

一类特殊Birkhoff插值问题适定插值基的计算

李远鹤, 姜 雪*

长春理工大学数学与统计学院, 吉林 长春

收稿日期: 2026年9月26日; 录用日期: 2026年10月19日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

本文研究一类特殊的多元Birkhoff插值问题, 插值条件由单个节点及其上的微分条件构成。首先针对节点为原点的情形, 建立了关联矩阵与广义范德蒙矩阵之间的代数关系; 其次对于一般节点, 依据关联矩阵中相应列对应的单项构造上三角矩阵, 进而得到广义范德蒙矩阵的计算方法, 然后基于上述理论提出一种基于关联矩阵行约化的适定单项基的快速计算方法; 最后用数值算例验证了方法的有效性与可行性。本文结果为多元Birkhoff插值适定性的判别与基构造提供了新的理论依据与计算工具。

关键词

Birkhoff插值, 广义范德蒙矩阵, 关联矩阵, 适定单项基

Computation of Proper Interpolation Basis for a Special Class of Birkhoff Interpolation Problems

Yuanhe Li, Xue Jiang*

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: September 26, 2026; accepted: October 19, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

This paper investigates a class of special multivariate Birkhoff interpolation problems in which the interpolation conditions consist of a single node together with differential conditions imposed at that node. First, for the case where the node is located at the origin, the algebraic relationship between the incidence matrix and the generalized Vandermonde matrix is established. Furthermore, for general nodes, an upper triangular matrix is constructed from the monomials corresponding to

*通讯作者。

文章引用: 李远鹤, 姜雪. 一类特殊 Birkhoff 插值问题适定插值基的计算[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 374-381.
DOI: 10.12677/aam.2026.1510421

the relevant columns of the incidence matrix, which yields a computational method for the generalized Vandermonde matrix. Then, based on the above theory, we propose a fast algorithm for computing the proper monomial basis via row reduction of the incidence matrix. Finally, numerical examples are provided to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method. The results of this paper provide a new theoretical foundation and computational tool for the characterization of properness and the construction of basis in multivariate Birkhoff interpolation.

Keywords

Birkhoff Interpolation, Generalized Vandermonde Matrix, Incidence Matrix, Proper Monomial Basis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Birkhoff 插值作为经典多项式插值理论的重要推广, 同时涵盖了 Lagrange 插值与 Hermite 插值两种特殊情形, 其不仅在逼近论和微分方程数值解等数学领域起着至关重要的作用, 在航天器轨迹优化[1]、图像处理[2]及信息安全[3]等应用领域也有广泛的应用背景。

与理想插值问题相比, Birkhoff 插值的显著特征在于其插值条件中可能缺失某些低阶导数值, 从而使插值矩阵呈现更为复杂的结构[4]。因此, 如何判定插值问题的适定性并构造较低次数的插值基, 一直是该领域研究的核心问题之一。

Birkhoff 插值理论最早由 Birkhoff 在文献[5]中提出, Schoenberg 在 1966 年提出了一元 Birkhoff 插值格式[6]。Makarov 与 Kashpur 从算子理论视角系统综述了多项式插值理论, 为 Birkhoff 插值的泛函分析解释提供了统一的数学框架[7]。近年来, Rhouni 等学者在现有算法基础上, 提出了一元 Hermite-Birkhoff 插值多项式的递归算法 RHBPIA, 解决了 Birkhoff 插值多项式的存在性与唯一性问题, 并在数值稳定性分析上取得进展[8]; 其后续工作 RHBMPIA 进一步将这一算法框架推广至矩阵多项式插值情形, 拓展了 Birkhoff 插值的适用范围[9]。此外, Xu 等人在特定函数空间中研究了 Birkhoff 插值的最优恢复问题, 通过计算相应的 Birkhoff 数来量化插值算法在最坏情形下的误差下界[10]; Cui 与 Jiang 引入不变插值空间概念, 给出了基于关联矩阵判定多元 Birkhoff 插值适定性的高效判据, 为多元情形下的理论与应用提供了新的分析框架[11]。Xia 等人则研究了单变量 Birkhoff 有理插值的线性化方法[12], Xu 与 Lei 建立了多元均匀可积张量积 Birkhoff 插值的 Lagrange 型插值基函数[13], 为相关数值计算提供了新的工具支撑。崔凯将多元 Birkhoff 插值从单项微分条件推广到多项式微分条件, 分别在插值格式正则性判定、适定基构造和结点摄动下的稳定插值基计算三方面给出了新的理论结果与算法[14]。王筱颖针对多元 Birkhoff 插值与二元 Lagrange 插值两类问题, 分别利用连通性与连通闭包构造牛顿基, 以及利用 Cartesian 子集构造极小次数插值基并改进 BM 算法的预处理方法, 系统地给出了插值基的构造理论与高效算法[15]。

