

带有时变源项的Chaplygin气体Aw-Rascle交通流模型的阴影波解

叶关金, 李永会*, 孙 圉

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2026年9月17日; 录用日期: 2026年10月11日; 发布日期: 2026年10月20日

摘 要

研究带有时变源项的Chaplygin气体Aw-Rascle交通流模型的阴影波解。由于源项具有时变性, 系统失去自相似性, 波结构较齐次及常系数情形更为复杂, 对阴影波方法的适用性提出了新的要求。本文构造了该模型的超压缩阴影波解, 利用超压缩条件建立了其弱唯一性, 并证明该解在分布意义下收敛于系统自身的狄拉克激波解。该结果为时变源项作用下交通流中奇异波的形成提供了理论依据, 同时拓展了阴影波方法在非齐次系统中的应用范围。

关键词

Aw-Rascle交通流, 时变源项, Chaplygin气体, 狄拉克激波, 阴影波

Shadow Wave Solution for the Chaplygin Gas Aw-Rascle Traffic Flow Model with Time-Dependent Source Term

Guanjin Ye, Yonghui Li*, Quan Sun

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: September 17, 2026; accepted: October 11, 2026; published: October 20, 2026

Abstract

This paper investigates the shadow wave solution for the Chaplygin gas Aw-Rascle traffic flow model with a time-dependent source term. Due to the time dependence of the source term, the system loses

*通讯作者。

文章引用: 叶关金, 李永会, 孙圉. 带有时变源项的 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流模型的阴影波解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 202-211. DOI: 10.12677/aam.2026.1510408

self-similarity and the wave structure becomes more complex than in the homogeneous and constant-coefficient source cases, which poses new challenges for the applicability of the shadow wave method. In this work, we construct the overcompressive shadow wave solution for this model, establish its weak uniqueness under the overcompressibility condition, and prove that this solution converges to the delta-shock wave solution of the system itself in the distributional sense. The results provide a theoretical foundation for the formation of singular waves in traffic flows under time-dependent source terms, and also extend the applicability of the shadow wave method to non-homogeneous hyperbolic conservation law systems.

Keywords

Aw-Rascle Traffic Flow, Time-Dependent Source, Chaplygin Gas, Delta Shock Wave, Shadow Wave

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

考虑带有时变源项的 Aw-Rascle 交通流模型

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ \left(\rho(u + p(\rho)) \right)_t + \left(\rho u(u + p(\rho)) \right)_x = f(t)\rho, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u \geq 0$ 表示车辆的实际速度, $\rho \geq 0$ 为交通密度, $p = p(\rho)$ 为交通压力, 用以描述司机的应急反应。 $f(t)$ 为 $t \geq 0$ 时的连续函数, 旨在刻画外部因素对交通流的持续影响, 从而描述复杂环境下的交通状态。

当 $f(t) = 0$ 时, 模型(1)由 Aw 和 Rascle [1] 在 2000 年提出, 是分析交通拥堵现象的重要基础。本文考虑如下带负压的 Chaplygin 气体压力

$$p(\rho) = -\rho^{-1}. \quad (2)$$

该状态方程由 Chaplygin [2], Tsien [3] 和 von Karman [4] 引入并且用来研究机翼升力问题。2013 年, Pan 和 Han [5] 考虑了齐次 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流模型(1)和(2)的黎曼问题, 在解中获得了狄拉克激波。基于此, 他们将此模型应用于实际交通情境, 借助狄拉克激波对严重交通堵塞的形成给出了合理的数学解释。事实上, Chaplygin 负压交通流以等效宏观吸引力(即负压)来刻画车流的抱团聚集行为。从数学结构上看, 该交通压力会促使狄拉克激波形成: 此时系统仍保持双曲性, 两个特征场发生共振, 所有右侧特征线与左侧特征线完全重叠, 从而形成狄拉克激波。就实际交通情形而言, 这意味着后方车辆的信息传播速度远快于前方车辆, 进而导致严重堵塞。

尽管齐次交通流及其黎曼问题已被广泛研究, 但带有各种源项的非齐次模型目前仍研究较少。有鉴于此, 本文将状态方程(2)代入系统(1), 进而考虑如下带时变源项的 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流模型

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - u)_x = f(t)\rho. \end{cases} \quad (3)$$

当 $f(t) = \beta$ (β 为常数)时, 外力项 $\beta\rho$ 称为类库仑摩擦项。针对此类源项, Shen [6] 求解了零压流模

型的黎曼问题,构造了包含狄拉克激波的黎曼解,并讨论了拉东测度初值问题。关于交通流模型(1)带有常系数源项的相关研究可参见[7][8]等。而对于带时变源项的交通流模型(1),Cui等[9]考虑了广义 Chaplygin 气体的流扰动问题,并分析了解的消失流扰动极限。

