

双曲型的Helmholtz方程组带有 δ -初值的黎曼问题

王皎月, 沈 春

鲁东大学数学与统计科学学院, 山东 烟台

收稿日期: 2026年9月26日; 录用日期: 2026年10月19日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

本文主要研究了一个简化双曲型的Helmholtz方程组带有 δ -初值的广义黎曼问题, 这个模型可以通过对几何光学中薄凸透镜的模拟和各种合理的简化和假设推导出来。由于其最初的黎曼解中含有狄拉克 δ -激波, 因此我们很自然地研究其带有 δ -初值的广义黎曼问题。本文通过对 δ -初值的局部扰动来研究狄拉克 δ -激波和真空状态之间的相互作用问题, 这里我们采用特殊的三片常状态的初值来逼近带有 δ -函数的黎曼初值。然后, 我们利用广义Rankine-Hugoniot条件和过度压缩的狄拉克熵条件来研究所有可能出现的波的相互作用问题, 并在此基础上构造性地得到了在此局部扰动下的整体黎曼解。最后, 我们通过让扰动参数趋于零并在广义函数意义下求其相应的弱极限, 以便最终获得这个模型带有 δ -初值的广义黎曼问题的整体解。

关键词

Helmholtz方程组, 广义Rankine-Hugoniot条件, 过度压缩的熵条件, 狄拉克激波

The Riemann Problem with Delta Initial Data for the Hyperbolic Helmholtz Equations

Jiaoyue Wang, Chun Shen

College of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai Shandong

Received: September 26, 2026; accepted: October 19, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

This paper is mainly concerned with the generalized Riemann problem with delta initial data for a

simplified hyperbolic system of Helmholtz equations. This model can be derived through the simulation of a thin convex lens in geometric optics under some reasonable simplifications and assumptions. Since its original Riemann solution contains Dirac delta shock wave, it is natural for us to study its generalized Riemann problem with Dirac delta-type initial data. We study the interaction between the Dirac delta shock wave and the vacuum state by locally perturbing the delta initial data. In this work, we employ a special set of initial data consisting of three piecewise constant states to approximate the Riemann initial data involving Dirac delta function. Then, we study all the possible appearing wave interactions by employing the generalized Rankine-Hugoniot conditions together with the over-compressive Dirac entropy condition before we constructively obtain the global Riemann solutions under this special local perturbation of such initial data. Finally, by letting the perturbation parameter tend to zero and taking the corresponding weak limits in the sense of distributions, we eventually obtain the global solutions to the generalized Riemann problem for the simplified Helmholtz equations with Dirac delta-type initial data.

Keywords

Helmholtz System, Generalized Rankine-Hugoniot Condition, Over-Compressive Entropy Condition, Delta Shock Wave

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

通过几何光学中薄凸透镜的模拟可得到如下的双曲守恒律形式的 Helmholtz 方程组[1]:

$$\begin{cases} u_t - \left(\sqrt{1-u^2} \right)_x = 0, \\ \mu_t + \left(\frac{u\mu}{\sqrt{1-u^2}} \right)_x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 u, μ 分别表示速度和强度, 它们的取值范围为 $u \in (-1, 1), \mu \in [0, +\infty)$ 可参考文献[1]-[3]。在文[1]中对方程组(1.1)取黎曼初值如下:

$$(u, \mu)(x, t=0) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < 0, \\ (u_+, \mu_+), & x > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

对于黎曼问题(1.1)和(1.2), 其黎曼解中包含狄拉克 δ -激波和真空状态这两种不同的情形[4]。更具体地, 当 $u_- < u_+$ 时, 其黎曼解是由两个接触间断组成, 并在由两个接触间断包围的中间区域是真空状态, 即 $\mu = 0$ 时的状态; 当 $u_- > u_+$ 时, 其黎曼解由一个狄拉克 δ -激波直接连接左右两个常状态 $(u_{\pm}, \mu_{\pm})$ 构成[5]。

在文[4]的基础上, 我们将进一步研究初始条件带有 δ -函数初值的广义黎曼问题[6] [7], 来揭示奇异双曲波的非线性现象。本文考虑方程组(1.1)取狄拉克 δ -函数初值的广义黎曼问题, 其初始条件如下:

$$(u, \mu)(x, t=0) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < 0, \\ (u_0, \beta_0 \delta), & x = 0, \\ (u_+, \mu_+), & x > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $\delta(x)$ 表示标准狄拉克 δ -函数。为了研究广义黎曼问题(1.1)和(1.3), 我们首先考虑其扰动的黎曼问题,

其扰动的黎曼初值可取为:

$$(u, \mu)(x, t=0) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < 0, \\ \left(u_0, \frac{\beta_0}{\varepsilon}\right), & 0 < x < \varepsilon, \\ (u_+, \mu_+), & x > \varepsilon, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中扰动参数 ε 取一个充分小的正数。我们通过研究狄拉克 δ -激波和真空状态之间的相互作用问题, 来构造扰动黎曼问题(1.1)和(1.4)在各种初值下的整体解。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 利用弱解的稳定性理论, 借助广义 Rankine-Hugoniot 条件和过度压缩的 δ -熵条件, 我们可得狄拉克 δ -函数初值的广义黎曼问题(1.1)和(1.3)的解。我们设 $\beta_0 = 0$, 那么(1.1)和(1.3)的解恰好对应于黎曼问题(1.1)和(1.2)的相应解。该方法已在文献[8]中用于研究一维 Chaplygin 气体方程组的具有 δ -初值的黎曼问题。此外, 该方法还研究了 Chaplygin 压交流通流 AR 模型[9]和一个简化的趋化型模型含狄拉克 δ -函数的黎曼问题[10]。波的相互作用已被广泛研究, 如文献[11]-[16]中所述; 同样, 三片光滑的黎曼初值在[12][17]-[20]中被广泛应用于研究不同双曲守恒律系统基本波的相互作用。