综上所述, Birkhoff 插值在理论与算法层面均已取得丰富成果, 但多数研究侧重于一元情形或特定函数空间, 对于多元情形下插值条件的代数结构与基的构造问题, 仍有待进一步深入。特别地, 当插值节点仅取单点时, 关联矩阵与广义范德蒙矩阵之间的内在联系尚未被充分揭示。为此, 本文将从多元 Birkhoff 插值的基本定义出发, 围绕单节点情形, 系统探讨关联矩阵与广义范德蒙矩阵之间的代数关系, 并据此

给出一种直接基于关联矩阵行约化构造适定插值单项基的方法。

本文第 2 节介绍必要的预备知识, 包括多元 Birkhoff 插值问题的数学描述、关联矩阵与广义范德蒙矩阵的定义及相关记号。第 3 节给出主要定理及其证明。第 4 节通过具体算例讨论插值单项基的构造方法, 最后对全文进行总结。

2. 预备知识

在本文中, 设 $\mathbb{F}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ 表示非负整数集, $\mathbb{F}[\mathbf{x}] := \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 表示域 $\mathbb{F}$ 上的 n 元多项式环。设插值节点为 $\mathbf{z}$, 给定符合单项序 $\prec$ 的序列 $S = [\mathbf{x}^{\alpha_1}, \mathbf{x}^{\alpha_2}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_l}]$, 记 $D^{\alpha_h}, h = 1, 2, \dots, l$ 为 $\mathbf{x}^{\alpha_h}$ 对应的微分算子。对于给定的 N 个线性无关的插值条件

$$\delta_{\mathbf{z}} \circ \{P_1(D), P_2(D), \dots, P_N(D)\}, \quad (1)$$

其中 $P_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^l e_{ji} \mathbf{x}^{\alpha_i}, j = 1, 2, \dots, N, e_{ji} \in \mathbb{F}, P_j(D) = \sum_{i=1}^l e_{ji} D^{\alpha_i}$ 为对应的微分多项式。赋值泛函 $\delta_{\mathbf{z}}(f) = f(\mathbf{z})$ 。

单点 n 元 Birkhoff 插值问题可以描述为: 对于任意给定的型值 $y_1, y_2, \dots, y_N$, 如何寻求一 N 维线性空间

$$\mathcal{F} = \text{span}\{\mathbf{x}^{\gamma_1}, \mathbf{x}^{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}^{\gamma_N}\},$$

使得存在唯一的多项式 $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}^{\gamma_i} \in \mathcal{F}$, 满足 $P_j(D)f(\mathbf{z}) = y_j, j = 1, 2, \dots, N$ 。称

$T = \{\mathbf{x}^{\gamma_1}, \mathbf{x}^{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}^{\gamma_N}\}$ 为插值问题的适定单项基, $f(\mathbf{x})$ 为插值多项式。