鉴于狄拉克激波出现在(3)的黎曼解中,本文进一步引入 Nedeljkov [10]提出的阴影波理论,以期对该奇异波进行系统研究。阴影波是一种基于波前追踪算法构造的近似解,表现为依赖于小参数 ε 的分片常数网。其核心思想是通过 ε 来扰动波的传播速度,使左右状态由激波相连,其中中间状态的某些分量与 ε^{-1} 同阶。目前,阴影波方法已被应用于多个双曲守恒律系统,如 Daw 和 Nedeljkov [11]构造了带有类库仑摩擦项零压流模型的阴影波解;Nedeljkov [12]探讨了等熵流 Chaplygin 气体方程组的高阶阴影波;Sun [13]研究了色谱方程的阴影波解;贾艺菲等[14]则给出了相对论 Chaplygin 气体欧拉方程组的阴影波解。

本文首先求解系统(3)带有分片常初值

$$(\rho, u)(0, x) = \begin{cases} (\rho_-, u_-), & x < 0, \\ (\rho_+, u_+), & x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

的黎曼问题,其中 $\rho_{\pm} > 0, u_{\pm} \geq 0$ 为任意常数,获得了包含接触间断和狄拉克激波的黎曼解,并在适当的广义 Rankine-Hugoniot 条件和超压缩熵条件下确定了狄拉克激波解的存在唯一性;其次,建立系统(3)阴影波解的存在性与弱唯一性,并在分布意义下证明其收敛于系统的狄拉克激波解。

2. 基本波解和狄拉克激波解

本节考虑黎曼问题(3)和(4)。其求解过程可借鉴[6]-[8],所得结果亦可视为[9]中的特例,故此处不再赘述重复的推导步骤,而直接陈述最终结果。

当 $u_+ > u_- - \rho_-^{-1}$, (3)和(4)的黎曼解包含常状态和介于两接触间断(记为 J)之间的非真空状态,即:

$$(\rho_-, u_- + G(t)) + J_1 + (\rho_*, v_* + G(t)) + J_2 + (\rho_+, u_+ + G(t)),$$

其中 $G(t) = \int_0^t f(s) ds$, 中间状态满足 $\rho_*^{-1} = u_+ - u_- + \rho_-^{-1}$, $v_* = u_+$, 且

$$x_1(t) = (u_- - \rho_-^{-1})t + \int_0^t G(\tau) d\tau, \quad x_2(t) = u_+t + \int_0^t G(\tau) d\tau$$

分别表示接触间断 J_1 和 J_2 的位置。

当 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$, 需构造狄拉克激波解。记 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。给出如下定义:

定义 1 以光滑曲线 $S = \{(t(s), x(s)) | a < s < b\}$ 为支集的二维加权 δ -函数 $w(s)\delta_s$ 定义为

$$\langle w(s)\delta_s, \phi(t(s), x(s)) \rangle = \int_a^b w(s)\phi(t(s), x(s)) ds,$$

其中 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ 为任意测试函数。

定义 2 称 (ρ, u) 为系统(3)和(4)在分布意义下的解,若存在光滑曲线 S 和函数 $w(t)$, 使得 $\rho = \bar{\rho}(x, t) + w(t)\delta_s$, $u = \bar{u}(x, t)$, 其中 $\bar{\rho}, \bar{u} \in L^\infty((\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+); \mathbb{R})$, $w(t) \in C_0^\infty(S)$, $u|_S = u_s(t)$, 且对于任意测试函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ 成立

$$\begin{cases} \langle \rho, \phi_t \rangle + \langle \rho u, \phi_x \rangle = 0, \\ \langle \rho u, \phi_t \rangle + \langle \rho u^2 - u, \phi_x \rangle + \langle f(t)\rho, \phi \rangle = 0, \end{cases}$$

其中 $\langle \rho u^i, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\rho} \bar{u}^i \phi dx dt + \langle w(t)u_s^i(t)\delta_s, \phi \rangle$, $i = 0, 1, 2$ 。

借助定义 1 和定义 2, 当 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$ 时, 寻求(3)和(4)形如

$$(\rho, u)_\delta(x, t) = \begin{cases} (\rho_-, u_- + G(t)), & x < x(t), \\ (w(t)\delta(x - x(t)), u_\delta(t)), & x = x(t), \\ (\rho_+, u_+ + G(t)), & x > x(t) \end{cases} \quad (5)$$

的狄拉克激波解, 其中 v_δ 为常数, 它是变量 v 在狄拉克激波曲线上的取值, $\sigma(t) = x'(t)$, $w(t)$ 以及 $x = x(t)$ 分别表示狄拉克激波的速度、权重和位置。此外, 当 $x < x(t)$ 时, ρ^{-1} 取 ρ_-^{-1} ; 当 $x > x(t)$ 时, ρ^{-1} 取 ρ_+^{-1} ; 当 $x = x(t)$ 时, ρ^{-1} 取 0。

