00025 为步长, 在 0.475 到 0.965 区间内绘制了 Hölder 指数, Hölder 指数大于 2, 这意味着该细分格式在该区间内能够达到 C^2 连续, 这一结果弥补了解析方法的不足, 并为实际参数选取提供了依据。

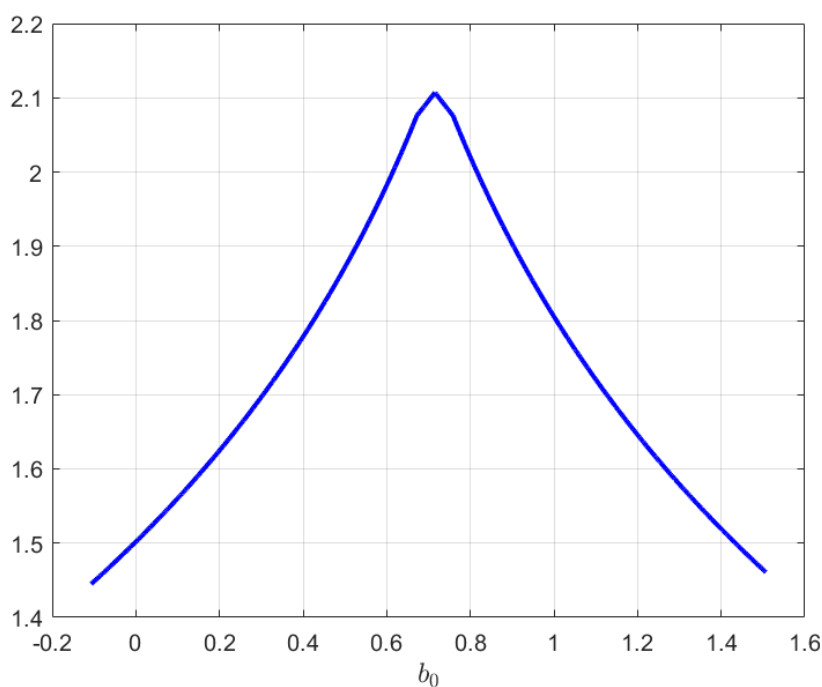


Figure 1. The Hölder exponent curve of the subdivision scheme (3.1) and (3.2)

图 1. 细分格式(3.1)与(3.2)的 Hölder 指数曲线

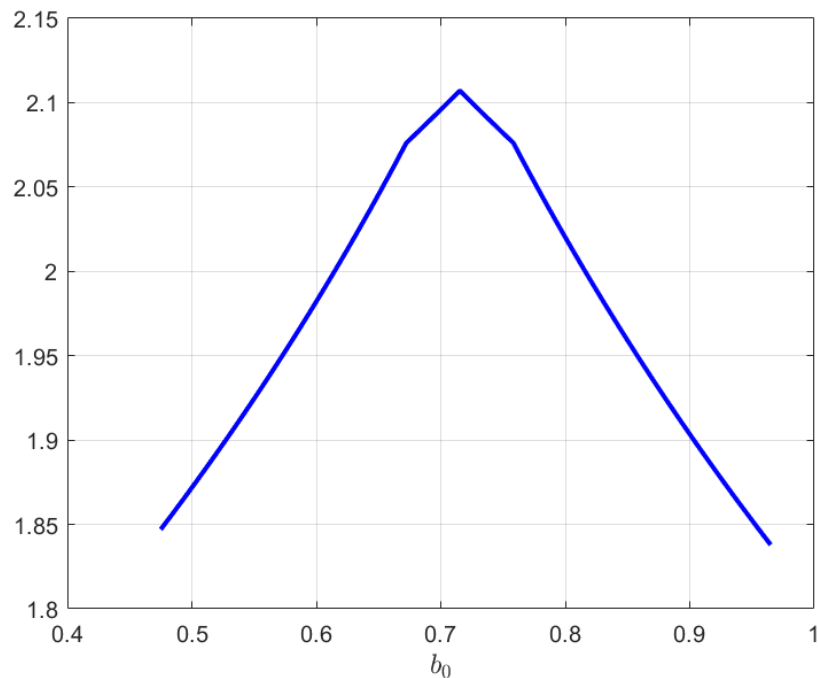


Figure 2. The curve near the maximum of the Hölder exponent of the subdivision scheme (3.1)

图 2. 细分格式(3.1) Hölder 指数极大值附近的曲线

注意到图 2 所示 Hölder 指数在参数区间 $b_0 \in [0.68, 0.75]$ 附近呈现近似线性, 下面分别对上升段(b_0 从 0.68 至 0.71, 步长 0.003)和下降段(b_0 从 0.72 至 0.75, 步长 0.003)进行了最小二乘直线拟合, 两段各包含 11 个数据点。