事实上, 插值多项式 $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}^{\gamma_i}$ 唯一的充要条件是线性方程组

$$\begin{cases} \delta_{\mathbf{z}} \circ P_1(D) \left(\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}^{\gamma_i} \right) = y_1 \\ \delta_{\mathbf{z}} \circ P_2(D) \left(\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}^{\gamma_i} \right) = y_2 \\ \vdots \\ \delta_{\mathbf{z}} \circ P_N(D) \left(\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}^{\gamma_i} \right) = y_N \end{cases}$$

关于 $c_1, c_2, \dots, c_N$ 有唯一解, 即等价于

$$\begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{z}} \circ P_1(D)(\mathbf{x}^{\gamma_1}) & \delta_{\mathbf{z}} \circ P_1(D)(\mathbf{x}^{\gamma_2}) & \cdots & \delta_{\mathbf{z}} \circ P_1(D)(\mathbf{x}^{\gamma_N}) \\ \delta_{\mathbf{z}} \circ P_2(D)(\mathbf{x}^{\gamma_1}) & \delta_{\mathbf{z}} \circ P_2(D)(\mathbf{x}^{\gamma_2}) & \cdots & \delta_{\mathbf{z}} \circ P_2(D)(\mathbf{x}^{\gamma_N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{\mathbf{z}} \circ P_N(D)(\mathbf{x}^{\gamma_1}) & \delta_{\mathbf{z}} \circ P_N(D)(\mathbf{x}^{\gamma_2}) & \cdots & \delta_{\mathbf{z}} \circ P_N(D)(\mathbf{x}^{\gamma_N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

的系数矩阵非奇异。本文称此系数矩阵为广义范德蒙矩阵。

设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, 如果 $\alpha - \beta$ 的最左端的非零元是负的, 则称 $\alpha \prec_{\text{lex}} \beta$, 等价地, $\mathbf{x}^\alpha \prec_{\text{lex}} \mathbf{x}^\beta$ 。如果 $|\alpha| < |\beta|$ 或 $|\alpha| = |\beta|$ 且 $\alpha \prec_{\text{lex}} \beta$, 则称 $\alpha \prec_{\text{grlex}} \beta$, 等价地, $\mathbf{x}^\alpha \prec_{\text{grlex}} \mathbf{x}^\beta$ 。

将插值条件中的多项式 $P_j(\mathbf{x})$ 按给定序列 $S = [\mathbf{x}^{\alpha_1}, \mathbf{x}^{\alpha_2}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_l}]$ 展开, 所有系数排列成一个 $N \times l$ 的矩阵, 即得到所谓的关联矩阵 E ,

$$E = (e_{jh})_{N \times l} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1l} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{N1} & e_{N2} & \cdots & e_{Nl} \end{pmatrix}, e_{jh} \in \mathbb{F},$$

其中第 j 行 h 列的元素 e_{jh} 即为多项式 $P_j(\mathbf{x})$ 中单项 $\mathbf{x}^{\alpha_h}$ 的系数。插值条件也可以由关联矩阵直接定义[14], 这与(1)定义的插值条件是等价的。例如, 给定序列 $S = [1, x, y, xy, y^3]$ 和微分多项式

$$P_1(D) = 1 + 2D_y^3, P_2(D) = 2D_x + 4D_x D_y + 6D_y^3, P_3(D) = 3 + 2D_y + 4D_x D_y,$$

$$\text{则关联矩阵 } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

本文总是假设给定的 N 个插值条件 $\delta_z \circ \{P_1(D), P_2(D), \dots, P_N(D)\}$ 是线性无关的, 即对应的关联矩阵 E 行满秩, 此时显然有 $N \leq l$ 。

