

时滞网络周期事件触发的有限时间同步控制

李嘉鹏, 魏 强*

北华大学计算机科学技术学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2026年9月26日; 录用日期: 2026年10月19日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

研究时变耦合时滞网络在周期事件触发牵制控制下的有限时间实用同步。采用有界时间基、平滑反馈及正性离散内部变量, 建立误差包络和有限进入时间上界, 并以保持值估计降低保守性。进一步构造Lorenz参考域上的显式平方和证书, 给出可认证的局部同步配置。标量认证算例在RMS容差0.04下的统一时间上界为1.796 s, 满足4 s期限; 动态触发较静态减少85.4%的局部更新。原Lorenz仿真基准中, 五种机制按相同搜索预算和共同窗口容差比较: 0.01容差下, 缩放动态较调参后的缩放静态少更新30.9%, 但不优于全部未缩放及参考方案。冻结参数后的10组独立初值中, 两种静态机制持续达标率为100%, 三种动态机制均为90%。理论认证与仿真配置分别说明; 结论为有限时间实用同步, 不是有限时间精确同步。

关键词

时滞网络, 周期事件触发, 有限时间同步, 牵制控制, 进入时间上界

Finite-Time Synchronization Control of Delayed Networks via Periodic Event Triggering

Jiapeng Li, Qiang Wei*

College of Computer Science and Technology, Beihua University, Jilin Jilin

Received: September 26, 2026; accepted: October 19, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

Practical finite-time synchronization of networks with time-varying coupling delays is studied under periodic event-triggered pinning control. Bounded time-base feedback and a positivity-

*通讯作者。

preserving discrete internal variable yield an error envelope and a finite entry-time bound. A held-value estimate reduces conservatism. An explicit sum-of-squares certificate on an invariant Lorenz reference domain further yields a certified local synchronization configuration. For the scalar certified example, the uniform bound is 1.796 s at an RMS tolerance of 0.04, meeting the 4 s deadline; dynamic triggering reduces local updates by 85.4% relative to static triggering. The original Lorenz simulation benchmark compares five mechanisms with equal search budgets and common window tolerances. At a tolerance of 0.01, scaled dynamic triggering uses 30.9% fewer updates than tuned scaled static triggering, but does not outperform all unscaled and reference schemes. With parameters frozen, both static mechanisms maintain the tolerance in all ten held-out trials, while each dynamic mechanism succeeds in nine, revealing a trade-off between updates and post-deadline accuracy. The certified and simulation configurations are distinguished explicitly. The conclusions concern practical, not exact, finite-time synchronization.

Keywords

Delayed Network, Periodic Event Triggering, Finite-Time Synchronization, Pinning Control, Entry-Time Bound

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复杂网络结构影响同步与控制资源，小世界和优先连接模型是常用对象[1][2]。牵制同步依赖动力学、图谱、增益及时滞[3]；有限时间、固定时间和预设时间控制分别关注有限收敛、与初值无关的时间界及指定期限[4]-[6]。本文研究进入误差邻域并持续保持的实用同步，区别于精确同步和有限时域有界。

按需更新可减少传输[7]。Girard [8]引入内部动态变量，Heemels 等[9]采用周期检测，相关进展见综述[10]。Li 等[11]和 Zhao 等[12]研究分段光滑网络的动态及混合触发预设时间同步。本文以 Lorenz 系统[13]评价精度与通信权衡。

近期，Yang 等[14]研究时变时滞随机网络的动态周期事件触发镇定；Li 等[15]通过模型和预测单元处理传输时滞；Cai 等[16]研究时滞网络的事件触发脉冲牵制同步；Wang 等[17]给出非线性网络周期触发的输入到状态稳定性和性能框架。表 1 列出比较边界；动态变量、周期检测及牵制控制本身并非本文新概念。

Table 1. Related work and scope
表 1. 相关工作与本文边界

相关工作	研究对象或机制	本文的处理边界
Yang 等[14]	随机时滞网络、指数镇定	确定性网络、终端容差判据
Li 等[15]	传输时滞、模型与预测补偿	耦合时滞、保持误差信息
Cai 等[16]	事件触发脉冲与牵制同步	连续状态、采样时刻更新反馈信息
Wang 等[17]	非线性网络控制、ISS 及性能	显式范数包络与工作域自洽条件

本文闭环估计采样保持误差和时滞历史差分，得到部分牵制、单位内耦合及有界反馈下的误差包络与进入时间；结合认证算例、共同容差搜索和独立初值评价更新收益，不声称机制普遍最优。

2. 网络模型与数字控制实现

2.1. 误差系统与有限时间实用同步目标

考虑固定无向连通图, 邻接矩阵为 $A = [a_{ij}]$, Laplacian 矩阵为 L 。每个节点状态 $x_i \in \mathbb{R}^n$, 参考轨迹满足 $\dot{s} = f(s)$ 。本文取内耦合矩阵为 I_n , 模型为

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t - \tau(t)) - x_i(t - \tau(t))] + b_i u_i(t). \quad (1)$$

