

符号非奇异的双星符号模式

沈雨晴

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年9月28日; 录用日期: 2026年10月21日; 发布日期: 2026年10月29日

摘要

本文基于双星符号模式的结构特点, 研究双星符号模式是否符号非奇异。借助组合矩阵论和图论的理论知识, 根据双星符号模式对角线中零元素的数量分情形讨论, 给出了 n 阶双星符号模式符号非奇异的具体结构。该研究结果丰富了树符号模式理论, 对符号模式矩阵的相关研究提供了一点新思路, 具有一定借鉴意义。

关键词

符号模式, 双星符号模式, 符号非奇异

Sign-Nonsingular Double-Star Sign Patterns

Yuqing Shen

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: September 28, 2026; accepted: October 21, 2026; published: October 29, 2026

Abstract

This paper investigates whether a double-star sign pattern is sign-nonsingular based on its structural characteristics. With the aid of theories from combinatorial matrix theory and graph theory, we discuss different cases according to the number of zero entries on the diagonal of a double-star sign pattern, and present the concrete structures for an n -order double-star sign pattern to be sign-nonsingular. The obtained results enrich the theory of tree sign patterns, offer some new ideas for relevant research on sign pattern matrices, and possess certain reference value.

Keywords

Sign Pattern, Double Star Sign Pattern, Sign-Nonsingular



1. 引言

符号模式矩阵是组合矩阵论当中一类十分重要的研究对象。该类矩阵仅依靠矩阵各元素的正负符号开展组合性质分析，与元素实际数值的大小没有关系。符号模式的相关概念最早由 Samuelson [1] 提出，后续 Eschenbach [2] 进一步对定性矩阵分析中的特征值相关内容做了系统性整理。

符号非奇异是符号模式矩阵方向中一个备受关注的核心课题，它刻画了一类定性性质：即某个符号模式对应的所有实矩阵都具备可逆性。Brualdi 与 Shader [3] 搭建起符号模式矩阵研究的基础理论框架；Lim [4] 探讨了非奇异符号模式同正交群之间的结构联系。Mou 等 [5] 针对符号树开展最小秩问题研究，从图的结构角度讨论符号树矩阵的秩约束；焦旸 [6] 围绕 4 阶双星符号模式，探究其允许代数正的结构条件，拓展了双星类符号模式的研究视角。

在各类符号模式当中，树符号模式结构相对简单，内在规律清晰，得到众多学者的关注。星符号模式可以看作一类特殊的树符号模式。Yubin 等人 [7] 围绕星符号模式的潜在稳定性展开讨论；MacGillivray 等 [8] 完整刻画了谱任意星型符号模式；Catral 等 [9] 对树符号模式的谱任意相关问题做了综述梳理。Li H H 与 Li J S [10] 研究过双星符号模式的潜在幂零特性，但并未针对它的符号非奇异属性做系统性分析。作为另一类典型的树型符号模式，双星符号模式在符号非奇异方面，仍然缺少完整的结构刻画结果。

结合上述已有研究成果，本文选取 n 阶双星符号模式作为研究对象，借助行列式以及特征多项式的分析手段，以对角元中零元素的数量为依据划分不同情形进行讨论，推导出使双星符号模式满足符号非奇异的充要条件，以此完善树符号模式方向的相关理论。

2. 预备知识

定义 2.1 [3] 若矩阵中所有元素取自集合 $\{+, -, 0\}$ ，则称该矩阵为符号模式。

定义 2.2 [3] 设 A 是符号模式，若任取实方阵 $M \in Q(A)$ ， M 是非奇异矩阵，则称 A 符号非奇异。

引理 2.3 [3] 设 A 是符号模式方阵， $M \in Q(A)$ 。则 A 符号非奇异当且仅当 M 的行列式的标准展开式中至少有一项非零，并且所有非零项的符号都相同。

引理 2.4 [4] 设 A 是符号模式，则 A 符号非奇异当且仅当 $-A$ ， PAP^T 符号非奇异。

3. 符号非奇异的 n 阶双星符号模式

双星图可由两颗星的中心顶点之间连一条边得到，该图依旧保留两颗星各自的中心顶点与叶顶点结构。对于组合对称的符号模式 A ，若将其伴随图 $G(A)$ 去掉全部环之后所得的图为双星图，则称 A 为双星符号模式。