2. 预备知识

在本节中, 我们简单回顾方程组(1.1)在黎曼初值(1.2)下的黎曼问题, 详细研究参考[4]。方程组(1.1)只有一个相重合的特征值 $\lambda = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ 以及与其相对应的右特征向量 $r = (0, 1)^T$, 通过简单的计算, 得到 $\nabla \lambda \cdot r = 0$ 。因此, 方程组(1.1)是一个完全线性退化的非严格双曲型方程组, 并属于 Temple 类型的双曲型方程组[21]。对于给定的黎曼初值(1.2), 方程组(1.1)的黎曼解可能包含接触间断、真空或 δ -激波。

当 $u_- < u_+$ 时, 黎曼解由两个接触间断 J_1 和 J_2 以及中间的真空状态组成, 可以表示为:

$$(u, \mu)(x, t) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < \sigma_1 t, \\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + t^2}}, 0\right), & \sigma_1 t < x < \sigma_2 t, \\ (u_+, \mu_+), & x > \sigma_2 t, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, J_1 和 J_2 的传播速度为:

$$\sigma_1 = \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}}, \quad \sigma_2 = \frac{u_+}{\sqrt{1-u_+^2}}. \quad (2.2)$$

当 $u_- = u_+$ 时, 则 (u_+, u_+) 通过位于 $x = \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}} = \frac{u_+ t}{\sqrt{1-u_+^2}}$ 处的单个接触间断直接相连接。

当 $u_- > u_+$ 时, 特征线必然在两条射线 $x = \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}}$ 和 $x = \frac{u_+ t}{\sqrt{1-u_+^2}}$ 所围成的区域中重叠, 这导致解在该

三角形区域内出现奇异性。从文献[5]中可知, 上述奇异性不可能是一个有限范围的跳跃, 因此需要把 δ -激波引入到黎曼解中, 为此需要首先引入如下定义:

定义 2.1 设 Γ 是 (x, t) 平面上由 $x = x(t)$ 参数化的光滑曲线, 对于任意 $\psi(x, t) \in C_0^\infty(R \times R_+)$, 则上的二维加权狄拉克 δ -函数 $\beta(t)\delta_\Gamma$ 可以定义为:

$$\langle \beta(t)\delta_\Gamma, \psi(x, t) \rangle = \int_0^{+\infty} \beta(t)\psi(x(t), t)dt. \quad (2.3)$$

在定义 2.1 的基础上, 我们可以构造黎曼问题(1.1)和(1.2)的 δ -激波解如下:

$$(u, \mu)(x, t) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < \sigma_\delta t, \\ (u_\delta, \beta(t) \delta(x - \sigma_\delta t)), & x = \sigma_\delta t, \\ (u_+, \mu_+), & x > \sigma_\delta t, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_\delta = \frac{u_\delta}{\sqrt{1-u_\delta^2}} = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_+^2}}{u_+ - u_-}, \\ \beta(t) = \left(\frac{\mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} + \frac{\mu_+}{\sqrt{1-u_+^2}} \right) \left(\frac{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_+^2)} + u_- u_+ - 1}{u_+ - u_-} \right) t. \end{cases} \quad (2.5)$$

上述 δ -激波解(2.4)~(2.5)满足如下广义 R-H 条件

$$\begin{cases} \frac{dx_\delta(t)}{dt} = \sigma_\delta = \frac{u_\delta}{\sqrt{1-u_\delta^2}}, \\ \sigma_\delta[u] = -\left(\sqrt{1-u_+^2} - \sqrt{1-u_-^2}\right), \\ \frac{d\beta(t)}{dt} = \sigma_\delta(\mu_+ - \mu_-) - \left(\frac{u_+ \mu_+}{\sqrt{1-u_+^2}} - \frac{u_- \mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}}\right), \end{cases} \quad (2.6)$$

和过度压缩的 δ -熵条件

$$\frac{u_+}{\sqrt{1-u_+^2}} < \sigma_\delta < \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}}. \quad (2.7)$$

3. 具有 δ -初值的黎曼问题

本节首先考虑扰动的黎曼问题(1.1)和(1.4), 通过具体研究狄拉克 δ -激波和真空状态之间的相互作用问题来构造扰动的黎曼问题(1.1)和(1.4)的整体解。随后令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到具有 δ -初值的广义黎曼问题(1.1)与(1.3)的解。根据 u_- , u_+ 和 u_0 之间的关系, 下面我们逐一讨论扰动的黎曼问题(1.1)和(1.4)并分为如下三种情况:

1) $u_0 < u_+$

这种情况下, 在充分小的时间 t 内, 扰动的黎曼问题(1.1)和(1.4)的局部解可以简要表示为:

$$(u_-, \mu_-) + \delta S_1 + \left(u_0, \frac{\beta_0}{\varepsilon}\right) + J_1 + Vac + J_2 + (u_+, \mu_+),$$

这里, δS_1 的传播速度是:

$$\sigma_{\delta 1} = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2}}{u_0 - u_-},$$

并满足过度压缩的熵条件:

$$\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} < \sigma_{\delta 1} < \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}}.$$

此时, J_1 的传播速度 σ_1 为 $\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}$, 因此, 易得 δS_1 与 J_1 在某一时刻相遇, 其交点 (x_1, t_1) 可用下式确

定:

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_{\delta 1} t_1 = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2}}{u_0 - u_-} t_1, \\ x_1 - \varepsilon = \sigma_1 t_1 = \frac{u_0 t_1}{\sqrt{1-u_0^2}}, \end{cases} \quad (3.1)$$

通过计算可得:

$$(x_1, t_1) = \left(\frac{\varepsilon(u_0 - u_-)u_0}{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_0^2)} - 1 + u_0 u_-} + \varepsilon, \frac{\varepsilon(u_0 - u_-)\sqrt{1-u_0^2}}{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_0^2)} - 1 + u_0 u_-} \right). \quad (3.2)$$

在 $t = t_1$ 时刻, 我们遇到了具有如下 δ -函数初值的特殊柯西问题:

$$u|_{t=t_1} = \begin{cases} u_-, & x < x_1, \\ u_+, & x > x_1, \end{cases} \quad \mu|_{t=t_1} = \begin{cases} \mu_-, & x < x_1 \\ \mu_+, & x > x_1 \end{cases} + \beta(t_1)\delta(x_1, t_1). \quad (3.3)$$

此外, δ -激波 δS_1 在点 (x_1, t_1) 处的强度可计算如下:

$$\beta(t_1) = \left(\frac{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_0^2)} - 1 + u_0 u_-}{u_0 - u_-} \right) \left(\frac{\mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} + \frac{\beta_0}{\varepsilon \sqrt{1-u_0^2}} \right) t_1,$$

通过整理得:

$$\beta(t_1) = \mu_- \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{1-u_0^2}{1-u_-^2}} + \beta_0. \quad (3.4)$$

在 t_1 之后, δ -激波 δS_1 进入真空区域, 并被标记为 δS_2 。通过(2.1)不难发现, 真空区域中点 (x, t) 处的虚拟速度由 $u = \frac{x - \varepsilon}{\sqrt{(x - \varepsilon)^2 + t^2}}$ 给出。因此, δS_2 的曲线表达式由下式给出:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma_{\delta 2}(t) = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u^2}}{u - u_-} = \frac{\sqrt{(1-u_-^2)((x - \varepsilon)^2 + t^2)} - t}{-\varepsilon - u_- \sqrt{(x - \varepsilon)^2 + t^2}}, \quad (3.5)$$

并满足 $x(t_1) = x_1$ 。

值得注意的是, δ -激波 δS_2 的左侧为常状态 (u_-, μ_-) , 而右侧为虚拟速度变化的真空状态 $\left(\frac{x - \varepsilon}{\sqrt{(x - \varepsilon)^2 + t^2}}, 0 \right)$ 。因此, 由(2.6)推断, δ -激波 δS_2 在穿透真空区域的过程中, 其强度可以通过以下公式计算:

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \sigma_{\delta 2}(t)(0 - \mu_-) - \left(0 - \frac{u_- \mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} \right) = \left(\frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}} - \sigma_{\delta 2}(t) \right) \mu_-, \quad (3.6)$$

并满足初始条件(3.4)。

对于常微分方程(3.5)和(3.6)无法进行显式计算, 但可以借助前面讨论的结果来判断。如果 $u_- > u_+$,

则 δS_2 能在有限时间内穿过整个真空区域, 并且 δS_2 与 J_2 的交点 (x_2, t_2) 可由(3.5)式与 $x_2 - \varepsilon = \sigma_2 t_2 = \frac{u_+ t_2}{\sqrt{1-u_+^2}}$

来共同确定(见图 1(a))。为了清晰起见, 在穿过 J_2 后, 将该 δ -激波标记为 δS_3 , 在 t_2 之后, δS_3 的表达式和强度分别表示为:

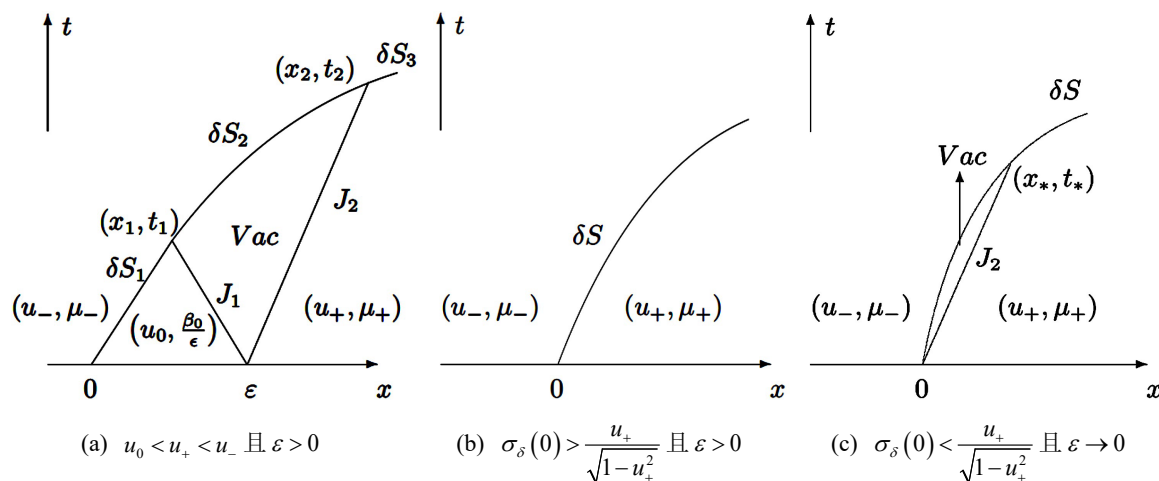


Figure 1. $u_0 < u_+ < u_-$ situation

图 1. $u_0 < u_+ < u_-$ 情形

$$x = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_+^2}}{u_+ - u_-} (t - t_2) + x_2, \quad (3.7)$$

$$\beta(t) = \left(\frac{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_+^2)} - 1 + u_- u_+}{u_+ - u_-} \right) \left(\frac{\mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} + \frac{\mu_+}{\sqrt{1-u_+^2}} \right) (t - t_2) + \beta(t_2). \quad (3.8)$$

相反, 如果 $u_- < u_+$, 则 δS_2 无法在有限时间内穿过整个真空区域, 并最终在真空区域中的射线 $x = \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}} t + \varepsilon$ 作为其渐近线(见图 2(a))。

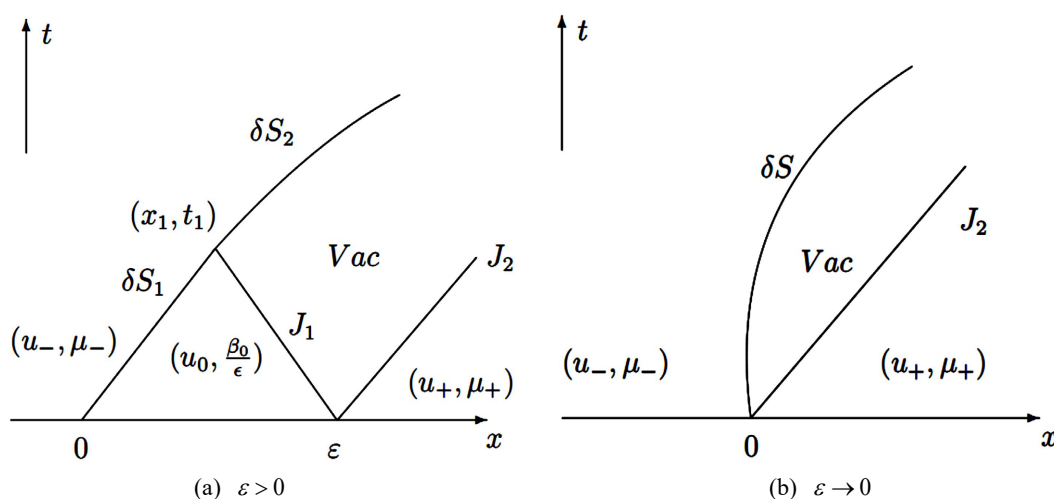


Figure 2. $u_0 < u_- < u_+$ situation

图 2. $u_0 < u_- < u_+$ 情形

扰动黎曼问题(1.1)和(1.4)在初始条件(1.4)满足 $u_0 < u_+$ 情形下的解已经完全构造完成, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 由(3.2)式易得:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_1, t_1) = (0, 0), \quad (3.9)$$

即点 (x_1, t_1) 在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时将趋向于 $(0, 0)$ 。另外, (3.5)式中的 u 在真空区域中将从 u_0 连续地变化到 u_+ , 在 $u_0 < u_+ < u_-$ 时, 如果

$$\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} < \frac{u_+}{\sqrt{1-u_+^2}} < \sigma_\delta(0) = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2}}{u_0 - u_-} < \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}},$$

这时 δS 的速度在初始时刻 $t=0$ 比 J_2 的速度快, 此时 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_1, t_1) = (0, 0)$, 因此该极限解即为单个弯曲的 δS (见图 1(b))。如果

$$\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} < \sigma_\delta(0) = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2}}{u_0 - u_-} < \frac{u_+}{\sqrt{1-u_+^2}} < \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}},$$

这时 δS 的速度在初始时刻 $t=0$ 比 J_2 的速度慢, 该 δS 将在有限时间内穿越整个真空区域并与 J_2 相遇, 此时 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_2, t_2) = (x_*, t_*) \neq (0, 0)$ (见图 1(c))。

显然, 而当 $u_0 < u_- < u_+$ 时, 有

$$\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} < \sigma_\delta(0) = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2}}{u_0 - u_-} < \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}} < \frac{u_+}{\sqrt{1-u_+^2}},$$

此时 δS 无法在有限时间内穿过整个真空区域, 并最终真以真空区域中的射线 $x = \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}}$ 作为其渐近线 (见图 2(b))。