其中 $c > 0$, $b_i \in \{0, 1\}$, 受控集合为 $\mathcal{P}$, $q = |\mathcal{P}| > 0$, $B = \text{diag}(b_i)$ 。时滞连续且满足 $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$ 。以下判断不使用时滞导数。向量范数默认取欧氏范数, 矩阵范数取其诱导 2-范数, 并假定节点向量场局部 Lipschitz 且参考解在所讨论时域内存在。令 $e_i = x_i - s$, $e = \text{col}(e_1, \dots, e_N)$, $r = \|e\|$, 则 RMS 同步误差为

$$E(t) = \frac{r(t)}{\sqrt{N}}. \quad (2)$$

由 $L1 = 0$, 延迟状态耦合与延迟误差耦合等价。初始误差历史在 $[-\bar{\tau}, 0]$ 上给定且 Lipschitz 连续。期限目标为 $E(T_p) \leq \varepsilon$, 持续目标还要求 $E(t) \leq \varepsilon$ 对所有 $t \geq T_p$ 成立。数值检查记 $E_{\text{post}} = \max_{t \in [T_p, T_f]} E(t)$, 持续达标时间为仿真窗口中此后不再超差的最早时刻。

定义 1 (有限时间实用同步) 对给定历史和容差 $\varepsilon > 0$, 若闭环解存在于 $[0, \infty)$, 且存在有限 T_ε 使所有 $t \geq T_\varepsilon$ 均有 $E(t) \leq \varepsilon$, 则称实现有限时间实用同步。同一有限上界对指定历史集合成立时, 称具有统一时间保证; 给定期限目标还要求此上界不超过 T_p 。

定义 2 (有限时间精确同步) 若存在有限 T_s 使所有 $t \geq T_s$ 均有 $e(t) = 0$, 且时滞历史与保持输入保证同步流形不变, 则称精确同步。本文针对定义 1, 仿真窗口达标不替代无限时域证明。

2.2. 有界增益反馈与周期触发

物理采样时刻为 $t_\ell = \ell h$, $h > 0$ 。受控节点维护最新发送的误差 $\hat{e}_i$ 。为避免与理想非光滑控制律混淆, 直接采用下列平滑反馈:

$$u_i(t) = -k_0 \hat{e}_i(t) - k_1 \mu(t) \phi_d(\hat{e}_i(t)), [\phi_d(v)]_j = \frac{v_j}{(|v_j| + d_s)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

这里 $k_0 > 0$, $k_1 \geq 0$, $d_s > 0$ 是平滑参数。时间基取

$$\mu(t) = \begin{cases} T_p / \max\{T_p - t, \varepsilon_\mu\}, & 0 \leq t < T_p, \\ 0, & t \geq T_p, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon_\mu \leq T_p. \quad (4)$$

因此 $0 \leq \mu \leq \bar{\mu} = T_p / \varepsilon_\mu$ 。“有界”指时间基及反馈增益, 不指全状态空间的输入饱和界。终端后仅保留线性反馈。保持误差信息时仍按本地时钟计算 $\mu(t)$, 故局部更新数不等于输入计算次数。

在 t_ℓ , 先使用内部变量 $\eta_{i,\ell}$ 评估触发条件:

$$\|\hat{e}_i(t_\ell^-) - e_i(t_\ell)\|^2 \geq \chi_\ell^2 [\sigma \|e_i(t_\ell)\|^2 + \eta_{i,\ell}]. \quad (5)$$

其中 $\sigma \geq 0$, $\chi_\ell = \max\{(T_p - t_\ell)/T_p, \chi_{\min}\}$ ($t_\ell < T_p$), 终端后取 1, 且 $0 < \chi_{\min} \leq 1$ 。触发时令 $\hat{e}_i(t_\ell^+) = e_i(t_\ell)$, 否则保持旧值。记触发处理后的残差为 $\delta_{i,\ell}^+ = \hat{e}_i(t_\ell^+) - e_i(t_\ell)$ 。初始时刻统一初始化 $\hat{e}_i(0) = e_i(0)$ 。

内部变量采用以下离散滤波与投影, 而非未经说明的连续微分方程:

$$\eta_{i,\ell+1} = \eta_f + \max\left\{0, a_h (\eta_{i,\ell} - \eta_f) + b_h \left[\rho \|e_i(t_\ell)\|^2 - \gamma \|\delta_{i,\ell}^+\|^2\right]\right\}, \quad (6)$$

$$a_h = e^{-\lambda h}, b_h = (1 - a_h)/\lambda. \quad (7)$$

其中 $\lambda, \rho, \gamma > 0$, $\eta_f > 0$, $\eta_{i,0} \geq \eta_f$ 。式(6)在下一事件判断前执行, 驱动量在采样区间内冻结, 保证 $\eta_{i,\ell} \geq \eta_f$ 。静态对照保持相同反馈和 χ_ℓ , 仅移除式(5)的 $\eta_{i,\ell}$ 项。

设计原理: η 是带记忆的自适应阈值裕度。 λ 以约 $1/\lambda$ 的时间尺度衰减已有裕度, ρ 按当前误差补充裕度, γ 按采样后保持残差扣减裕度, 底值和投影保证非负。误差大而残差小时可积累裕度、减少更新; 残差增大时触发趋敏感。它调节灵敏度, 不直接预测未来误差。