定义矩阵 $V \in \mathbb{F}^{j \times h}$, $j = 1, 2, \dots, N; h = 1, 2, \dots, l$, 其第 j 行 h 列元素为 $\delta_z \circ P_j(D)(\mathbf{x}^{\alpha_h})$, 即

$$V = \begin{pmatrix} \delta_z \circ P_1(D)(\mathbf{x}^{\alpha_1}) & \delta_z \circ P_1(D)(\mathbf{x}^{\alpha_2}) & \cdots & \delta_z \circ P_1(D)(\mathbf{x}^{\alpha_l}) \\ \delta_z \circ P_2(D)(\mathbf{x}^{\alpha_1}) & \delta_z \circ P_2(D)(\mathbf{x}^{\alpha_2}) & \cdots & \delta_z \circ P_2(D)(\mathbf{x}^{\alpha_l}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_z \circ P_N(D)(\mathbf{x}^{\alpha_1}) & \delta_z \circ P_N(D)(\mathbf{x}^{\alpha_2}) & \cdots & \delta_z \circ P_N(D)(\mathbf{x}^{\alpha_l}) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

3. 主要结果

3.1. 插值节点为原点

构造一个 $l \times l$ 的阶乘对角矩阵 F :

$$F = (f_{jh})_{l \times l} \triangleq \text{diag}(\alpha_1!, \alpha_2!, \dots, \alpha_l!) = \begin{pmatrix} \alpha_1! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_l! \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_h = (\alpha_{h1}, \alpha_{h2}, \dots, \alpha_{hn}) \in \mathbb{F}^n$, $\alpha_h! = \alpha_{h1}! \alpha_{h2}! \cdots \alpha_{hn}!$, $h = 1, 2, \dots, l$, 易见 F 为对角线元素均非零的可逆矩阵。

定理 1: 给定 N 个线性无关的插值条件形如(1), 当插值节点取原点时, 利用上述记号有

$$V = E \cdot F.$$

证明: 对任意的 $j = 1, 2, \dots, N; h = 1, 2, \dots, l$, 矩阵 $E \cdot F$ 的第 j 行 h 列元素为 $\sum_{k=1}^l e_{j,k} \cdot f_{k,h}$ 。由于 F 是对角矩阵, 故 $f_{k,h} = 0, k \neq h$, 因此 $\sum_{k=1}^l e_{j,k} \cdot f_{k,h} = e_{jh} \cdot \alpha_h!$ 。而对于等式左边 V , 其第 j 行 h 列元素

$$\delta_0 \circ P_j(D)(\mathbf{x}^{\alpha_h}) = \delta_0 \circ \left(\sum_{i=1}^l e_{ji} D^{\alpha_i}(\mathbf{x}^{\alpha_h}) \right).$$

逐项分析 $D^{\alpha_i}(\mathbf{x}^{\alpha_h})$, $i, h = 1, 2, \dots, l$ 。当 $\alpha_i = \alpha_h$ 时, $D^{\alpha_i}(\mathbf{x}^{\alpha_h}) = \alpha_i!$, $\delta_0 \circ P_j(D)(\mathbf{x}^{\alpha_h}) = e_{ji} \cdot \alpha_i!$; 当 $\alpha_i \neq \alpha_h$ 时, 则在原点赋值有 $\delta_0 \circ D^{\alpha_i}(\mathbf{x}^{\alpha_h}) = 0$ 。因此, $\delta_0 \circ P_j(D)(\mathbf{x}^{\alpha_h}) = e_{jh} \cdot \alpha_h!$ 。

综上所述, $V = E \cdot F$, 定理得证。

推论 1: 在定理 1 的条件下, 矩阵 V 和 E 的秩相等, 即 $\text{rank}(V) = \text{rank}(E)$ 。特别地, 当 $N = l$ 时, V 与 E 具有相同的奇异性。

证明: 由于 F 是可对角矩阵, 任何矩阵右乘 F 均不改变矩阵的秩, 即 $\text{rank}(V) = \text{rank}(E \cdot F) = \text{rank}(E)$ 。因此 $\text{rank}(V) = \text{rank}(E)$ 。