对上述(1.1)和(1.4)的黎曼解取极限, 即可得如上所述的广义黎曼问题(1.1)和(1.3)的黎曼解。当 $\beta_0 \rightarrow 0$ 时, 易知 $(x_*, t_*) \rightarrow 0$ 且图 1(b)和图 1(c)中弯曲的 δS 将变直, 而图 2(b)的 δS 将退化成在直线 $x = \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}}$ 的 1-接触间断, 与最初的黎曼问题(1.1)和(1.2)的解相一致。

2) $u_- < u_0 < u_+$

扰动的黎曼问题(1.1)和(1.4)的局部解可精确地表示为(见图 3(a)):

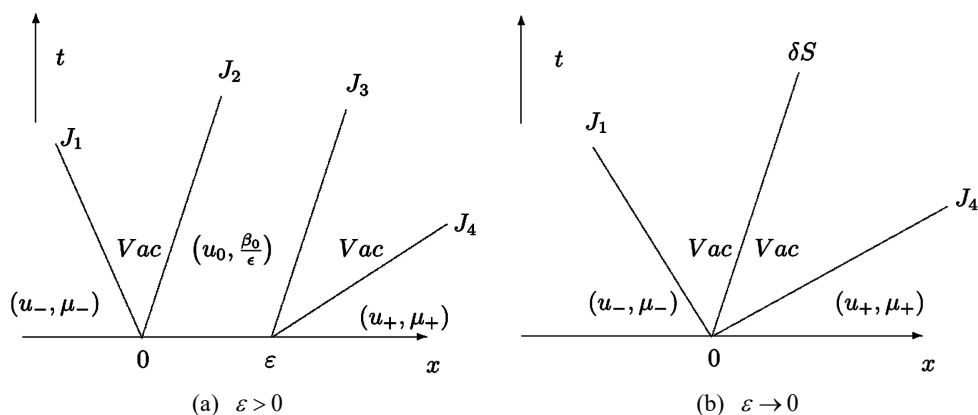


Figure 3. $u_- < u_0 < u_+$ situation

图 3. $u_- < u_0 < u_+$ 情形

$$(u, \mu)(x, t) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}}, \\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}, 0 \right), & \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}} < x < \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}}, \\ \left(u_0, \frac{\beta_0}{\varepsilon} \right), & \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}} < x < \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}} + \varepsilon, \\ \left(\frac{x-\varepsilon}{\sqrt{(x-\varepsilon)^2+t^2}}, 0 \right), & \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}} + \varepsilon < x < \frac{u_+ t}{\sqrt{1-u_+^2}} + \varepsilon, \\ (u_+, \mu_+), & x > \frac{u_+ t}{\sqrt{1-u_+^2}} + \varepsilon, \end{cases}$$

其中 J_2 和 J_3 的传播速度都为 $\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}$ 。因此, 我们看到 J_2 不能在有限的时间内与 J_3 相遇, 相互作用不会发生。

在极限的情况下, 其解可精确地表示为:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u, \mu)(x, t) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}}, \\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}, 0 \right), & \frac{u_- t}{\sqrt{1-u_-^2}} < x < \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}}, \\ \left(u_0, \beta_0 \delta \left(x - \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}} \right) \right), & x = \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}}, \\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}, 0 \right), & \frac{u_0 t}{\sqrt{1-u_0^2}} < x < \frac{u_+ t}{\sqrt{1-u_+^2}}, \\ (u_+, \mu_+), & x > \frac{u_+ t}{\sqrt{1-u_+^2}}, \end{cases}$$

因此当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, J_2 和 J_3 将彼此重合, 两个真空状态将聚集在一起合并成一个整体的真空状态, δ -激波 δS 以不变的速度 $\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}$ 和强度 β_0 向前传播。很容易看出(1.1)和(1.3)的黎曼解与(1.1)和(1.4)的黎曼解在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限是一致的, 即在这种情况下构造的解在该扰动下是稳定的(见图 3(b))。

3) $u_+ < u_0 < u_-$

扰动的黎曼问题(1.1)和(1.4)的局部解可精确地表示为(见图 4(a)):

$$(u, \mu)(x, t) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < \sigma_{\delta 1} t, \\ (u_{\delta 1}, \beta_1(t) \delta(x - \sigma_{\delta 1} t)), & x = \sigma_{\delta 1} t, \\ \left(u_0, \frac{\beta_0}{\varepsilon} \right), & \sigma_{\delta 1} t < x < \sigma_{\delta 2} t + \varepsilon, \\ (u_{\delta 2}, \beta_2(t) \delta(x - \sigma_{\delta 2} t - \varepsilon)), & x = \sigma_{\delta 2} t + \varepsilon, \\ (u_+, \mu_+), & x > \sigma_{\delta 2} t + \varepsilon, \end{cases}$$