可以证明, 狄拉克激波解(5)满足广义 Rankine-Hugoniot 条件

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma(t) = u_\delta(t), \\ \frac{dw(t)}{dt} = \sigma(t)[\rho] - [\rho u], \\ \frac{d(w(t)u_\delta(t))}{dt} = \sigma(t)[\rho u] - [\rho u^2 - u] + f(t)w(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中 $[\rho u^i] = \rho_+(u_+ + G(t))^i - \rho_-(u_- + G(t))^i$, $i = 0, 1, 2$ 。

此外, 为保证解的唯一性, 狄拉克激波解(5)还需满足超压缩熵条件

$$u_+ + G(t) \leq \sigma(t) \leq u_- + G(t) - \rho_-^{-1}. \quad (7)$$

在熵条件(7)的限制下求解(6)带有初值 $x(0) = 0$ 和 $w(0) = 0$ 的初值问题可知: 当 $[\rho] = 0$ 时, 满足熵条件的狄拉克激波解为

$$\begin{cases} x(t) = v_\delta t + \int_0^t G(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = u_\delta(t) = v_\delta + G(t), \\ v_\delta = \frac{1}{2}(u_+ + u_- - \rho_-^{-1}), \quad w(t) = (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)t. \end{cases} \quad (8)$$

当 $[\rho] \neq 0$ 时, 满足熵条件的狄拉克激波解为

$$\begin{cases} x(t) = v_\delta t + \int_0^t G(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = u_\delta(t) = v_\delta + G(t), \quad w(t) = w_0 t, \\ v_\delta = \frac{\rho_+ u_+ - \rho_- u_- + w_0}{\rho_+ - \rho_-}, \quad w_0 = \sqrt{\rho_+ \rho_- (u_+ - u_-)((u_+ - u_-) - (\rho_+^{-1} - \rho_-^{-1}))}. \end{cases} \quad (9)$$

3. 阴影波解

本节考虑当 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$ 时系统(3)和(4)形如

$$(\rho, u)_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_-, u_- + G(t)), & x < c(t) - \varepsilon t, \\ (\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), & c(t) - \varepsilon t < x < c(t) + \varepsilon t, \\ (\rho_+, u_+ + G(t)), & x > c(t) + \varepsilon t \end{cases} \quad (10)$$

的阴影波解, 其中 $x = c(t) \mp \varepsilon t$ 分别为接触间断 J_1^ε 与 J_2^ε 的位置。

为保证阴影波解的弱唯一性, 引入如下相容性条件。

定义 3 称形如式(10)的阴影波解是超压缩的, 若下述不等式成立:

$$u_+ + G(t) \leq c'(t) \leq u_- - \rho_-^{-1} + G(t). \quad (11)$$

超压缩熵条件(11)表明, 阴影波两侧的特征线均向内进入, 从而保证了解的唯一性。此外, 鉴于在激

波线上 ρ 具有奇异性, 而 u 不具有奇异性, 故给出如下假设(见[10], [14]):

假设 1 对于某个固定时间 $t > 0$, 假设阴影波解(10)中的 $\rho_\varepsilon(t)$ 和 $u_\varepsilon(t)$ 满足 $\rho_\varepsilon(t) \sim \varepsilon^{-1}$, $u_\varepsilon(t) \sim$ 常数及 $u'_\varepsilon(t) \sim$ 常数, 即对于固定时间 $t > 0$, 存在常数 $M_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) 使得 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(t)/\varepsilon^{-1} = M_1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = M_2$ 及 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u'_\varepsilon(t) = M_3$ 成立。

定理 1 假设 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$ 。若黎曼问题(3)和(4)具有形如(10)的超压缩阴影波解, 则: 当 $[\rho] = 0$ 时, $(\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$ 满足

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}(u_- - u_+)\rho_-, \quad u_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_- - \rho_-^{-1}) + G(t); \quad (12)$$

而当 $[\rho] \neq 0$ 时, $(\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$ 满足

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\rho_+\rho_-\cdot\mu}, \quad u_\varepsilon(t) = \frac{1}{[\rho]}\left(\rho_+u_+ - \rho_-u_- + \sqrt{\rho_+\rho_-\cdot\mu}\right) + G(t), \quad (13)$$

其中 $\mu = (u_+ - u_-)(u_+ - u_- - \rho_+^{-1} + \rho_-^{-1})$ 。

证明: 任取测试函数 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 阴影波解(10)在 Schwartz 广义函数意义下满足弱解定义:

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \rho_t + (\rho u)_x, \varphi \rangle = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\varepsilon) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle (\rho u)_t + (\rho u^2 - u)_x - f(t)\rho, \varphi \rangle = 0. \end{cases} \quad (14)$$