当 $N = l$ 时, 有 $\det(V) = \det(E) \cdot \det(F) = \det(E) \cdot \prod_{h=1}^l \alpha_h!$ 。由于 $\prod_{h=1}^l \alpha_h! \neq 0$, 所以

$$\det(V) = 0 \Leftrightarrow \det(E) = 0,$$

即 V 与 E 的奇异性完全一致。证毕。

注: 插值条件中 $P_j(\mathbf{x})$ 中单项 $\mathbf{x}^\alpha$ 的系数 e_{ji} 与赋值泛函 $\delta_0 \circ P_j(D)(\mathbf{x}^\alpha)$ 之间仅差一个阶乘因子 $\alpha_i!$ 。该阶乘因子来源于微分算子 D^α 对 $\mathbf{x}^\alpha$ 求导后产生的常数 $\alpha_i!$, 在矩阵中体现为阶乘对角矩阵 F 的作用。

下面给出单点 Birkhoff 插值问题插值基的计算方法。

对于给定的插值条件及其关联矩阵 E , 通过 Gauss 消去将关联矩阵 E 进行行约化得到 $\text{ref}(E)$, 记录 $\text{ref}(E)$ 中每个主元列所在位置, 将其对应的单项按序排成的序列记为 $T = [\mathbf{x}^{\gamma_1}, \mathbf{x}^{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}^{\gamma_N}]$ 。在 E 中按序取 T 对应的列构成一个新矩阵记为 $\tilde{E}_{N \times N}$ 。下面给出主要定理。

定理 2: 上述定义的 $T = [\mathbf{x}^{\gamma_1}, \mathbf{x}^{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}^{\gamma_N}]$ 中的单项构成插值条件 $\delta_0 \circ \{P_1(D), P_2(D), \dots, P_N(D)\}$ 的一组适定插值单项基。

证明: 记 $\tilde{F} = \text{diag}(\gamma_1!, \gamma_2!, \dots, \gamma_N!)$ 。对于公式(2)定义的 V , 在 V 中按序取 T 对应的列构成一个新矩阵记为 $\tilde{V}_{N \times N}$ 。由定理 1 可知 $V = E \cdot F$, 又由于 F 为对角矩阵, 易证 $\tilde{V} = \tilde{E} \cdot \tilde{F}$ 。由 $\tilde{E}$ 的定义可知, 它是由行约化后的关联矩阵确定主元所在列, 并在 E 中由所得的主元列的位置按序提取 N 列构成的子矩阵, 所以 $\tilde{E}$ 是非奇异矩阵。因此,

$$\det(\tilde{V}) = \det(\tilde{E}) \cdot \det(\tilde{F}) \neq 0,$$

即广义范德蒙矩阵 $\tilde{V}$ 非奇异。定理得证。

注 1: 不同的分次序会导致不同的主元列选择, 从而得到不同的插值单项基。

注 2: 构造适定插值基的目标在于选取一组单项基, 使得相应的广义范德蒙矩阵非奇异。定理 1 与定理 2 揭示了广义范德蒙矩阵与关联矩阵之间的内在联系, 据此可避免直接计算广义范德蒙矩阵, 而仅通过对关联矩阵的行约化操作即可确定适定插值单项基。

3.2. 插值节点为任意节点

设 S 为一个按给定分次序 $\prec$ 排列的单项序列, $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \mathbb{F}^n$ 为插值节点, 插值条件(1)对应的关联矩阵为 E 。与 3.1 的情形类似, 对 E 进行行约化可求得 $\text{ref}(E)$, 找出 $\text{ref}(E)$ 中主元所在列对应的单项仍按序记为 $T = [\mathbf{x}^{\gamma_1}, \mathbf{x}^{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}^{\gamma_N}]$ 。在 E 中取 T 中单项对应的列按序构成一个子矩阵, 仍记为 $\tilde{E}_{N \times N}$ 。根据 T 构造矩阵 $\tilde{B}(\mathbf{z}) = (\delta_z \circ D^{\gamma_k}(\mathbf{x}^{\gamma_m}))_{N \times N}, k, m = 1, 2, \dots, N$ 。记 $\tilde{V}_{N \times N}$ 为插值条件 $\delta_z \circ \{P_1(D), P_2(D), \dots, P_N(D)\}$ 作用在 T 上的广义范德蒙矩阵。