上升段拟合得直线方程为 $\text{Hölder}(b_0) = 0.7209 \cdot b_0 + 1.5913$, 决定系数 $R^2 = 0.999976$ 。拟合所用数据为 $b_0 = \{0.680, 0.683, 0.686, 0.689, 0.692, 0.695, 0.698, 0.701, 0.704, 0.707, 0.710\}$, 对应 Hölder 值为 $\{2.0816, 2.0837, 2.0859, 2.0880, 2.0901, 2.0923, 2.0945, 2.0966, 2.0988, 2.1010, 2.1032\}$ 。

下降段拟合直线方程为 $\text{Hölder}(b_0) = -0.7214 \cdot b_0 + 2.6230$, 决定系数 $R^2 = 0.999976$ 。拟合所用数据为 $b_0 = \{0.720, 0.723, 0.726, 0.729, 0.732, 0.735, 0.738, 0.741, 0.744, 0.747, 0.750\}$, 对应 Hölder 值为 $\{2.1036, 2.1014, 2.0992, 2.0971, 2.0949, 2.0927, 2.0905, 2.0884, 2.0863, 2.0841, 2.0820\}$ 。

两段拟合的决定系数 R^2 均接近于 1, Hölder 指数在该区间内几乎严格满足线性关系。

3.4. 基函数

该细分格式基函数的支撑区间为 $\left[\frac{-10}{4}, \frac{11}{4}\right]$, 图 3 给出了当 $b_0 = -0.1, 0.2, 0.1, 1, 0.7$ 时细分格式

(3.1)、(3.2) 所对应的基函数图象, 充分表明该细分格式具有良好的光滑性, 且参数对基函数形态具有可控的调节能力。

当参数 $b_0 = \frac{103}{144}$ 时, 细分格式 (3.1)、(3.2) 为对称格式。

为了进一步验证基函数的光滑性, 图 3 给出了一组参数下极限基函数的图象, 图 4 给出极限基函数的一阶导数图象。从图 4 可以看出, 当 $b_0 = -0.1, 0.2, 0.1, 1, 0.7$ 时, 基函数的一阶导数曲线均连续变化, 没有出现跳跃或尖点, 说明基函数的一阶导数存在且连续, 即该细分格式对应的基函数具有 C^1 光滑性。这与第 3.1 节中关于该细分格式 C^1 连续性的理论分析结果一致, 从数值角度进一步验证格式的光滑性。同

时，不同参数下的一阶导数曲线在局部幅值和形态上略有差异，也反映出参数 b_0 对基函数形态具有一定的调节能力。

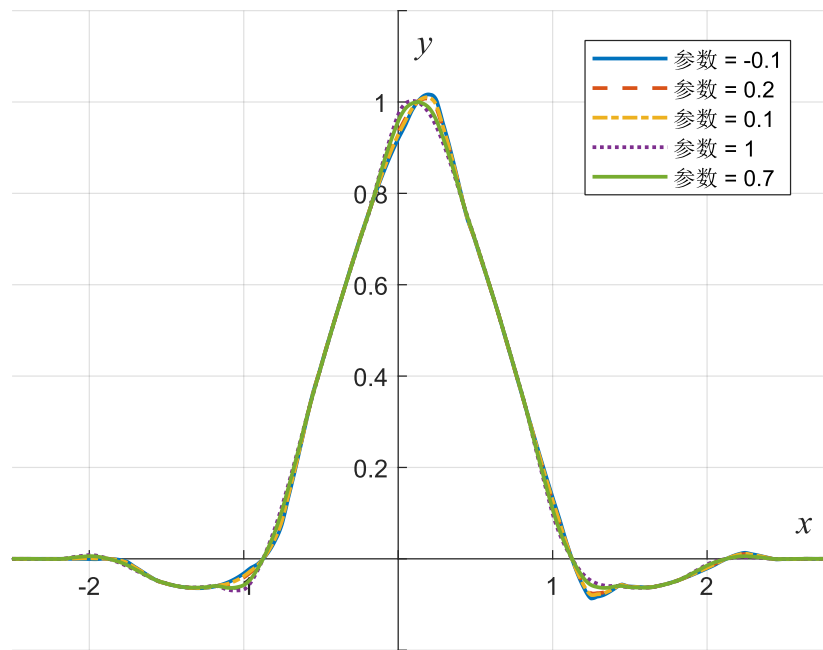


Figure 3. The limit basic function of the subdivision scheme (3.1) and (3.2) when $b_0 = -0.1, 0.2, 0.1, 1, 0.7$
图 3. 当 $b_0 = -0.1, 0.2, 0.1, 1, 0.7$ 时细分格式(3.1)和(3.2)的极限基函数