为方便起见, 定义 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数 $x = h_\pm(t) = c(t) \pm \varepsilon t$, 并记其反函数为 $t = h_\pm^{-1}(x)$ 。先考虑 $I_2(\varepsilon)$, 有:

$$I_2(\varepsilon) := K_1^\varepsilon + K_2^\varepsilon + K_3^\varepsilon, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1^\varepsilon &= -\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{h_-(t)} \left\{ \rho_-(u_- + G(t))\varphi_t + \left(\rho_-(u_- + G(t))^2 - (u_- + G(t)) \right) \varphi_x \right\} dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{h_-(t)} \rho_- f(t) \varphi dx dt, \\ K_2^\varepsilon &= -\int_0^{+\infty} \int_{h_+(t)}^{h_-(t)} \left\{ \rho_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t)\varphi_t + \left(\rho_\varepsilon(t)u_\varepsilon^2(t) - u_\varepsilon(t) \right) \varphi_x + \rho_\varepsilon(t)f(t)\varphi \right\} dx dt, \\ K_3^\varepsilon &= -\int_0^{+\infty} \int_{h_+(t)}^{+\infty} \left\{ \rho_+(u_+ + G(t))\varphi_t + \left(\rho_+(u_+ + G(t))^2 - (u_+ + G(t)) \right) \varphi_x \right\} dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{h_+(t)}^{+\infty} \rho_+ f(t) \varphi dx dt. \end{aligned}$$

对于 K_1^ε , 交换积分次序得:

$$\begin{aligned} K_1^\varepsilon &= -\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{h_-(t)} \left(\rho_-(u_- + G(t))\varphi \right)_t dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{h_-(t)} \rho_- f(t) \varphi dx dt \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \left(\rho_-(u_- + G(t))^2 - (u_- + G(t)) \right) \varphi(x, t) \Big|_{x=-\infty}^{x=h_-(t)} dt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{h_-(t)} \rho_- f(t) \varphi(x, t) dx dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} \left(\rho_-(u_- + G(t))\varphi \right)_t dt dx - \int_0^{+\infty} \int_{h_+^{-1}(x)}^{+\infty} \left(\rho_-(u_- + G(t))\varphi \right)_t dt dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \left(\rho_-(u_- + G(t))^2 - (u_- + G(t)) \right) \varphi(h_-(t), t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ \rho_-(u_- + G(t))(c'(t) - \varepsilon) - \left(\rho_-(u_- + G(t))^2 - (u_- + G(t)) \right) \right\} \varphi(c(t) - \varepsilon t, t) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

同理可得:

$$K_3^\varepsilon = \int_0^{+\infty} \left\{ -\rho_+(u_+ + G(t))(c'(t) + \varepsilon) + \left(\rho_+(u_+ + G(t))^2 - (u_+ + G(t)) \right) \right\} \varphi(c(t) + \varepsilon t, t) dt. \quad (17)$$

而对于 K_2^ε , 我们有

$$\begin{aligned}
 K_2^\varepsilon &= -\int_0^{+\infty} \int_{h_+^{-1}(t)}^{h_-^{-1}(t)} \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) \varphi_t dx - \int_0^{+\infty} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon^2(t) - u_\varepsilon(t)) \varphi(x, t) \Big|_{x=h_-(t)}^{x=h_+(t)} dt \\
 &\quad - \int_0^{+\infty} \int_{h_-(t)}^{h_+(t)} \rho_\varepsilon(t) f(t) \varphi(x, t) dx dt \\
 &= -\int_0^{+\infty} \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) \varphi(x, t) \Big|_{t=h_+^{-1}(x)}^{t=h_-^{-1}(x)} dx + \int_0^{+\infty} \int_{h_+^{-1}(x)}^{h_-^{-1}(x)} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t))_t \varphi(x, t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^{+\infty} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon^2(t) - u_\varepsilon(t)) (\varphi(h_+(t), t) - \varphi(h_-(t), t)) dt - \int_0^{+\infty} \int_{h_-(t)}^{h_+(t)} \rho_\varepsilon(t) f(t) \varphi(x, t) dx dt \quad (18) \\
 &= -\int_0^{+\infty} \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) \varphi(c(t) - \varepsilon t, t) (c'(t) - \varepsilon) dt + \int_0^{+\infty} \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) \varphi(c(t) + \varepsilon t, t) (c'(t) + \varepsilon) dt \\
 &\quad - \int_0^{+\infty} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon^2(t) - u_\varepsilon(t)) (\varphi(c(t) + \varepsilon t, t) - \varphi(c(t) - \varepsilon t, t)) dt \\
 &\quad + \int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\varepsilon t}^{c(t)+\varepsilon t} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t))_t \varphi(x, t) dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\varepsilon t}^{c(t)+\varepsilon t} \rho_\varepsilon(t) f(t) \varphi(x, t) dx dt
 \end{aligned}$$

将 $\varphi(x, t)$ 在 $x = c(t)$ 处展开, 得:

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = \varphi(c(t), t) + (x - c(t)) \varphi_x(c(t), t) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi(c(t) + \varepsilon t, t) = \varphi(c(t), t) + \varepsilon t \varphi_x(c(t), t) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi(c(t) - \varepsilon t, t) = \varphi(c(t), t) - \varepsilon t \varphi_x(c(t), t) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (19)$$

于是, (18)中的最后两项可化简为

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\varepsilon t}^{c(t)+\varepsilon t} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t))_t \varphi(x, t) dx dt \approx \int_0^{+\infty} 2\varepsilon t (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t))_t \varphi(c(t), t) dt, \\ \int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\varepsilon t}^{c(t)+\varepsilon t} \rho_\varepsilon(t) f(t) \varphi(x, t) dx dt \approx \int_0^{+\infty} 2\varepsilon t \rho_\varepsilon(t) f(t) \varphi(c(t), t) dt. \end{cases} \quad (20)$$

此处及下文中符号“ $\approx$ ”表示 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限。从而, 结合(15)~(20), 有

$$\begin{aligned}
 I_2(\varepsilon) &\approx \int_0^{+\infty} \left\{ \rho_-(u_- + G(t)) c'(t) - (\rho_-(u_- + G(t))^2 - (u_- + G(t))) \right\} \varphi(c(t), t) dt \\
 &\quad - \int_0^{+\infty} \left\{ \rho_+(u_+ + G(t)) c'(t) + (\rho_+(u_+ + G(t))^2 - (u_+ + G(t))) \right\} \varphi(c(t), t) dt \\
 &\quad + \int_0^{+\infty} \{ 2(\varepsilon \rho_\varepsilon(t) \cdot t u_\varepsilon(t))_t - 2tf(t) \cdot \varepsilon \rho_\varepsilon(t) \} \varphi(c(t), t) dt \\
 &\quad + \int_0^{+\infty} \{ 2c'(t) \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) - (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon^2(t) - u_\varepsilon(t)) \} \varepsilon t \varphi_x(c(t), t) dt. \quad (21)
 \end{aligned}$$

使用完全类似的讨论可知, 对于 $I_1(\varepsilon)$, 有:

$$\begin{aligned}
 I_1(\varepsilon) &\approx \int_0^{+\infty} (\rho_- c'(t) - \rho_-(u_- + G(t)) + \rho_+(u_+ + G(t)) - \rho_+ c'(t)) \varphi(c(t), t) dt \\
 &\quad + \int_0^{+\infty} 2(\varepsilon \rho_\varepsilon(t) \cdot t)_t \varphi(c(t), t) dt + \int_0^{+\infty} 2\varepsilon \rho_\varepsilon(t) (c'(t) - u_\varepsilon(t)) \cdot t \varphi_x(c(t), t) dt. \quad (22)
 \end{aligned}$$

根据 $I_i(\varepsilon) \approx 0$ ($i=1, 2$) 及假设 1, 由(22)和(21)分别可得

$$\begin{cases} 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \rho_\varepsilon(t) \cdot t)_t = c'(t) [\rho] - [\rho u], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon(t) (c'(t) - u_\varepsilon(t)) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) (c'(t) - u_\varepsilon(t)) = 0, \\ 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \rho_\varepsilon(t) \cdot t u_\varepsilon(t))_t - 2tf(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon(t) = c'(t) [\rho u] - [\rho u^2 - u]. \end{cases} \quad (24)$$

令 $\zeta(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon(t)$, $u_s(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$, 则(23)和(24)可分别表示为

$$\begin{cases} (t\zeta(t))_t = \frac{1}{2}([\rho](c'(t) - G(t)) - (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)), \\ u_s(t) = c'(t), \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} (t\zeta(t)u_s(t))_t - tf(t)\zeta(t) = \frac{1}{2}(c'(t)[\rho u] - [\rho u^2 - u]), \\ \zeta(t)u_s(t)(c'(t) - u_s(t)) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

注意到初始数据 $\rho|_{t=0} = \rho_\pm (\pm x > 0)$ 不包含 δ 函数, 故 $\zeta(0) = 0$ 且 $c(0) = 0$ 。因此, 对(25)的第一个方程从 0 到 t 积分得

$$t\zeta(t) = \frac{1}{2}[\rho]\left(c(t) - \int_0^t G(\tau) d\tau\right) - \frac{1}{2}(\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)t. \quad (27)$$

将(27)代入(26)的第一个方程可得

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[[\rho]\left(c(t) - \int_0^t G(\tau) d\tau\right) - (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)t \right] (c'(t) - G(t)) \right\}_t \\ & + ([\rho](c'(t) - G(t)) - (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)) \cdot G(t) \\ & = (c'(t) - G(t))((\rho_+ u_+ - \rho_- u_-) + [\rho]G(t)) \\ & - ((\rho_+ u_+^2 - \rho_- u_-^2) + (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)G(t) - (u_+ - u_-)). \end{aligned} \quad (28)$$