符号模式 A 形如：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m & \beta_{m+1} \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \gamma_m & & & \alpha_m & \\ \gamma_{m+1} & & & & \alpha_{m+1} & \beta_{m+2} & \cdots & \beta_n \\ & & & & \gamma_{m+2} & \alpha_{m+2} & & \\ & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & \gamma_n & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

其中 $\beta_i, \gamma_i \in \{+, -\}$, $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, $n \geq 4$ 且 $2 \leq m \leq n-2$ 。称 A 是双星符号模式, 记为 $A(m, n)$ 。

下面以 $A(3, 5)$ 为例简单介绍:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ \gamma_3 & & \alpha_3 & & \\ \gamma_4 & & & \alpha_4 & \beta_5 \\ & & & \gamma_5 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

其中 $\beta_i, \gamma_i \in \{+, -\}$, $i \in \{2, 3, \dots, 5\}$ 。

任取矩阵 $M \in Q(A)$, 则令

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\ c_2 & a_2 & & & \\ c_3 & & a_3 & & \\ c_4 & & & a_4 & b_5 \\ & & & c_5 & a_5 \end{pmatrix}$$

则

$$f_M(x) = \left[\prod_{j=1}^3 (x - a_j) - \sum_{i=2}^3 b_i c_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^3 (x - a_j) \right] \left[\prod_{j=4}^5 (x - a_j) - b_5 c_5 (x - a_5) \right] - b_4 c_4 \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq 4}}^5 (x - a_j).$$

令 $x=0$, 则

$$\det M = \prod_{j=1}^5 a_j - \sum_{i_1=2}^4 b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^5 a_j - b_5 c_5 \prod_{j=1}^3 a_j + b_5 c_5 \sum_{i_1=2}^3 b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^3 a_j$$

若 a_2, a_3 都为 0, 则 $\det M = 0$, 此时 A 不是符号非奇异的。所以, 如果 A 符号非奇异, 那么 a_2, a_3 中零元的个数为 0 或 1。因此可以分这两种情况, 结合引理 2.3, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 通过讨论得到 A 符号非奇异的具体形式。推广这种方法到 n 阶, 可得到如下定理。

定理 2.1 设 A 是一个 $n(n \geq 4)$ 阶双星符号模式, 则 A 符号非奇异, 当且仅当 A 或 $-A$ 通过置换相似满足如下结构条件:

1) 左星叶顶点对应的对角元 $a_2, \dots, a_m$ 中零元至多一个, 右星叶顶点对应的对角元 $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中零元至多一个。

2) 各星的叶顶点对应边乘积 $b_{i_1} c_{i_1}$ 和 $b_{i_2} c_{i_2}$ 的符号, 结合两个中心顶点对应的对角元 a_1 和 a_{m+1} , 保证行列式所有的非零展开项符号相同。

例:

$$\begin{pmatrix} + & + & \cdots & + & - & \cdots & \cdots & - \\ + & \# & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ + & & & \ddots & & & & \\ - & & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & \# & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ - & & & & & & & + & + & \cdots & + & - & \cdots & - \\ & & & & & & & + & \# & & & & & \\ & & & & & & & \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & + & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & - & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \vdots & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & - & & & & & & \# \end{pmatrix}$$

证明: 设 A 是一个 $n(n \geq 4)$ 阶双星符号模式。任取矩阵 $M \in Q(A)$, 则令

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_m & b_{m+1} \\ c_2 & a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_m & & & a_m & \\ c_{m+1} & & & a_{m+1} & b_{m+2} & \cdots & b_n \\ & & & c_{m+2} & a_{m+2} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & c_n & & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $b_i, c_i, i \in \{2, 3, \dots, n\}$ 都是非零实数。

由文献[10]可知, 双星特征多项式可拆分为两个星矩阵对应的特征多项式相乘, 再减去分支间连接元素所对应的交叉项。

$$f_M(x) = \left[\prod_{j=1}^m (x - a_j) - \sum_{i=2}^m b_i c_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^m (x - a_j) \right] \left[\prod_{j=m+1}^n (x - a_j) - \sum_{i=m+2}^n b_i c_i \prod_{\substack{j=m+2 \\ j \neq i}}^n (x - a_j) \right] - b_{m+1} c_{m+1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq m+1}}^n (x - a_j).$$