整定步骤: ① 确定工作域、容差和期限, 估计 ω 与图谱, 调节 c 、 k_0 及受控集合使 β 为正。 ω 越大通常需要更强耗散; 增大 c 也会放大时滞项, 须联合检查式(12)。② 由 k_1 、时间基上限和平滑参数计算 K , 初选 $Kh < 1$ 的采样周期, 核对式(13)~(16); 采用式(11a)时按替代条件检查。③ 按记忆时间选 λ , 依据式(10)限制 ρ/λ 、初始裕度和底值, 使 b_R 满足精度预算。④ 若终端后超差, 可减小 σ 、 ρ 及初始裕度, 或增大 λ 、 γ ; γ 仅在采样后残差非零时扣减裕度。闭环更新数不保证随参数单调变化。每次调整均复核理论条件及独立初值的更新数、峰值和持续达标率; 表 3 只提供数值起点。

3. 有限时间实用同步的充分条件

3.1. 工作域与反馈常数

假设存在半径 $R > 0$, 使对参考轨迹及所有 $\|e\| \leq R$ 的节点误差, 一致成立

$$\|f(s+v) - f(s)\| \leq F\|v\|, v^\top [f(s+v) - f(s)] \leq \omega\|v\|^2. \quad (8)$$

$F \geq 0$, ω 可正可负。若这些条件只在局部成立, 应先明确该工作域和参考轨迹范围; 下文通过自治条件保证误差不会离开该域。令 $\ell_L = \|L\|_2$, 并选取可验证的上界替代 ℓ_L 也不影响结论。

引理 1 (平滑反馈界) 式(3)的映射满足 $v^\top \phi_d(v) \geq 0$, 且全局 Lipschitz 常数可取 $L_\phi = d_s^{\alpha-1}$ 。因此控制映射对保持误差的增益可统一上界为

$$K = k_0 + k_1 \bar{\mu} L_\phi. \quad (9)$$

证明: 分量函数与其输入同号。对标量 $z \neq 0$ 求导, 得到 $(d_s + \alpha|z|)/(|z| + d_s)^{2-\alpha}$, 其绝对值不超过 $d_s^{\alpha-1}$; 零点处导数具有相同上界。逐分量应用均值定理即得结论。此处使用平滑映射本身的性质, 不借用理想分数幂反馈的有限时间结论。

局部 SOS 动力学界: 精细时滞分析可结合 Wirtinger 型积分不等式[18]; 这里采用平方和(SOS)证书[19]直接认证多项式节点的区域性质。对第 5.1 节的 Lorenz 节点, 令 $z = s_3 - 38$ 、 $V_s = s_1^2 + s_2^2 + z^2$ 及 $S^2 = 23104/15$, 有

$$\dot{V}_s = -2(V_s - S^2) - 18s_1^2 - \frac{10}{3} \left(z + \frac{152}{5} \right)^2. \quad (9a)$$

因此 $\Omega = \{s: V_s \leq S^2\}$ 正不变。参考初值 $(2, -3, 8)^\top$ 满足 $V_s(0) = 913 < S^2$, 故区域界在全时域有效。记 $g(s) = S^2 - V_s$, $a = \omega + 1$, $m = \omega + 10 - S^2/(4a)$, 式(20)的矩阵满足下列恒等式:

$$\omega\|v\|^2 - v^\top C(s)v = a \left(v_2 + \frac{zv_1}{2a} \right)^2 + a \left(v_3 - \frac{s_2v_1}{2a} \right)^2 + \frac{5}{3}v_3^2 + mv_1^2 + \frac{(s_1v_1)^2}{4a} + g(s)\frac{v_1^2}{4a}. \quad (9b)$$

当 $a > 0$ 且 $m \geq 0$ 时, 式(9b)是“平方和加区域约束乘平方和”的显式证书, 可逐项展开核验。取 $\omega = 7317/500 = 14.634$, 则 $m = 45967/11725500 > 0$, 得到式(8)的单边动力学界。该 SOS 族的最小可行值

为 $\left(-11+\sqrt{81+S^2}\right)/2 \approx 14.63248$; 同一区域的 Gershgorin 界为 $S/2-1 \approx 18.62312$, 所取认证界降低约 21.4%。

此外, s 与 $s+v$ 之间的线段位于中心 $(0,0,38)^\top$ 、半径 $S+R$ 的球内。对 Jacobian 作配方, 有 $\|J(x)\|_F^2 = 2[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 38)^2] + 3673/9 - x_2^2 - (x_3 - 48)^2$, 由均值定理可取

$$F = \sqrt{2(S+R)^2 + 3673/9}. \quad (9c)$$

由此得到可直接代入定理 1 的区域常数; 参考域正不变性与误差工作域自洽性分别核验。第 5.1 节给出新增局部认证配置, 原 Lorenz 大时滞仿真配置仍单独评价。

3.2. 采样间隔内部的保持误差

只把受控节点残差堆叠为 δ 。定义

$$\bar{\eta}_R = q\eta_f + \max \left\{ \sum_{i \in \mathcal{P}} (\eta_{i,0} - \eta_f), \frac{\rho R^2}{\lambda} \right\}, \quad b_R = \sqrt{\sigma R^2 + \bar{\eta}_R}. \quad (10)$$