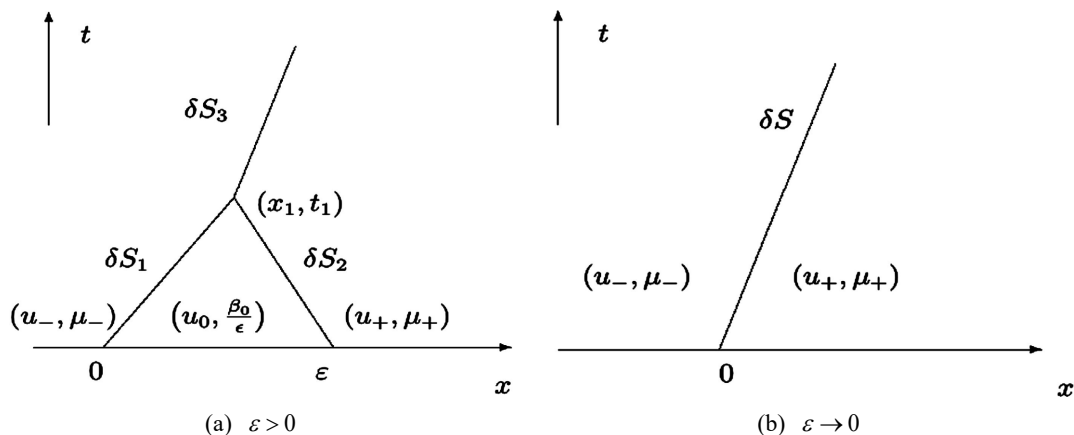


Figure 4. $u_+ < u_0 < u_-$ situation

图 4. $u_+ < u_0 < u_-$ 情形

δS_1 的传播速度 $\sigma_{\delta 1}$, δS_2 的传播速度 $\sigma_{\delta 2}$ 满足:

$$\sigma_{\delta 1} = \frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2}}{u_0 - u_-} \frac{u_{\delta 1}}{\sqrt{1-u_{\delta 1}^2}}, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\delta 2} = \frac{\sqrt{1-u_0^2} - \sqrt{1-u_+^2}}{u_+ - u_0} = \frac{u_{\delta 2}}{\sqrt{1-u_{\delta 2}^2}}, \quad (3.11)$$

并且满足过度压缩的熵条件

$$\frac{u_+}{\sqrt{1-u_+^2}} < \sigma_{\delta 2} < \frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} < \sigma_{\delta 1} < \frac{u_-}{\sqrt{1-u_-^2}},$$

因此, 我们看到 δS_1 和 δS_2 将在有限时间内发生碰撞, 相互作用点 (x_1, t_1) 由下式确定:

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_{\delta 1} t_1, \\ x_1 - \varepsilon = \sigma_{\delta 2} t_1, \end{cases} \quad (3.12)$$

通过计算可得:

$$x_1 = \frac{\varepsilon \sigma_{\delta 1}}{\sigma_{\delta 1} - \sigma_{\delta 2}} = \frac{\varepsilon (u_+ - u_0) (\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_0^2})}{(u_+ - u_0) \sqrt{1-u_-^2} - (u_+ - u_-) \sqrt{1-u_0^2} + (u_0 - u_-) \sqrt{1-u_+^2}}, \quad (3.13)$$

$$t_1 = \frac{\varepsilon}{\sigma_{\delta 1} - \sigma_{\delta 2}} = \frac{\varepsilon (u_+ - u_0) (u_0 - u_-)}{(u_+ - u_0) \sqrt{1-u_-^2} - (u_+ - u_-) \sqrt{1-u_0^2} + (u_0 - u_-) \sqrt{1-u_+^2}}. \quad (3.14)$$

在时间 $t = t_1$ 时, 我们再一次得到具有以下初始数据的黎曼问题:

$$u|_{t=t_1} = \begin{cases} u_-, & x < x_1, \\ u_+, & x > x_1, \end{cases} \quad \mu|_{t=t_1} = \begin{cases} \mu_-, & x < x_1 \\ \mu_+, & x > x_1 \end{cases} + \beta(t_1) \delta(x_1, t_1). \quad (3.15)$$

在相互作用前, δS_1 和 δS_2 的强度可分别计算为:

$$\beta_1(t) = \left(\frac{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_0^2)} - 1 + u_- u_0}{u_0 - u_-} \right) \left(\frac{\mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} + \frac{\beta_0}{\varepsilon \sqrt{1-u_0^2}} \right) t, \quad (3.16)$$

$$\beta_2(t) = \left(\frac{\sqrt{(1-u_+^2)(1-u_0^2)} - 1 + u_+ u_0}{u_+ - u_0} \right) \left(\frac{\mu_+}{\sqrt{1-u_+^2}} + \frac{\beta_0}{\varepsilon \sqrt{1-u_0^2}} \right) t. \quad (3.17)$$

在 t_1 时刻的强度 $\beta(t_1)$ 为 δS_1 和 δS_2 在此时刻的强度之和, 其计算公式为:

$$\beta(t_1) = \beta_1(t_1) + \beta_2(t_1), \quad (3.18)$$

这里设:

$$A = (u_+ - u_0)\sqrt{1-u_-^2} - (u_+ - u_-)\sqrt{1-u_0^2} + (u_0 - u_-)\sqrt{1-u_+^2}, \quad (3.19)$$