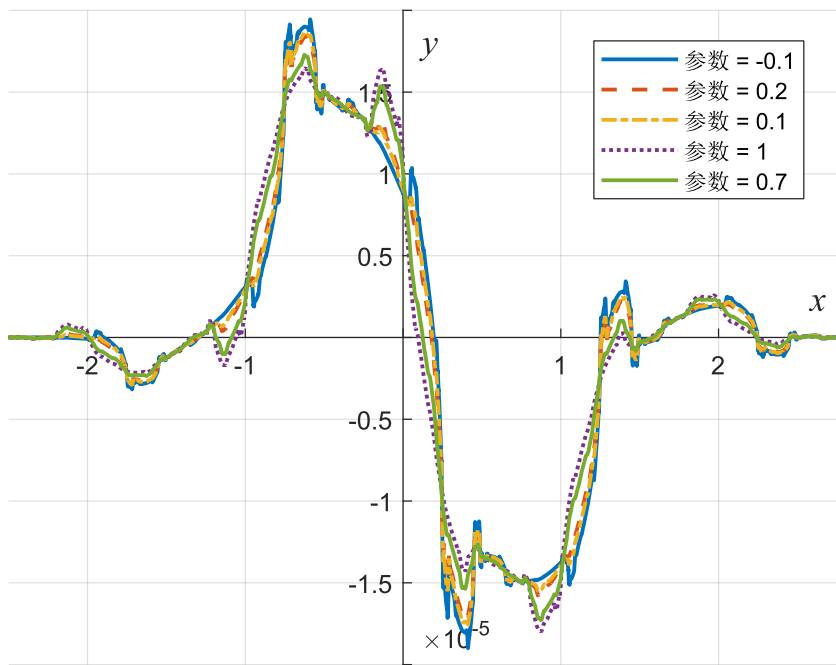


Figure 4. First derivative graph of the limit basic function when $b_0 = -0.1, 0.2, 0.1, 1, 0.7$
图 4. 当 $b_0 = -0.1, 0.2, 0.1, 1, 0.7$ 时极限基函数一阶导数图像

3.5. 数值算例

由于本文提出的细分格式具有偶数重结构, 是 2 步插值细分格式, 即在每两步细分中, 偶数次细分结果严格保持插值性, 而奇数次细分则呈现逼近行为。为直观验证这一结论, 图 5 左列给出了参数 $b_0 = 0.725$ 时, 初始控制多边形经 1、2、3、4 次细分后的极限曲线(其中蓝色虚线为初始控制多边形), 图 3 右列为对应的局部放大图。

观察图 5 整体曲线可以发现: 左侧细分 2、4 次的极限曲线严格通过初始控制点, 表明偶数次细分保持完全的插值性; 而奇数次, 第 1 次细分的曲线在局部放大图中明显偏离控制点, 不具备插值能力; 而第 3 次细分的曲线在全局视图下因收敛速度快而高度贴合控制多边形, 视觉上近乎插值, 但局部放大图仍可清晰看出其并未严格通过控制点。极限曲线图及其局部放大图共同验证了 2 步插值格式中偶数次细分插值、奇数次细分的特性

