

利用斯托克斯公式求第二型曲线积分的一点思考

刘 佳*, 徐 慧, 王亚男

空军工程大学基础部, 陕西 西安

收稿日期: 2026年9月17日; 录用日期: 2026年10月11日; 发布日期: 2026年10月20日

摘 要

本文探讨了第二型曲线积分的求解方法, 重点阐述了如何利用斯托克斯公式求解第二型曲线积分, 文中结合例题展开讲解, 针对以有向闭曲线为边界所张成的不同有向曲面, 详细分析利用斯托克斯公式进行求解的过程, 并总结如何选择有向曲面能使求解更为简便。

关键词

曲线的方向, 曲面的侧, 右手规则, 曲线积分, 曲面积分

Some Thoughts on Evaluating Second-Type Curve Integrals by Stokes' Formula

Jia Liu*, Hui Xu, Yanan Wang

Department of Basic Courses, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi

Received: September 17, 2026; accepted: October 11, 2026; published: October 20, 2026

Abstract

This paper investigates the solution methods for line integrals of the second kind, with emphasis on evaluating such integrals by means of Stokes' formula. Explanations are illustrated with typical examples. For different oriented surfaces bounded by an oriented closed curve, the solution procedures using Stokes' formula are analyzed in detail. Moreover, the paper summarizes how to select a proper oriented surface to simplify the calculation.

*通讯作者。

文章引用: 刘佳, 徐慧, 王亚男. 利用斯托克斯公式求第二型曲线积分的一点思考[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 212-217. DOI: 10.12677/aam.2026.1510409

Keywords

Orientation of the Curve, Orientation of the Surface, Right-Hand Rule, Line Integral, Surface Integra

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

关于第二型曲线积分的求解,我们常用的方法有两种,方法一,直接求解法,即把曲线方程化为参数方程的形式,进一步把第二型曲线积分转化为定积分来求解。方法二,利用斯托克斯公式,即把第二型曲线积分转化为第一型曲面积分来求解。

斯托克斯公式这部分内容是《高等数学》学习中的一个难点[1],特别是在利用公式时,针对分段光滑的空间有向闭曲线,相应的有向曲面如何选择?很多同学卡在这里,就会有疑问,利用斯托克斯公式求解第二型曲线积分时,如何选择以有向曲线为边界所张成的有向曲面,为什么选择这个有向曲面,而不选择其他的有向曲面,选择不同,对我们的求解会有什么影响呢?文中第二部分我们给出斯托克斯公式,第三部分我们就结合例题展开讲解如何更有效地利用斯托克斯公式来解决相关问题。

2. 斯托克斯公式

斯托克斯公式把曲面 Σ 上的曲面积分与沿着 Σ 的边界曲线的曲线积分联系起来。陈述如下:

定理[1] 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则,若函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在曲面 Σ (连同边界 Γ) 上具有一阶连续偏导数,则有

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz。$$

为了便于记忆,利用行列式记号把上述公式写成

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz。$$

利用两型曲面积分之间的关系,可得公式的另一种形式

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz。$$

其中, $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量。

需要强调的是斯托克斯公式的使用条件,第一点空间曲线 Γ 为分段光滑的有向闭曲线,曲面 Σ 是分片光滑的有向曲面;第二点 Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则;第三点函数 P, Q, R 在曲面 Σ (连同边界 Γ)

上具有一阶连续偏导数。

3. 例题探究

本部分主要结合例题, 讨论第二型曲线积的求解[2], 主要探讨如何利用斯托克斯公式求解第二型曲线积分, 定理中提到只要是以有向闭曲线为边界的有向曲面, 二者符合右手规则, 就可以使用斯托克斯公式[3]。怎样选择合适的有向曲面是我们求解的关键[4], 下面结合例题我们展开详细讨论。

例 1: 计算 $\oint_L ydx + zdy + xdz$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, 若从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向。

分析: 本题是第二型曲线积分的计算, 可以将曲线化为参数方程直接利用定积分求解, 也可以利用斯托克斯公式来求解。下面给出详细求解过程。

解法一: 曲线的参数方程为 $L: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \theta: 0 \rightarrow 2\pi$, 所以

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} \sin \theta d \cos \theta = - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d \theta = -\pi。$$

解法二: 利用斯托克斯公式(所选曲面为平面)

取 Σ 为有向平面 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 的上侧, 则其法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 对应的单位法向量为 $\mathbf{e}_n = (0, 0, 1)$ 。

故 $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$, 所以

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS = - \iint_{\Sigma} dS = -\pi。$$

解法三: 利用斯托克斯公式(所选曲面为上半球面)

取 Σ 为有向曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$ 的上侧, 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则有向曲面 Σ 的法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y, 2z)$, 对应的单位法向量为 $\mathbf{e}_n = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ 。故

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

所以

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS = - \iint_{\Sigma} \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$$

由对称性得, $\iint_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$, $\iint_{\Sigma} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$ 。所以

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = - \iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS。$$

因为 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ，所以

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_L y dx + z dy + x dz &= - \iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} dx dy = -\sigma = -\pi \end{aligned}$$