令 $x = 0$,

$$\det M = \prod_{j=1}^m a_j - \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^m a_j - \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n a_j + \sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n a_j.$$

若 $a_2, \dots, a_m$ 中有 2 个及以上元素为 0, 则 $\det M = 0$, 此时 A 不是符号非奇异的。同理, 若 $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中有 2 个及以上元素为 0, 则 $\det M = 0$, 此时 A 不是符号非奇异的。所以, 如果 A 符号非奇异, 那么 $a_2, \dots, a_m$ 中零元的个数为 0 或 1, $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中零元的个数为 0 或 1。因此, 分以下四种情况讨论。

1) $a_2, \dots, a_m$ 中只有一个元素为 0, $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中只有一个元素为 0。

不妨设 $a_{i_1} = 0, i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}, a_{i_2} = 0, i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$ 。则

$$\det M = b_{i_1} c_{i_1} b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n a_j.$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异。

2) $a_2, \dots, a_m$ 中只有一个元素为 0, $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中元素均非 0。

不妨设 $a_{i_1} = 0, i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$ 。记 $a_2, \dots, a_m$ 中负元个数为 s , $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中负元个数为 t 。

a) $a_{m+1} = 0$ 。

$$\det M = (-1)^{s+t-2} b_{i_1} c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j|.$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_2} c_{i_2} > 0$; 或 $b_{i_2} c_{i_2} < 0$ 。

b) $a_{m+1} > 0$ 。

$$\det M = (-1)^{s+t} b_{i_1} c_{i_1} \left(\sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| + \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_2} c_{i_2} > 0$ 。

c) $a_{m+1} < 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t} b_{i_1} c_{i_1} \left(\sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| - \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_2} c_{i_2} < 0$ 。

3) $a_2, \dots, a_m$ 中元素均非 0, $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中只有一个元素为 0。

不妨设 $a_{i_2} = 0$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 记 $a_2, \dots, a_m$ 中负元个数为 s , $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中负元个数 t 。

a) $a_1 = 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t-2} b_{i_2} c_{i_2} \sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j|.$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$, 均满足 $b_{i_1} c_{i_1} > 0$; 或 $b_{i_1} c_{i_1} < 0$ 。

b) $a_1 > 0$.

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{s+t-2} b_{i_2} c_{i_2} \sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| + (-1)^{s+t} b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \\ &= (-1)^{s+t} b_{i_2} c_{i_2} \left(\sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| + \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \right). \end{aligned}$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$, 均满足 $b_{i_1} c_{i_1} > 0$ 。

c) $a_1 < 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t} b_{i_2} c_{i_2} \left(\sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$, 均满足 $b_{i_1} c_{i_1} < 0$ 。

4) $a_2, \dots, a_m$ 中元素均非 0, $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中元素均非 0。

不妨设 $a_2, \dots, a_m$ 中负元个数为 s , $a_{m+2}, \dots, a_n$ 中负元个数为 t 。

a) $a_{m+1} = 0$.

① $a_1 > 0$.

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{s+t-2} \sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| + (-1)^{s+t} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \\ &= (-1)^{s+t-2} \left(\sum_{i_1=2}^m b_{i_1} c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| + \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2} c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \right) \end{aligned}$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} > 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} > 0$; 或 $b_{i_1}c_{i_1} > 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$.

② $a_1 < 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t-2} \left(\sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| - \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} > 0$; 或 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$.

③ $a_1 = 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t-2} \sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j|.$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} > 0$, $b_{i_2}c_{i_2} > 0$; 或 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$. $b_{i_1}c_{i_1} > 0$, $b_{i_2}c_{i_2} < 0$; 或 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} > 0$.

b) $a_{m+1} \neq 0$.

① $a_{m+1} > 0$, $a_1 > 0$.

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{s+t} \prod_{j=1}^n |a_j| + (-1)^{s+t} \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| + (-1)^{s+t} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| \\ &\quad + (-1)^{s+t-2} \sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| \\ &= (-1)^{s+t} \left(\prod_{j=1}^n |a_j| + \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| + \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| + \sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| \right) \end{aligned}$$

由 $\prod_{j=1}^n |a_j|$ 一项为正, 根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, $b_i c_i > 0$.