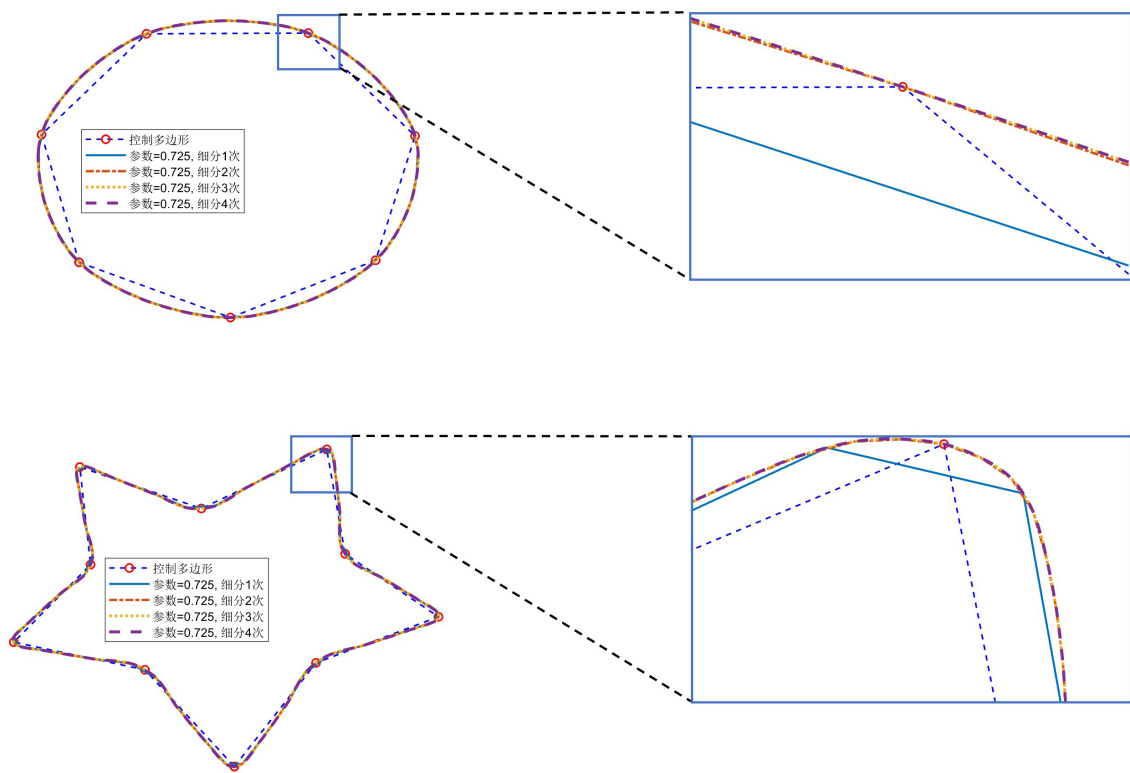


Figure 5. The control polygon is refined multiple times (1 to 4 times), where the blue dashed line represents the control polygon, and the blue solid line, red dashed line, yellow dash-dot line, and purple dashed line correspond to the curves subdivided 1, 2, 3, and 4 times, respectively, with parameter $b_0 = 0.725$

图 5. 对控制多边形加细多次(1~4 次), 其中, 蓝色虚线为控制多边形, 蓝色实线、红色虚线、黄色点划线、紫色虚线分别对应参数 $b_0 = 0.725$ 时细分 1、2、3、4 次的曲线

3.6. 对比实验

为进一步验证本文提出的非对称五重两步插值细分格式在光滑性与形状调控方面的优势, 将其与经典四点插值细分格式[1]进行对比, 其掩模为

$$a = \left\{ -w, 0, \frac{1}{2} + w, 1, \frac{1}{2} + w, 0, -w \right\}$$

在相同情况下, 本文五重细分格式的极限曲线在点集分布与光滑性上均表现出明显优势。一方面, 由于本文格式具有五重加细规则, 在相同的细分次数下, 其生成的节点数量远多于经典四点格式(二重加细), 点集分布更加密集, 这为复杂形状的精细刻画提供了更大的自由度。另一方面, 经典四点插值格式在 $w = \frac{1}{6}$ 时仅达到 C^1 连续, 而本文格式在 $b_0 = 0.725$ 时 Hölder 指数约为 2.1, 达到 C^2 连续。因此, 本文格式不仅点集更密, 且极限曲线具有更高的整体光滑度, 在保持三次多项式再生性的同时, 实现了更优的几何连续性。

参考文献

- [1] Dyn, N., Levin, D. and Gregory, J.A. (1987) A 4-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design. *Computer Aided Geometric Design*, **4**, 257-268. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(87\)90001-x](https://doi.org/10.1016/0167-8396(87)90001-x)
- [2] Catmull, E. and Clark, J. (1978) Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer-Aided Design*, **10**, 350-355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)
- [3] Loop, C. (1987) Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles. Ph.D. Thesis, University of Utah.
- [4] Doo, D. and Sabin, M. (1978) Behaviour of Recursive Division Surfaces near Extraordinary Points. *Computer-Aided Design*, **10**, 356-360. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90111-2](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90111-2)
- [5] Deng, C., Xu, H., Ma, W. and Li, Y. (2019) Repeated Local Operations and Associated Interpolation Properties of Dual 2n-Point Subdivision Schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **349**, 344-353. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.09.030>
- [6] Romani, L. (2019) Interpolating M-Refinable Functions with Compact Support: The Second Generation Class. *Applied Mathematics and Computation*, **361**, 735-746. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.018>
- [7] Aspert, N. (2003) Non-Linear Subdivision of Univariate Signals and Discrete Surfaces. Swiss Federal Institute of Technology in Lausanne.
- [8] Han, B. (2024) Interpolating Refinable Functions and n_s -Step Interpolatory Subdivision Schemes. *Advances in Computational Mathematics*, **50**, Article No. 98. <https://doi.org/10.1007/s10444-024-10192-x>
- [9] Conti, C. and Hormann, K. (2011) Polynomial Reproduction for Univariate Subdivision Schemes of Any Arity. *Journal of Approximation Theory*, **163**, 413-437. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2010.11.002>