令 $k(t) = c(t) - \int_0^t G(\tau) d\tau$, 则(28)可表示为

$$\{k'(t)([\rho]k(t) - (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)t)\}_t - (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)k'(t) + (\rho_+ u_+^2 - \rho_- u_-^2) - (u_+ - u_-) = 0.$$

该式从 0 到 t 关于变量 t 积分两次可得

$$\frac{1}{2}[\rho]k^2(t) - (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)tk(t) + \frac{1}{2}(\rho_+ u_+^2 - \rho_- u_-^2 - (u_+ - u_-))t^2 = 0. \quad (29)$$

情形 1 若 $[\rho] = 0$, 则由(29)可得 $k(t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_- - \rho_-^{-1})t$, 从而阴影波的速度为

$$c(t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_- - \rho_-^{-1})t + \int_0^t G(\tau) d\tau.$$

又因为 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$, 故

$$u_+ + G(t) - c'(t) = \frac{1}{2}(u_+ - u_- + \rho_-^{-1}) \leq 0, \quad u_- + G(t) - \rho_-^{-1} - c'(t) = \frac{1}{2}(u_- - \rho_-^{-1} - u_+) \geq 0.$$

这表明 $c'(t)$ 满足超压缩条件(11)。结合(27)和(25)的第二个方程有

$$\zeta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\rho_-(u_- - u_+), \quad u_s(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = c'(t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_- - \rho_-^{-1}) + G(t).$$

因此, 当 $[\rho] = 0$ 时, 阴影波解(10)中的 $\rho_\varepsilon(t)$ 和 $u_\varepsilon(t)$ 可取为如(12)所示。

情形 2 若 $[\rho] \neq 0$, 则方程(29)是关于 $k(t)$ 的一元二次方程。由于 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$, 故(29)的判别式 $\Delta = \mu\rho_+\rho_-t^2 > 0$, 其中常数 μ 同定理 1 中所示。由此可知方程(29)有两个不同的实根

$$k(t) = \frac{1}{[\rho]}(\rho_+ u_+ - \rho_- u_- \pm \sqrt{\mu\rho_+\rho_-})t,$$

则

$$c(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ u_+ - \rho_- u_- \pm \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right) t + \int_0^t G(\tau) d\tau.$$

下面验证超压缩不等式(11)成立, 分以下两种情形:

情形 2.1 当 $c(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ u_+ - \rho_- u_- - \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right) t + \int_0^t G(\tau) d\tau$ 时, 不难验证:

$$\begin{cases} u_- + G(t) - \rho_-^{-1} - c'(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ \left((u_- - \rho_-^{-1}) - u_+ + \rho_+^{-1} \right) + \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right), \\ u_+ + G(t) - c'(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_- (u_- - u_+) + \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right). \end{cases}$$

结合 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$ 可知, 当 $[\rho] < 0$ 时 $c'(t) > u_- + G(t) - \rho_-^{-1}$; 而当 $[\rho] > 0$ 时 $c'(t) < u_+ + G(t)$ 。因此, 这样的 $c(t)$ 不满足超压缩条件(11)。

情形 2.2 当 $c(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ u_+ - \rho_- u_- + \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right) t + \int_0^t G(\tau) d\tau$ 时, 有

$$c'(t) - (u_+ + G(t)) = \frac{1}{[\rho]} \left(\sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} - \rho_- (u_- - u_+) \right). \quad (30)$$

注意到 $\mu \rho_+ \rho_- - (\rho_- (u_- - u_+))^2 = (\rho_+ - \rho_-)(u_+ - u_-)(\rho_- (u_+ - u_-) + 1)$, 因此当 $[\rho] < 0$ 时, 结合 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$ 有 $\sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \leq \rho_- (u_- - u_+)$ 。从而由(30)可得 $c'(t) \geq u_+ + G(t)$; 类似地, 当 $[\rho] > 0$ 时, 有 $c'(t) \geq u_+ + G(t)$ 。

另一方面, 不难验证

$$u_- + G(t) - \rho_-^{-1} - c'(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ (u_- - u_+) - \rho_-^{-1} (\rho_+ - \rho_-) - \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right), \quad (31)$$

其中 $\rho_+ (u_- - u_+) - \rho_-^{-1} (\rho_+ - \rho_-) \geq \rho_+ \rho_-^{-1} - \rho_-^{-1} (\rho_+ - \rho_-) = 1 > 0$ 。故

$$\left(\rho_+ (u_- - u_+) - \rho_-^{-1} (\rho_+ - \rho_-) \right)^2 - \mu \rho_+ \rho_- = (\rho_+ - \rho_-) \left(u_- - \rho_-^{-1} - u_+ \right) \left(\rho_+ (u_- - \rho_-^{-1} - u_+) + 1 \right). \quad (32)$$