② $a_{m+1} > 0$, $a_1 < 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t+1} \left(\prod_{j=1}^n |a_j| - \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| + \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| - \sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| \right)$$

由 $\prod_{j=1}^n |a_j|$ 一项为正, 根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m+1\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} > 0$.

③ $a_{m+1} > 0$, $a_1 = 0$.

$$\det M = (-1)^{s+t-2} \left(\sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| + \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m+1\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} > 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} > 0$; 或 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} > 0$ 。

④ $a_{m+1} < 0$, $a_1 > 0$ 。

$$\det M = (-1)^{s+t+1} \left(\prod_{j=1}^n |a_j| + \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| - \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| - \sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m+1\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} > 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$ 。

⑤ $a_{m+1} < 0$, $a_1 < 0$ 。

$$\det M = (-1)^{s+t+2} \left(\prod_{j=1}^n |a_j| - \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| - \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_2, m+1}}^n |a_j| + \sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| \right).$$

由 $\prod_{j=1}^n |a_j|$ 一项为正, 根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m+1\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$ 。

⑥ $a_{m+1} < 0$, $a_1 = 0$ 。

$$\det M = (-1)^{s+t-2} \left(\sum_{i_1=2}^m b_{i_1}c_{i_1} \sum_{i_2=m+2}^n b_{i_2}c_{i_2} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1, i_2, m+1}}^n |a_j| - \sum_{i_1=2}^{m+1} b_{i_1}c_{i_1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i_1}}^n |a_j| \right).$$

根据引理 2.3 可得, A 符号非奇异当且仅当其行列式中所有的非零展开项对应的符号相同, 即对于所有 $i_1 \in \{2, 3, \dots, m+1\}$, $i_2 \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$, 均满足 $b_{i_1}c_{i_1} > 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$; 或 $b_{i_1}c_{i_1} < 0$ 且 $b_{i_2}c_{i_2} < 0$ 。

4. 结论

本文主要研究了 n 阶双星符号模式的符号非奇异问题。利用特征多项式方法, 分情况讨论。给出了 n 阶双星符号模式符号非奇异的具体结构。本文是将星符号模式进行推广, 研究双星符号模式, 丰富了树符号模式的研究, 为后续树符号模式组合性质的研究提供了一定参考意义。

参考文献

- [1] Samuelson, P.A. (1947) Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press.
- [2] Eschenbach, C.A. (1987) Eigenvalue Classification in Qualitative Matrix Analysis. Clemson University.
- [3] Brualdi, R.A. and Shader, B.L. (1995) Matrices of Sign-Solvable Linear Systems. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511574733>
- [4] Lim, C.C. (1993) Nonsingular Sign Patterns and the Orthogonal Group. *Linear Algebra and Its Applications*, **184**, 1-12. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(93\)90366-v](https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)90366-v)
- [5] Mou, G.F., Huang, J. and Zhong, Q. (2017) The Minimum Rank Problem of Signed Trees. *Journal of Southwest University (Natural Science Edition)*, **39**, 69-74.
- [6] Jiao, Y. (2022) The Double Star Sign Pattern Matrix with Order 4 That Allow Algebraic Positivity. *Advances in Applied Mathematics*, **11**, 7960-7967. <https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111843>
- [7] Gao, Y.B. and Li, J.S. (2001) On the Potential Stability of Star Sign Pattern Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **327**, 61-68. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(00\)00329-3](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00329-3)
- [8] MacGillivray, G., Tifenbach, R.M. and van den Driessche, P. (2005) Spectrally Arbitrary Star Sign Patterns. *Linear Algebra and Its Applications*, **400**, 99-119. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.11.021>

- [9] Catral, M., Olesky, D.D. and van den Driessche, P. (2009) Allow Problems Concerning Spectral Properties of Sign Pattern Matrices: A Survey. *Linear Algebra and Its Applications*, **430**, 3080-3094.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.01.031>
- [10] Li, H.H. and Li, J.S. (2009) On Potentially Nilpotent Double Star Sign Patterns. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **59**, 489-501. <https://doi.org/10.1007/s10587-009-0033-3>