引理 2 (内部变量与采样误差)在轨迹尚未离开 $r < R$ 的时间段内, 有 $\sum_{i \in \mathcal{P}} \eta_{i,\ell} \leq \bar{\eta}_R$ 和 $\|\delta(t_\ell^*)\| \leq b_R$ 。若 $Kh < 1$, 则几乎处处的误差导数及整个采样区间内的残差满足

$$\|\dot{e}(t)\| \leq \tilde{D}_R := \frac{(F + c\ell_L + K)R + Kb_R}{1 - Kh}, \quad \|\delta(t)\| \leq b_R + h\tilde{D}_R. \quad (11)$$

证明: 记 $z_\ell = \sum_{i \in \mathcal{P}} (\eta_{i,\ell} - \eta_f)$ 。由式(6)的投影及负项符号, 有 $z_{\ell+1} \leq a_h z_\ell + b_h \rho R^2$, 递推即得式(10)。事件处理后, 已触发节点的残差为零, 未触发节点满足式(5)的反向不等式; 利用 $\chi_\ell \leq 1$ 求和, 得到采样时刻的残差界。

在 $[t_\ell, t_{\ell+1})$ 内, $\hat{e}_i$ 不变, 故残差增加量至多为误差导数积分。记该区间截至当前时刻的导数本质上确界为 D_* , 则 $\|\delta(t)\| \leq b_R + hD_*$ 。由式(1)、(3)、(8)及历史误差范数不超过 R , 有 $D_* \leq (F + c\ell_L + K)R + K(b_R + hD_*)$ 。在 $Kh < 1$ 时解此不等式, 得到式(11)。这一估计明确包含采样间隔内的增长量, 因而不需要假定连续监测的触发约束始终成立。

保持值估计的改进: 记受控节点保持误差的堆叠为 $\hat{e}_p$ 。采样后其范数不超过 $R + b_R$, 且在整个采样区间内保持不变。直接对原误差方程估计即可得到

$$\|\dot{e}(t)\| \leq \tilde{D}_R := (F + c\ell_L + K)R + Kb_R, \quad \|\delta(t)\| \leq b_R + h\tilde{D}_R. \quad (11a)$$

证明: 节点项、延迟耦合项及保持反馈项的范数分别不超过 FR 、 $c\ell_L R$ 及 $K(R + b_R)$; 相加后在采样区间内积分即得式(11a)。该估计无需 $Kh < 1$; 原条件 $Kh < 1$ 成立时, 新界等于 $(1 - Kh)D_R$, 不大于式(11)的界。

3.3. 自洽误差包络与期限精度定理

定义

$$\beta = \lambda_{\min}(cL + k_0 B) - \omega, \quad W_R = c\ell_L \bar{\tau} D_R + K(b_R + hD_R), \quad r_\infty = W_R / \beta. \quad (12)$$

定理 1 (可核算的期限精度保证)假设式(8)在半径 R 内一致成立, 初始历史满足 $\sup_{[-\bar{\tau}, 0]} \|e\| \leq R_0 < R$, 其 Lipschitz 常数不超过 D_R , 且

$$Kh < 1, \quad \beta > 0, \quad \max\{R_0, r_\infty\} < R. \quad (13)$$

则闭环误差留在半径 R 内, 并满足

$$E(t) \leq \frac{R_0 e^{-\beta t} + r_\infty (1 - e^{-\beta t})}{\sqrt{N}}, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

特别地, 若

$$R_0 e^{-\beta T_p} + r_\infty (1 - e^{-\beta T_p}) \leq \sqrt{N} \varepsilon, \quad r_\infty \leq \sqrt{N} \varepsilon, \quad (15)$$

则终端及其后的持续精度目标成立。对于 $R_0 > \sqrt{N} \varepsilon > r_\infty$, 可使用等价的期限要求

$$T_p \geq \frac{1}{\beta} \log \frac{R_0 - r_\infty}{\sqrt{N} \varepsilon - r_\infty}. \quad (16)$$

式(16)中的常数应按候选 T_p 对应的 $\bar{\mu}$ 计算; 它不是与时间基参数脱离的任意期限结论。

证明: 用 $e_\tau = e(t - \tau(t))$ 表示历史误差。将延迟耦合严格分解为

$$-c(L \otimes I_n) e_\tau = -c(L \otimes I_n) e + c(L \otimes I_n)(e - e_\tau). \quad (17)$$

控制输入分解为作用于当前误差的反馈与由保持残差引起的扰动。由引理 1, 后一项范数不超过 $K \|\delta\|$ 。当前非线性反馈的内积非正, 只保留其符号而不将其扩大为全网络的幂次耗散。在 $r > 0$ 时, 以误差范数的上右 Dini 导数表示, 得

$$D^+ r \leq -\beta r + c \ell_L \|e - e_\tau\| + K \|\delta\|. \quad (18)$$

在零点处, 相应不等式由扰动范数界成立。历史函数与当前轨迹的导数界给出 $\|e - e_\tau\| \leq \bar{\tau} D_R$ 。代入引理 2 即得 $D^+ r \leq -\beta r + W_R$ 。比较原理给出式(14)。若存在首次离开半径 R 的时刻, 则在此前所有估计有效, 而式(13)和比较解保证误差严格小于 R , 与首次离开相矛盾。因此域内估计可延续。最后, 式(14)的右端处于其终端值和极限值之间, 式(15)遂同时保证终端及持续精度。证毕。