将(3.14)代入(3.18), 化简得:

$$\begin{aligned} \beta(t_1) = & \frac{\varepsilon}{A} \left[\frac{\beta_0}{\varepsilon} (u_+ - u_0) \left(\sqrt{1-u_-^2} + \frac{u_- u_0 - 1}{\sqrt{1-u_0^2}} \right) + (u_+ - u_0) \mu_- \left(\sqrt{1-u_0^2} + \frac{u_- u_0 - 1}{\sqrt{1-u_-^2}} \right) \right. \\ & \left. + (u_0 - u_-) \mu_+ \left(\sqrt{1-u_0^2} + \frac{u_+ u_0 - 1}{\sqrt{1-u_+^2}} \right) + \frac{\beta_0}{\varepsilon} (u_0 - u_-) \left(\sqrt{1-u_+^2} + \frac{u_+ u_0 - 1}{\sqrt{1-u_0^2}} \right) \right], \end{aligned}$$

把 β_0 项合并:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_0}{\varepsilon} \left[A + (u_+ - u_-)\sqrt{1-u_0^2} + \frac{(u_+ - u_0)(u_- u_0 - 1) + (u_0 - u_-)(u_+ u_0 - 1)}{\sqrt{1-u_0^2}} \right] \\ & = \frac{\beta_0}{\varepsilon} \left[A + (u_+ - u_-)\sqrt{1-u_0^2} + \frac{(u_- - u_+)(1-u_0^2)}{\sqrt{1-u_0^2}} \right] \\ & = \frac{\beta_0}{\varepsilon} \left[A + (u_+ - u_-)\sqrt{1-u_0^2} + (u_- - u_+)\sqrt{1-u_0^2} \right] = \frac{\beta_0 A}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

整理得:

$$\beta(t_1) = \beta_0 + \frac{\varepsilon}{A} \left[(u_+ - u_0) \mu_- \left(\sqrt{1-u_0^2} + \frac{u_- u_0 - 1}{\sqrt{1-u_-^2}} \right) + (u_0 - u_-) \mu_+ \left(\sqrt{1-u_0^2} + \frac{u_+ u_0 - 1}{\sqrt{1-u_+^2}} \right) \right]. \quad (3.20)$$

δS_1 和 δS_2 相互作用后会产生一道新的 δ -激波, 我们将其记为 δS_3 , 其速度为 $\sigma_{\delta 3}$, δS_3 的表达式和强度分别表示为:

$$x = \left(\frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_+^2}}{u_+ - u_-} \right) (t - t_1) + x_1, \quad (3.21)$$

$$\beta(t) = \left(\frac{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_+^2)} - 1 + u_- u_+}{u_+ - u_-} \right) \left(\frac{\mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} + \frac{\mu_+}{\sqrt{1-u_+^2}} \right) (t - t_1) + \beta(t_1). \quad (3.22)$$

扰动黎曼问题(1.1)和(1.4)在初始条件(1.4)满足 $u_+ < u_0 < u_-$ 情形下的解已经完全构造完成, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 由(3.13), (3.14)和(3.20)式易得:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_1, t_1) = (0, 0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(t_1) = \beta_0. \quad (3.23)$$

因此在极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的情况下, 其解可精确地表示为:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u, \mu)(x, t) = \begin{cases} (u_-, \mu_-), & x < \sigma_\delta t, \\ (u_\delta, \eta(t) \delta(x - \sigma_\delta t)), & x = \sigma_\delta t, \\ (u_+, \mu_+), & x > \sigma_\delta t, \end{cases} \quad (3.24)$$

这里

$$\eta(t) = \beta_0 + \left(\frac{\sqrt{(1-u_-^2)(1-u_+^2)} - 1 + u_- u_+}{u_+ - u_-} \right) \left(\frac{\mu_-}{\sqrt{1-u_-^2}} + \frac{\mu_+}{\sqrt{1-u_+^2}} \right) t.$$

因此当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 该极限解即为单个的 δ -激波 δS 以不变的速度 $\frac{\sqrt{1-u_-^2} - \sqrt{1-u_+^2}}{u_+ - u_-}$ 和强度 $\eta(t)$ 向前传播, 见图 4(b), 因为我们得到在情形 $u_+ < u_0 < u_-$ 下的广义黎曼问题(1.1)和(1.3)的解, 当 $\beta_0 \rightarrow 0$ 时, 与最初的黎曼问题(1.1)和(1.2)的解相一致。

4. 结论

当 $u_0 > u_+$ 时, 解的结构与情形(1)可以类似的处理。至此, 我们已经完成了对所有相互作用情况的讨论, 并且已经完全构造了扰动黎曼问题(1.1)和(1.4)的整体解。我们通过令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得到了(1.1)和(1.3)的解。由于狄拉克 δ -函数的出现, 所以这里取的极限都是在广义函数意义下的弱极限, 因此我们依赖于在广义函数意义下狄拉克 δ -激波的相关理论[5] [22] [23]。我们将结果总结如下:

定理 4.1: 广义黎曼问题(1.1)和(1.3)的解可以通过对扰动黎曼问题(1.1)和(1.4)的解取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 获得, 且在 $\beta_0 = 0$ 时与最初的黎曼问题(1.1)和(1.2)的解保持一致。