定理 3: 按上述记号,

$$\tilde{V} = \tilde{E} \cdot \tilde{B}(\mathbf{z}),$$

且 T 中元素 $\{\mathbf{x}^{\gamma_1}, \mathbf{x}^{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}^{\gamma_N}\}$ 构成插值条件 $\delta_z \circ \{P_1(D), P_2(D), \dots, P_N(D)\}$ 的一组适定插值基。

证明: 将子矩阵 $\tilde{E}_{N \times N}$ 表示为 $\tilde{E} = \begin{pmatrix} e_{1h_1} & e_{1h_2} & \cdots & e_{1h_N} \\ e_{2h_1} & e_{2h_2} & \cdots & e_{2h_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{Nh_1} & e_{Nh_2} & \cdots & e_{Nh_N} \end{pmatrix}, 1 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_N \leq N$ 。由 $\tilde{E}$ 和 $\tilde{V}$ 的定义可知,

子矩阵 $\tilde{E}$ 在 E 中列的选取与 $\tilde{V}$ 在 V 中列的选取是一致的, 即对任意 $j, m=1, 2, \dots, N$, $\tilde{V}$ 的第 j 行 m 列元素为

$$\delta_z \circ P_j(D)(x^r_m) = \delta_z \circ \sum_{k=1}^N e_{jh_k} D^{r_k}(x^r_m).$$

对任意 $k, m=1, 2, \dots, N$, $\tilde{B}(z)$ 的第 k 行 m 列元素为 $\delta_z \circ D^{r_k}(x^r_m) = \begin{cases} \delta_z \circ D^{r_k}(x^r_m), & x^{r_k} \prec x^r_m \\ \gamma_m!, & x^{r_k} = x^r_m \\ 0, & x^{r_m} \prec x^{r_k} \end{cases}$ 。

则可计算矩阵 $\tilde{E} \cdot \tilde{B}(z)$ 的第 j 行 m 列元素为 $\sum_{k=1}^N e_{jh_k} \cdot \delta_z \circ D^{r_k}(x^r_m) = \delta_z \circ \sum_{k=1}^N e_{jh_k} D^{r_k}(x^r_m)$ 。故有

$\tilde{E} \cdot \tilde{B}(z) = \tilde{V}$ 成立。与定理 2 类似, 由 $\tilde{E}$ 的构造可知它是非奇异的。又因为 $\tilde{B}(z)$ 为上三角矩阵, 且对角线元素非零, 所以 $\det(\tilde{V}) = \det(\tilde{E}) \cdot \det(\tilde{B}(z)) \neq 0$, 即 $\tilde{V}$ 非奇异, T 为一组适定插值基。定理得证。

注: 本文方法的核心贡献在于解决插值问题的适定性, 即保证插值单项基的存在性与唯一性, 而非优化基底的数值性质。本节从代数角度揭示了广义范德蒙矩阵与关联矩阵之间的内在联系, 使得可以通过行约化操作确定适定插值单项基, 从而避免了直接计算广义范德蒙矩阵。不过, 这一过程并未直接改善基底的数值条件。事实上, 当插值节点发生微小摄动时, 原本适定的极小单项基可能不再适定, 插值多项式也会随之发生显著变化。已有的稳定性研究指出, 通过极小单项基算法得到的基对节点摄动较为敏感, 而稳定单项基算法则能在给定误差范围内保持适定性。因此, 如何在保证适定性的前提下进一步优化基底的数值性质, 例如提高其抗扰动能力, 仍是一个值得继续研究的问题。

4. 算例

4.1. 插值节点为原点的算例

考虑二元 Birkhoff 插值问题, 给定分次字典序 $y \prec_{\text{glrex}} x$, 插值节点为原点 $z = (0, 0)$, 插值条件为 $\delta_0 \circ \{P_1(D), P_2(D), P_3(D), P_4(D)\}$, 其中

$$P_1(D) = 1 + 2D_y^2, P_2(D) = 2D_x + 4D_x D_y + 6D_y^3, P_3(D) = 3 + 2D_y^2 + 4D_x D_y, P_4(D) = 2 + D_x + 2D_x D_y + 7D_y^3.$$