说明 1: 式(13)是充分条件; 不满足不代表系统必然失败。统一增益、阈值及导数上界带来保守性, 非线性反馈仅以耗散符号进入证明, 故定理不证明时间基的独立加速作用或通信最优性。若改用式(11a), 将后文 D_R 统一替换为 $\tilde{D}_R$, 并以其约束初始历史的 Lipschitz 常数, 可删去 $Kh < 1$; β 、工作域及精度条件仍须满足。原算例保留较保守的式(11)常数, 其认证继续有效。

说明 2: 每个节点每个采样时刻至多触发一次, 事件间隔至少为 hs , 有限时段内次数有限。该无 Zeno 性质来自周期检测结构, 与数值积分步长无关。

3.4. 误差邻域的有限进入时间

定义 $\varepsilon_\infty = r_\infty / \sqrt{N}$, 该量是式(14)对应的保守残差水平, 不是实际误差必然达到的下界。由定理 1 可直接得到以下结论。

推论 1 (有限时间实用同步) 在定理 1 的假设下, 对固定控制器及任意给定的 $\varepsilon > \varepsilon_\infty$, 定义

$$T_{\text{cert}}(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & R_0 \leq \sqrt{N} \varepsilon, \\ \frac{1}{\beta} \log \frac{R_0 - r_\infty}{\sqrt{N} \varepsilon - r_\infty}, & R_0 > \sqrt{N} \varepsilon. \end{cases} \quad (18a)$$

则 $T_{\text{cert}}(\varepsilon) < \infty$, 并且

$$E(t) \leq \varepsilon, \quad t \geq T_{\text{cert}}(\varepsilon). \quad (18b)$$

因此网络在定义 1 意义下实现有限时间实用同步。若 $T_{\text{cert}}(\varepsilon) \leq T_p$, 则同时满足给定期限及其后的持续保持要求。

证明: 式(14)给出 $\sqrt{N}E(t) \leq r_\infty + (R_0 - r_\infty)e^{-\beta t}$ 。当 $R_0 \leq \sqrt{N}\varepsilon$ 时, 包络初值及极限值均不超过 $\sqrt{N}\varepsilon$, 可取零进入时间; 当 $R_0 > \sqrt{N}\varepsilon > r_\infty$ 时, 包络严格下降, 解其不超过 $\sqrt{N}\varepsilon$ 的时刻即得式(18a), 此后保持成立。证毕。

适用范围: 推论 1 仅对严格大于保守残差水平的容差给出有限进入时间, 不能取零容差。容差趋近该残差水平时, 时间界通常趋于无穷。时间界依赖初始历史上界, 故有界集合的统一认证不等于全局固定时间保证; 改变期限会改变时间基上限, 须重新检验条件。

实际实现保留平滑参数、正阈值底值及正采样周期。证明没有建立 $D^+V \leq -aV^p$ ($a > 0, 0 < p < 1$) 这一类精确有限时间稳定性条件[4]。不能在证明时删去这些非理想项, 再以实际程序作为同一控制器的验证。

4. 实验设计与理论认证算例

4.1. 统一实现与比较口径

采用四阶 Runge-Kutta 积分, 各子步按子时刻线性插值查询延迟误差。积分步长为 Δt , 采样周期为 h , $h/\Delta t$ 为正整数; 最小时滞不小于积分步长。跨越 T_p 的左侧积分区间使用时间基左极限, 再切换终端后反馈。初始误差历史为常数, 节点与参考共同积分。

连续基准在每个 RK 子步使用当前误差; 周期基准每隔 h 更新三个受控节点; 静态与动态方案分别使用不含和包含内部变量的式(5), 共享采样网格。仅统计 $(0, T_f)$ 内实际局部更新, 不含初始化。一次更新指一个节点发送完整误差向量, 不计耦合通道, 不等于全网络带宽或能耗。

输入成本为 $J_u = \int_0^{T_f} \sum_{i \in \mathcal{P}} \|u_i(t)\|^2 dt$, 按积分网格左矩形和计算, 另记输入范数峰值。Lorenz 试验无物理量纲, 该指标不表示焦耳; 连续方案更新数记为“不适用”。独立 NumPy 程序与 C++内核在 0~4.02 s 交叉核验: 动态方案 RMS 最大差 7.11×10^{-15} , 均为 1061 次事件; 第 5.6 节参考机制最大差 1.49×10^{-10} , 均为 425 次。逐节点事件时刻一致, 核验覆盖延迟读取、期限左极限和终端后反馈; 积分分辨率另见第 5.4 节。

4.2. 满足定理条件的非线性网络

采用 $N=10, n=1$ 、 $f(x)=0.2 \tanh x$ 、 $s=0$, 全局可取 $F=\omega=0.2$, 孤立零平衡点并非收缩系统。图以两节点一条边初始化, 新节点按度优先连接两个已有节点; 图种子 17, 受控节点 1、4、8。初值独立取自 $[-0.5, 0.5]$, 种子 91, 整个初值盒满足 $R_0 = \sqrt{10}/2 < 2$ 。