结合 $u_+ \leq u_- - \rho_-^{-1}$ 可知, 当 $[\rho] > 0$ 时, 由(32)有 $\rho_+ (u_- - u_+) - \rho_-^{-1} (\rho_+ - \rho_-) \geq \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-}$, 从而由(31)可得 $u_- + G(t) - \rho_-^{-1} \geq c'(t)$; 当 $[\rho] < 0$ 时, 由(32)可以推知 $\rho_+ (u_- - u_+) - \rho_-^{-1} (\rho_+ - \rho_-) \leq \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-}$, 同样由(31)可得 $u_- + G(t) - \rho_-^{-1} \geq c'(t)$ 。因此, 只要 $[\rho] \neq 0$, 超压缩条件(11)总成立, 故这样的 $c(t)$ 是可容许的。

由(27)和(25)的第二个式子可得

$$\begin{cases} \zeta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_+ \rho_- \cdot \mu}, \\ u_s(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ u_+ - \rho_- u_- + \sqrt{\rho_+ \rho_- \cdot \mu} \right) + G(t). \end{cases}$$

由此可知, 阴影波解(10)中的中间变量 $\rho_\varepsilon(t)$ 和 $u_\varepsilon(t)$ 可取为如(13)所示, 且此时阴影波的传播速度为

$$c(t) = \frac{1}{[\rho]} \left(\rho_+ u_+ - \rho_- u_- + \sqrt{\mu \rho_+ \rho_-} \right) t + \int_0^t G(\tau) d\tau. \text{ 证毕。}$$

4. 阴影波的收敛性

定理 2 在 Schwartz 广义函数意义下, 当 ε 趋于 0 时, 黎曼问题(3)和(4)的阴影波解(10)收敛于系统本身的狄拉克激波解(5), 如图 1 所示。

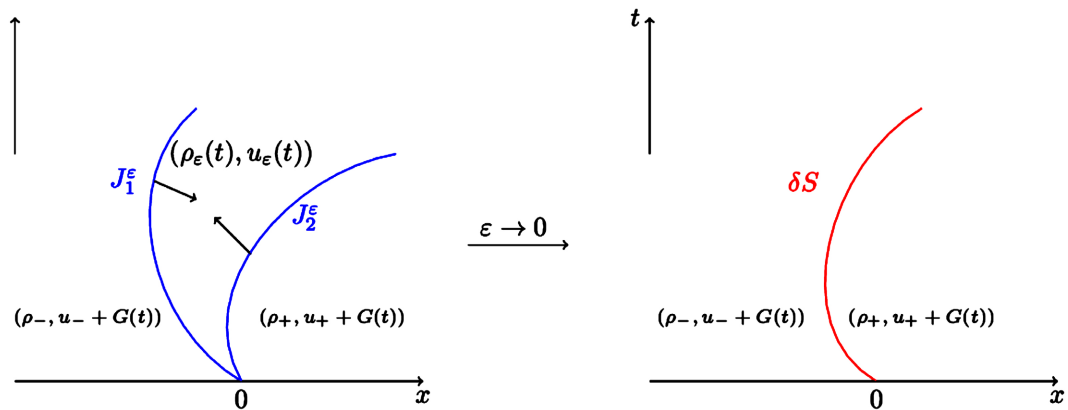


Figure 1. Convergence of the shadow wave solution to the delta-shock solution

图 1. 阴影波解收敛到狄拉克激波解

证明: 只证 $[\rho] \neq 0$ 的情况, $[\rho] = 0$ 的情况同理可得. 对于任意的测试函数 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 令:

$$\begin{cases} N_1(\epsilon) := \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_\epsilon(x, t) - \rho_\delta(x, t)) \varphi(x, t) dx dt, \\ N_2(\epsilon) := \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_\epsilon(x, t) - u_\delta(x, t)) \varphi(x, t) dx dt. \end{cases} \quad (33)$$

记 $A = \sqrt{\rho_+ \rho_-} \cdot \mu$. 将(33)第一个式子展开得

$$\begin{aligned} N_1(\epsilon) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c(t)-\epsilon t} + \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)} + \int_{c(t)}^{c(t)+\epsilon t} + \int_{c(t)+\epsilon t}^{+\infty} \right) (\rho_\epsilon(x, t) - \rho_\delta(x, t)) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)+\epsilon t} \frac{A}{2\epsilon} \varphi(x, t) dx dt - \int_0^{+\infty} A t \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad - \left(\int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)} \rho_- \varphi(x, t) dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{c(t)+\epsilon t} \rho_+ \varphi(x, t) dx dt \right). \end{aligned}$$

借助测试函数 φ 的泰勒展开式(19)可得:

$$\int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)+\epsilon t} \frac{A}{2\epsilon} \varphi(x, t) dx dt \approx \int_0^{+\infty} A t \varphi(c(t), t) dt.$$

又由于 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 则

$$\int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)} \rho_- \varphi(x, t) dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{c(t)+\epsilon t} \rho_+ \varphi(x, t) dx dt \approx 0.$$

于是, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N_1(\epsilon) = 0$.