根据插值条件, 在单项序列 $S = [1, x, y^2, xy, y^3]$ 下关联矩阵为

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

对关联矩阵进行行约化得到

$$\text{ref}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

主元分别位于第 1 列(对应单项 1)、第 2 列(对应单项 x)、第 3 列(对应单项 y^2)和第 4 列(对应单项 xy)。由定理 2 可知 $T = \{1, x, y^2, xy\}$ 构成插值问题的适定插值基。

事实上, 主元列构成的子矩阵 $\tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $\tilde{E}$ 非奇异。各主元所在列对应单项 $1, x, y^2, xy$ 的

多重阶乘为 $(0,0)! = 1$, $(1,0)! = 1$, $(0,2)! = 2$, $(1,1)! = 1$, 即对角矩阵 $\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。插值条件作用

在 T 上的广义范德蒙矩阵 $\tilde{V} = \tilde{E} \cdot \tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 因此 $\det(\tilde{V}) = \det(\tilde{E}) \cdot \det(\tilde{F}) \neq 0$, 故 $\tilde{V}$ 非奇异。 T

为给定插值条件的一组适定插值单项基。

4.2. 插值节点为任意节点的算例

考虑二元 Birkhoff 插值问题, 给定分次字典序 $x \prec_{\text{glex}} y$, 插值节点为原点 $z = (2, 1)$, 插值条件为 $\delta_z \circ \{P_1(D), P_2(D), P_3(D)\}$, 其中

$$P_1(D) = 1 + 2D_x D_y + 3D_x^2, P_2(D) = 2D_x^2 + 2D_y^2 + D_x^3, P_3(D) = 1 + 4D_x^2 + 2D_x D_y + 7D_y^2 + 6D_x^3.$$

根据插值条件, 在单项序列 $S = [1, x^2, xy, y^2, x^3]$ 下的关联矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

对关联矩阵进行行约化得到

$$\text{ref}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

主元分别位于第 1、2、4 列, 对应的单项分别为 $1, x^2, y^2$ 。由定理 3 可知 $T = \{1, x^2, y^2\}$ 构成插值问题的适定插值基。

容易验证, 主元列构成的子矩阵 $\tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, 且 $\tilde{E}$ 非奇异。根据 $\tilde{B}(z)$ 的定义构造矩阵

$$\tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ 插值条件作用在 } T \text{ 上的广义范德蒙矩阵 } \tilde{V} = \tilde{E} \cdot \tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 12 & 15 \end{pmatrix}, \text{ 且 } \tilde{V} \text{ 非奇异, 这}$$

说明 T 为给定插值条件的适定插值单项基。

注: 传统方法计算适定插值基, 首先要求出各插值条件在单项上的取值, 即对单项求导后再在插值节点处赋值, 由此构造出广义范德蒙矩阵, 再通过判断其非奇异性来确定适定插值基。构造广义范德蒙矩阵 V 本身的运算量不可忽略, 尤其在多元高次插值情形下, 单项式数量 N 随次数增长而迅速增加,

直接构造并计算 V 的行列式将面临较大的计算负担。相比之下, 通过关联矩阵 E 的行约化确定适定插值单项基, 广义范德蒙矩阵 V 可直接由关联矩阵得到, 无需逐项计算偏导并赋值。关联矩阵 E 的构造仅涉及插值条件中偏导系数的直接提取, 无需构造完整的广义范德蒙矩阵, 这避免了求导与赋值带来的额外计算, 并通过行约化直接获得主元列, 进而得到适定插值基。本文方法在处理高维、高次插值问题时具有更好的计算可行性。