取 $R=2$, $c=4$, $k_0=28$, $k_1=0.002$, $\alpha=0.62$, $d_s=10^{-4}$, $T_p=4$, $\varepsilon_\mu=0.2$, $h=10^{-5}$ s, $\Delta t=5 \times 10^{-6}$ s; $\sigma=10^{-6}$, $\eta_0=10^{-10}$, $\eta_f=10^{-12}$, $\lambda=2.2$, $\rho=10^{-8}$, $\gamma=0.001$ 。时滞为 $\tau(t)=4 \times 10^{-5} + 10^{-5} \sin(2t)$, 故 $\bar{\tau}=5 \times 10^{-5}$ s。该组小阈值与小时滞用于验证充分条件, 不能与后续 Lorenz 组的通信次数直接比较。

利用有理数 LDL 分解, 验证 $cL+k_0B-2.69I \succ 0$ 和 $7.511I-L \succ 0$, 相关精确正主元随代码提供。取向保守方向舍入的常数, 可以核算

$$K \leq 29.33, b_R \leq 0.002005, D_R \leq 119.25, \beta \geq 2.49, W_R \leq 0.273. \quad (19)$$

于是 $Kh < 0.000294$, $r_\infty < 0.110 < R$; 对整个初值盒, 式(14)在 4 s 的上界小于 0.0348, 容差 0.04 满足式(13)~(15)。种子 91 的终端误差为 5.63×10^{-6} 。图 1(a)显示理论包络与轨迹; 整个初值盒的保证来自条件检验。

固定 $T_p=4$ s 的控制器, 以保守常数 $\beta=2.49$ 、 $W_R=0.273$ 、 $R_0=\sqrt{10}/2$ 计算得 $\varepsilon_\infty=0.273/\left(2.49\sqrt{10}\right) < 0.034672$ 。对 $\varepsilon=0.04$, 式(18a)给出约 1.794995 s, 向上取整可取 $T_{\text{cert}}=1.796$ s, 小于 4 s 且适用于整个常值历史初值盒。容差 0.05 和 0.10 时, 上界分别为 1.372 s 和 0.790 s; 这些是解析包络计算值, 不是仿真归零时刻。

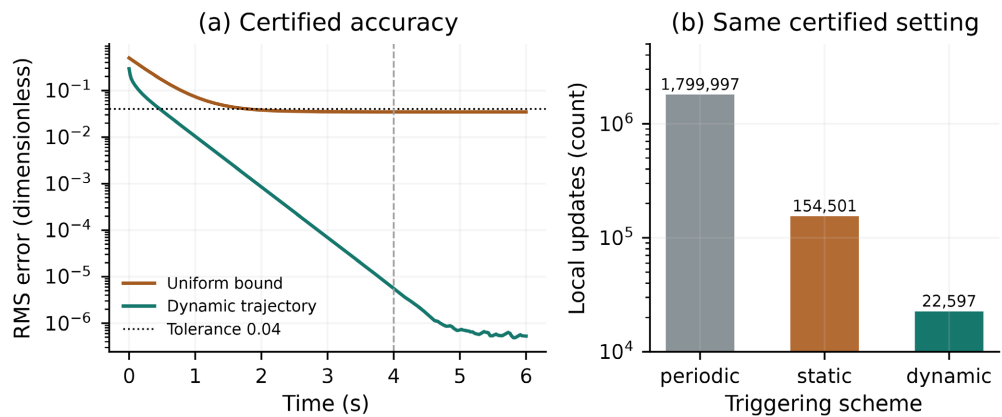


Figure 1. Certified envelope and updates
图 1. 认证包络与更新代价

4.3. 同一认证配置下的精度与更新代价

保持第 4.2 节全部配置不变，比较连续、周期、静态和动态反馈(表 2)。静态采样残差不超过动态方案的 b_r ，故共同保守包络对两者均适用，在整个初值盒上保证 0.04 容差；表 2 实际指标对应种子 91。

Table 2. Certified accuracy and costs
表 2. 认证配置的精度与代价

方案	$E(T_p)$	E_{post}	更新次数	J_u
连续反馈	5.68228×10^{-6}	5.68228×10^{-6}	不适用	2.698151
周期采样	5.68215×10^{-6}	5.68215×10^{-6}	1799997	2.698386
静态触发	5.67828×10^{-6}	5.67828×10^{-6}	154501	2.699500
动态触发	5.62979×10^{-6}	5.62979×10^{-6}	22597	2.699506

动态方案较静态减少 85.4%的局部更新，两者终端及窗口误差同量级，输入平方积分几乎相同且动态略高，主要收益为更新节省(图 1(b))。该比例仅为本配置观测值，不是初值盒的统一保证，也未代表静态阈值最优；共同容差调参见第 5.6 节。

5. Lorenz 网络的实用同步与更新代价试验

5.1. 设置与理论适用范围

取 Lorenz 动力学 $f(x) = (10(x_2 - x_1), x_1(28 - x_3) - x_2, x_1x_2 - 8x_3/3)^\top$ 。基准图及受控节点与 4.2 节相同，参考初值为 $(2, -3, 8)^\top$ ，各节点三个分量先独立取 $U[-12, 12]$ ，再对第三分量加 18，初值种子为 91。误差历史为初始误差常数， $T_f = 6\text{ s}$ 。其余参数见表 3。