类似地, 记 $B = \frac{1}{[\rho]} (\rho_+ u_+ - \rho_- u_- + \sqrt{\rho_+ \rho_-} \cdot \mu)$, 将(33)第二个式子展开得

$$\begin{aligned} N_2(\epsilon) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c(t)-\epsilon t} + \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)} + \int_{c(t)}^{c(t)+\epsilon t} + \int_{c(t)+\epsilon t}^{+\infty} \right) (u_\epsilon(x, t) - u_\delta(x, t)) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{c(t)-\epsilon t}^{c(t)} (B - u_-) \varphi(x, t) dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{c(t)+\epsilon t} (B - u_+) \varphi(x, t) dx dt \approx 0, \end{aligned}$$

即 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N_2(\epsilon) = 0$. 证毕。

5. 总结

本文研究了带有时变源项的 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流模型阴影波解的存在唯一性及其在分布意义下的收敛性. 与齐次系统及常数源项情形不同, 时变源项的引入使系统不再具有自相似结构,

特征速度中出现了源项的累积效应,波前位置与激波强度均随时间非线性演化,这给黎曼问题的求解和阴影波的构造带来了更大的困难。本文的结果在更一般的时变源项框架下统一并推广了已有工作,为时变源项作用下交通流中奇异波的形成提供了理论依据,同时也拓展了阴影波方法在非齐次系统中的应用范围,为将来研究带有复杂源项的交通流模型提供了有益的参考。

基金项目

云南省基础研究计划项目(202401AT070130),云南师范大学研究生科研创新基金(YJSJJ26-B051)。

参考文献

- [1] Aw, A. and Rascle, M. (2000) Resurrection of “Second Order” Models of Traffic Flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **60**, 916-938. <https://doi.org/10.1137/s0036139997332099>
- [2] Chaplygin, S. (1904) On Gas Jets. *Scientific Memoirs of the Moscow University Physics and Mathematics Faculty*, **21**, 1-121.
- [3] Tsien, H.S. (1939) Two-Dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids. *Journal of the Aeronautical Sciences*, **6**, 399-407. <https://doi.org/10.2514/8.916>
- [4] Von Karman, T. (1941) Compressibility Effects in Aerodynamics. *Journal of the Aeronautical Sciences*, **8**, 337-356. <https://doi.org/10.2514/8.10737>
- [5] Pan, L.J. and Han, X.L. (2013) The Aw-Rascle Traffic Model with Chaplygin Pressure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **401**, 379-387. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.12.022>
- [6] Shen, C. (2016) The Riemann Problem for the Pressureless Euler System with the Coulomb-Like Friction Term. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **81**, 76-99. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxv028>
- [7] Zhang, Q.L. (2019) Stability of Riemann Solutions to Pressureless Euler Equations with Coulomb-Type Friction by Flux Approximation. *Electronic Journal of Differential Equations*, **65**, 1-22.
- [8] Li, S.W. (2022) Riemann Solutions of the Anti-Chaplygin Pressure Aw-Rascle Model with Friction. *Journal of Mathematical Physics*, **63**, Article ID: 121509. <https://doi.org/10.1063/5.0092054>
- [9] Cui, M.Q., Fan, S. and Zhang, Y. (2026) Delta-Shocks and Vacuums as Flux-Approximation Limit of Solutions to the Aw-Rascle Model with Time-Dependent Source. *Quaestiones Mathematicae*, **49**, 857-890. <https://doi.org/10.2989/16073606.2026.2627442>
- [10] Nedeljkov, M. (2010) Shadow Waves: Entropies and Interactions for Delta and Singular Shocks. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 489-537. <https://doi.org/10.1007/s00205-009-0281-2>
- [11] Daw, D.A.E. and Nedeljkov, M. (2016) Shadow Waves for Pressureless Gas Balance Laws. *Applied Mathematics Letters*, **57**, 54-59. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.01.004>
- [12] Nedeljkov, M. (2014) Higher Order Shadow Waves and Delta Shock Blow up in the Chaplygin Gas. *Journal of Differential Equations*, **256**, 3859-3887. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.03.002>
- [13] Sun, M.N. (2016) Shadow Wave Solution for the Generalized Langmuir Isotherm in Chromatography. *Archiv der Mathematik*, **107**, 645-658. <https://doi.org/10.1007/s00013-016-0943-x>
- [14] 贾艺菲, 郭俐辉, 白寅松. 相对论 Chaplygin 气体欧拉方程组的阴影波解 [J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57: 55-65.