5. 结论

本文针对多元 Birkhoff 插值中的单节点情形, 系统建立了关联矩阵与广义范德蒙矩阵之间的代数关系。当插值节点为原点时, 证明了两之间相差一个由多重阶乘构成的可逆对角矩阵; 对于任意节点情形, 进一步给出了广义范德蒙子矩阵的分解表达式。基于上述理论, 提出了一种适定插值单项基的构造方法: 仅需对关联矩阵进行行约化, 由主元列位置直接确定一组单项基, 即可保证相应的广义范德蒙矩阵非奇异, 从而避免了传统方法中直接计算广义范德蒙矩阵的复杂过程。该方法将适定基的判定与构造统一于关联矩阵的行约化操作, 形式简洁、计算高效。数值算例验证了方法的有效性与可操作性。

基金项目

吉林省教育厅科学研究项目(JJKH20250468KJ)。

参考文献

- [1] 张志伟. 基于 Birkhoff 谱方法的航天器轨迹快速优化研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2023.
- [2] Zhang, L., Zhang, J., Sun, J. and Chen, Q. (2024) A Global Progressive Image Secret Sharing Scheme under Multi-Group Joint Management. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **21**, 1286-1304. <https://doi.org/10.3934/mbe.2024055>
- [3] Hadian Dehkordi, M., Mashhadi, S., Farahi, S.T. and Noorallahzadeh, M.H. (2023) Changeable Essential Threshold Secret Image Sharing Scheme with Verifiability Using Bloom Filter. *Multimedia Tools and Applications*, **83**, 58745-58781. <https://doi.org/10.1007/s11042-023-17777-6>
- [4] Lorentz, G.G., Jetter, K. and Riemenschneider, S.D. (1984) Birkhoff Interpolation. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511662959>
- [5] Birkhoff, G.D. (1906) General Mean Value and Remainder Theorems with Applications to Mechanical Differentiation and Quadrature. *Transactions of the American Mathematical Society*, **7**, 107-136. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1906-1500736-1>
- [6] Schoenberg, I.J. (1966) On Hermite-Birkhoff Interpolation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **16**, 538-543. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(66\)90160-0](https://doi.org/10.1016/0022-247x(66)90160-0)
- [7] Makarov, V. and Kashpur, O. (2025) A Survey of the Theory of Operator Polynomial Interpolation. *Ukrainian Mathematical Journal*, **77**, 1024-1053. <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02506-z>
- [8] Rhouni, O., Errachid, M. and Esghir, M. (2025) RHBPIA: A New Algorithm for Computing Hermite-Birkhoff Interpolation Polynomials. *Numerical Algorithms*, **101**, 2791-2818. <https://doi.org/10.1007/s11075-025-02114-9>
- [9] Rhouni, O., Errachid, M. and Esghir, M. (2026) RHBMPIA: A New Algorithm for Computing Hermite-Birkhoff Matrix Interpolation Polynomials. *Numerical Algorithms*. <https://doi.org/10.1007/s11075-026-02325-8>
- [10] Xu, G., Liu, Y. and Guo, D. (2022) Optimal Birkhoff Interpolation and Birkhoff Numbers in Some Function Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **43**, 125-142. <https://doi.org/10.1007/s10473-023-0108-5>
- [11] Cui, K. and Jiang, X. (2022) Invariant Interpolation Space for Generalized Multivariate Birkhoff Interpolation. *Symmetry*, **14**, Article 889. <https://doi.org/10.3390/sym14050889>
- [12] Xia, P., Lei, N. and Dong, T. (2023) On the Linearization Methods for Univariate Birkhoff Rational Interpolation. *Applied Mathematics and Computation*, **445**, Article 127831. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127831>
- [13] Xu, L. and Lei, N. (2017) Lagrange-Type Basis for Multivariate Uniform Integrable Tensor-Product Birkhoff Interpolation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 6823-6831. <https://doi.org/10.1002/mma.4495>
- [14] 崔凯. 多元 Birkhoff 插值若干问题研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2015.
- [15] 王筱颖. 多元多项式插值问题的牛顿基[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2010.