Table 3. Lorenz benchmark parameters
表 3. Lorenz 基准参数

参数	取值	参数	取值
N, n	10, 3	受控节点	1, 4, 8

续表

c	4	k_0, k_1	28, 2.2
T_p, ε	4 s, 0.01	T_f	6 s
$h, \Delta t$	2×10^{-4} , 5×10^{-5} s	ε_μ	0.12 s
α, d_s	0.62, 10^{-4}	$\chi_{\min}$	0.01
σ, η_0	0.08, 0.35	η_f	10^{-8}
λ, ρ, γ	2.2, 0.025, 0.18	$\tau(t)$	$0.03 + 0.015 \sin(2t)$ s

选取 $\varepsilon_\mu = 0.12$, 使基准 $Kh \approx 0.491 < 1$; 若取 0.012, 则 $Kh \approx 4.86$ 。这一选择用于限制采样间隔内的反馈敏感度, 不意味着完整的式(13)已经成立。对 Lorenz 节点, 有精确恒等式

$$v^T [f(s+v) - f(s)] = v^T C(s)v, \quad C(s) = \begin{pmatrix} -10 & (38-s_3)/2 & s_2/2 \\ (38-s_3)/2 & -1 & 0 \\ s_2/2 & 0 & -8/3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

在参考初值处, $\lambda_{\max}(C) = 10.2229$, 已大于表 3 基准的 $\lambda_{\min}(cL + k_0B) = 2.6953$ 。因此第 3 节的欧氏范数充分条件不能认证表 3 参数; 第 5.2~5.6 节对该基准的结果属于数值性能评估, 不能外推为其初值工作域的理论时间保证。

新增 Lorenz 局部理论认证: 沿用第 4.2 节的图、受控集合、阈值与内部变量参数, 以及 $k_1, \alpha, d_s, T_p, \varepsilon_\mu$; 取 $c = 40$ 、 $k_0 = 280$ 、 $h = 10^{-6}$ s, $\tau(t) = (0.8 + 0.2 \sin(2t)) \times 10^{-6}$ s。参考初值仍为 $(2, -3, 8)^T$; 初始误差历史取常值且 $\|e(0)\| \leq \sqrt{10}/2$, 工作域 $R = 2$ 。由式(9a)~(9c)取 $\omega = 14.634$ 、 $F = 62$ 。原图谱界缩放后给出 $\lambda_{\min}(cL + k_0B) > 26.9$, 故 $\beta \geq 12.266$ 。利用式(11a)及向保守方向舍入的常数, 有

$$K \leq 281.33, b_R \leq 0.002005, \tilde{D}_R \leq 1288.11, W_R \leq 1.314. \quad (20a)$$

于是 $r_\infty \leq 1.314/12.266 < 0.10713 < R$, $\varepsilon_\infty < 0.03388$; 在 $\varepsilon = 0.04$ 下, 式(18a)给出 $T_{\text{cert}} < 0.355$ s, 满足 4 s 期限及其后持续精度要求。常值历史的 Lipschitz 常数为零。以上是充分条件的解析认证, 不是新增仿真通信数据; 其微秒级时滞与采样、较强增益及局部初值条件必须同时满足, 不能用于认证表 3 的另一组参数。

5.2. 基准同步与局部更新

图 2 与表 4 采用表 3 原 Lorenz 数值基准。动态误差在 4 s 为 0.002812、4~6 s 峰值为 0.008854, 均低于 0.01, 但终端后误差高于静态及连续基准。图 3 给出三个受控节点的内部变量及事件时刻, 未受控节点不参与内部变量平均。

Table 4. Lorenz performance with matched settings

表 4. 相同配置的 Lorenz 性能

方案	$E(T_p)$	E_{post}	更新次数	J_u	持续达标时间/s
连续反馈	0.002683	0.002914	不适用	63589.0	3.5949
周期采样	0.002686	0.002917	89997	63639.6	3.5951
静态触发	0.002690	0.002930	2468	66554.7	3.5950
动态触发	0.002812	0.008854	1089	66488.7	3.6049