本文的工作可以进一步推广到更复杂的双曲色谱方程、等熵的 Chaplygin 气体二相流方程组, 以及双曲守恒律方程组中含有 δ -初值的广义黎曼问题的研究中。 δ -初值问题可视为对点源或高度集中初值的能量与动量如何影响系统演化的一种刻画, 在几何光学、交通流、气体动力学等领域具有潜在的应用价值。通过对不同初值情况的分类讨论, 本文揭示了一个双曲型的 Helmholtz 方程组 δ -初值下解的结构和动力学行为, 给出了狄拉克 δ -激波与真空状态、接触间断之间相互作用的情况, 并证明了扰动参数趋于零时极限解的稳定性。本文同时还可作为其他双曲守恒律系统中狄拉克 δ -激波的生成、传播与波的相互作用研究提供参考。

基金项目

本研究得到了山东省自然科学基金(编号: ZR2023MA060)的资助。

参考文献

- [1] Gosse, L. and James, F. (2002) Convergence Results for an Inhomogeneous System Arising in Various High Frequency Approximations. *Numerische Mathematik*, **90**, 721-753. <https://doi.org/10.1007/s002110100309>
- [2] Katsaounis, T., Kossioris, G.T. and Makrakis, G.N. (2001) Computation of High Frequency Fields near Caustics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **11**, 199-228. <https://doi.org/10.1142/s0218202501000842>
- [3] Gosse, L. (2002) Using K-Branch Entropy Solutions for Multivalued Geometric Optics Computations. *Journal of Computational Physics*, **180**, 155-182. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7085>
- [4] Shen, C. (2025) Riemann Solutions and Wave Interactions for a Hyperbolic System Derived from the Steady 2D Helmholtz Equation under a Paraxial Assumption. *Applied Mathematics Letters*, **160**, Article ID: 109320. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2024.109320>
- [5] Sheng, W. and Zhang, T. (1999) The Riemann Problem for the Transportation Equations in Gas Dynamics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **137**, 1-77. <https://doi.org/10.1090/memo/0654>
- [6] Yang, H. and Sun, W. (2007) The Riemann Problem with Delta Initial Data for a Class of Coupled Hyperbolic Systems

- of Conservation Laws. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **67**, 3041-3049. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.09.057>
- [7] Wang, L. (2016) The Riemann Problem with Delta Data for Zero-Pressure Gas Dynamics. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **37**, 441-450. <https://doi.org/10.1007/s11401-016-0962-8>
 - [8] Wang, Z. and Zhang, Q.L. (2012) The Riemann Problem with Delta Initial Data for the One-Dimensional Chaplygin Gas Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **32**, 825-841. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(12\)60064-2](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(12)60064-2)
 - [9] 邵志强. 关于 δ 初值的 Chaplygin 压交通流 AR 模型的 Riemann 问题[J]. 数学物理学报, 2014, 34(6): 1353-1371.
 - [10] 孙寅酉, 郭俐辉, 刘冬冬. 初值含 Dirac 函数的一个简化趋化性模型的 Riemann 问题[J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(1): 32-40.
 - [11] Shen, C. and Sun, M. (2009) Interactions of Delta Shock Waves for the Transport Equations with Split Delta Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **351**, 747-755. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.11.005>
 - [12] Guo, L., Zhang, Y. and Yin, G. (2014) Interactions of Delta Shock Waves for the Chaplygin Gas Equations with Split Delta Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **410**, 190-201. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.082>
 - [13] Lai, G. and Sheng, W. (2016) Elementary Wave Interactions to the Compressible Euler Equations for Chaplygin Gas in Two Dimensions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **76**, 2218-2242. <https://doi.org/10.1137/16m1061801>
 - [14] Zhang, B. and Hu, Y. (2023) The Interaction of Rarefaction Waves for a System of Granular Flow Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **518**, Article ID: 126786. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126786>
 - [15] Zhang, Y. and Zhang, Y.Y. (2020) Riemann Problem and Wave Interactions for a Class of Strictly Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **51**, 1017-1040. <https://doi.org/10.1007/s00574-019-00186-5>
 - [16] Sen, A. and Raja Sekhar, T. (2020) Delta Shock Wave and Wave Interactions in a Thin Film of a Perfectly Soluble Anti-Surfactant Solution. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **19**, 2641-2653. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2020115>
 - [17] Sun, M. (2009) Interactions of Elementary Waves for the Aw-Rascle Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **69**, 1542-1558. <https://doi.org/10.1137/080731402>
 - [18] Shen, C. (2018) Delta Shock Wave Solution for a Symmetric Keyfitz-Kranzer System. *Applied Mathematics Letters*, **77**, 35-43. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.09.016>
 - [19] Raja Sekhar, T. and Sharma, V.D. (2010) Riemann Problem and Elementary Wave Interactions in Isentropic Magnetogasdynamics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 619-636. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.036>
 - [20] Sun, M. (2017) Singular Solutions to the Riemann Problem for a Macroscopic Production Model. *ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **97**, 916-931. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600171>
 - [21] Temple, B. (1983) Systems of Conservation Laws with Invariant Submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, **280**, 781-795. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1983-0716850-2>
 - [22] Yang, H. and Zhang, Y. (2012) New Developments of Delta Shock Waves and Its Applications in Systems of Conservation Laws. *Journal of Differential Equations*, **252**, 5951-5993. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.02.015>
 - [23] Yang, H. and Zhang, Y. (2014) Delta Shock Waves with Dirac Delta Function in Both Components for Systems of Conservation Laws. *Journal of Differential Equations*, **257**, 4369-4402. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.08.009>