其中， D_{xy} 为 Σ 在 xoy 面上的投影区域，其面积记为 σ ， $\sigma = \pi \cdot 1^2 = \pi$ 。

解法四：利用斯托克斯公式(所选曲面为下半球面)

取 Σ 为有向曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \leq 0)$ 的下侧，令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ，则有向曲面 Σ 的法向量

为 $\mathbf{n} = (-2x, -2y, -2z)$ ，对应的单位法向量为 $\mathbf{e}_n = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$ 。故

$$\cos \alpha = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \text{所以}$$

$$\oint_L y dx + z dy + x dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS$$

由对称性得， $\iint_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS = 0$ ， $\iint_{\Sigma} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS = 0$ 。所以

$$\oint_L y dx + z dy + x dz = \iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS。$$

因为 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，所以

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_L y dx + z dy + x dz &= \iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{-\sqrt{1-x^2-y^2}}{1} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} dx dy = -\sigma = -\pi \end{aligned}$$

其中, D_{xy} 为 Σ 在 xoy 面上的投影区域, 其面积记为 σ , $\sigma = \pi \cdot 1^2 = \pi$ 。

例 2: 计算 $\oint_L ydx + zdy + xdz$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$, 若从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向。

向。

分析: 本题的求解方法同例 1。针对四种求解方法我们来进行对比一下。

解法一: 利用曲线的参数方程 $L: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \theta: 0 \rightarrow 2\pi$ 进行求解。

解法二: 利用斯托克斯公式(所选曲面为平面)

取 Σ 为有向平面 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 的上侧, 则其法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 对应的单位法向量为 $\mathbf{e}_n = (0, 0, 1)$ 。

故 $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$ 。

利用斯托克斯公式求解即可。

解法三: 利用斯托克斯公式(所选曲面为球面在 $-1 < z \leq -\frac{1}{2}$ 部分的小球冠)

取 Σ 为有向曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \left(-1 < z \leq -\frac{1}{2} \right)$ 的上侧, 则其法向量为 $\mathbf{n} = (-2x, -2y, -2z)$, 对应的单位法向量为 $\mathbf{e}_n = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ 。故 $\cos \alpha = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos \beta = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos \gamma = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 。

利用斯托克斯公式求解即可。

解法四: 利用斯托克斯公式(所选曲面为球面在 $-\frac{1}{2} \leq z < 1$ 部分的大球冠)

取 Σ 为有向曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \left(-\frac{1}{2} \leq z < 1 \right)$, 此时曲面与平行于 z 轴的直线的交点多于一个, 我们作辅助曲线把曲面 Σ 分成两个部分 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (0 \leq z < 1)$ 与 $\Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \left(-\frac{1}{2} \leq z \leq 0 \right)$, 然后利用斯托克斯公式进行计算并相加即可。这个求解过程相当繁琐。

例 3: 计算 $H = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 - x - y \end{cases}$, 若从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向。

解: 对比前两个例题, 本题利用斯托克斯公式来求解(所选曲面为斜平面 $z = 2 - x - y$)

取 Σ 为有向斜平面 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 2 - x - y \end{cases}$ 的上侧, 则其法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, 对应的单位法向量为

$\mathbf{e}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 。故 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以由斯托克斯公式可得

$$H = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS.$$

因为 Σ 在有向斜平面 $z = 2 - x - y$ 上, 所以有

$$H = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} 2 dS = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS$$

设 Σ 在 xoy 面上的投影为 D_{xy} , 其面积为 $\sigma = \pi \cdot 1^2 = \pi$, 而 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$, 故

$$H = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} dS = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} dx dy = -8 \iint_{D_{xy}} dx dy = -8\pi.$$

4. 归纳总结

在上述三个例题中, 我们选用的有向曲面, 都是题目中给的。有的学生还会有疑问, 能否自己构造一个以有向闭曲线为边界的有向曲面, 且符合右手规则, 再利用斯托克斯公式进行求解。答案是肯定的, 定理中提到只要是以有向闭曲线为边界所张成的有向曲面, 二者符合右手规则, 就可以使用斯托克斯公式。但是构造这样的曲面是困难的, 增加了我们求解的复杂度。怎样选择合适的有向曲面是我们求解的关键。通过文中的讲解我们发现, 在求解第二型曲线积分时, 我们可以考虑使用斯托克斯公式, 使用公式的一般步骤为, 在满足公式的条件下, 第一步, 判断边界曲线是否为平面曲线? 若是, 则选择其所在的平面。若否, 则进一步考察该曲线是否为某个规则曲面(如柱面、球面)的一部分? 这样选择更易求解。学生在求解问题的过程中要善于总结“一题多解”或“多题一解”, 进一步加深对知识的理解。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(下册, 第8版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023: 6.
- [2] 侯云畅. 高等数学学习与考研指导(下册) [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [3] 周民强. 数学分析习题演练(第一册) [M]. 北京: 科学出版社, 2006: 188-212.
- [4] 姜亚琴, 宋洪雪. 斯托克斯公式应用的五点注记[J]. 高等数学研究, 2015, 18(2): 60-62.