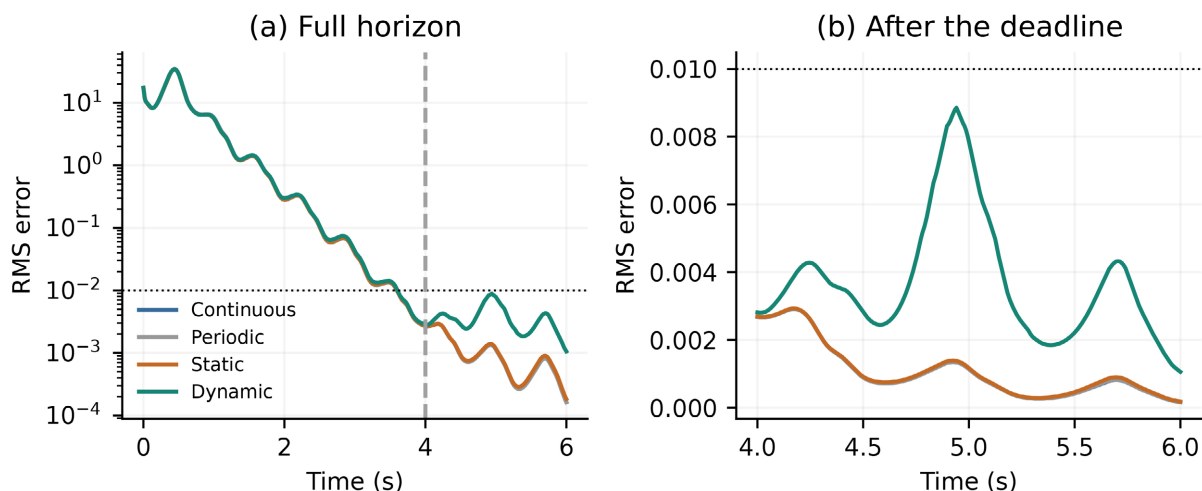


Figure 2. Baseline and post-deadline errors

图 2. 基准及终端后误差

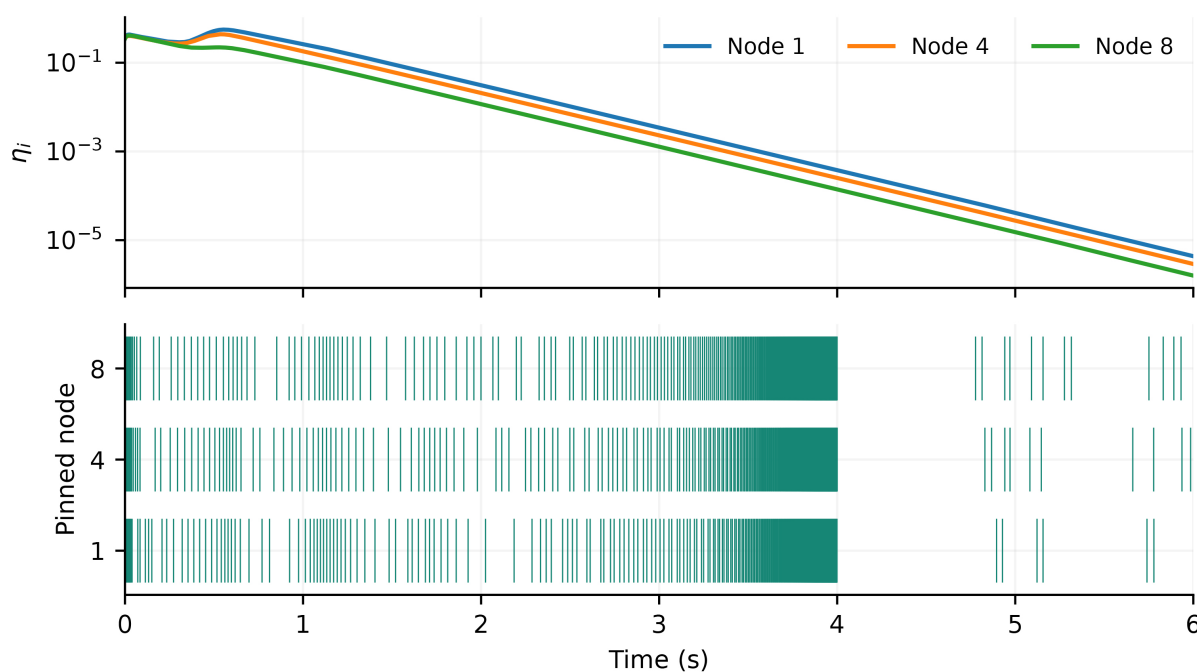


Figure 3. Internal variables and event times

图 3. 内部变量与事件时刻

动态方案相对静态减少 $(2468 - 1089)/2468 = 55.9\%$ 的局部更新, 牵制输入成本仅降低约 0.10%, 且高于连续反馈成本。这里的主要收益是更新减少, 并非同步速度和输入成本同时占优。

5.3. 消融与配对初值试验

保持采样周期和其他参数不变, 分别取消阈值缩放、把终端前时间基替换为常数 1、移除非线性项, 并增加未缩放静态触发对照。常数时间基对照在 T_p 后同样置零, 以免混入不同的终端后控制律。

表 5 中, 完整方案的终端误差小于无缩放动态方案, 但更新更多, 说明固定参数下存在精度 - 更新权衡; 共同窗口精度比较见第 5.6 节。

Table 5. Mechanism ablations
表 5. 机制消融

方案	$E(T_p)$	E_{post}	更新次数	0.01 终端/持续达标
动态基准	0.002812	0.008854	1089	是/是
动态、无阈值缩放	0.005832	0.005832	550	是/是
动态、终端前常数增益	0.005800	0.011787	348	是/否
动态、仅线性反馈	0.009233	0.013648	393	是/否
静态、无阈值缩放	0.002726	0.002967	1660	是/是

固定图和参数, 以种子 100~129 生成 30 组配对初值(表 6、图 4)。两方案终端均 30/30 达标; 动态种子 108、116 在 4~6 s 内再次超差, 持续成功为 28/30。每组相对更新减少比例的均值为 53.6%; 按初值对 bootstrap 重采样 10,000 次的 95%百分位区间为[52.7%, 54.6%]。该区间仅描述固定图及该初值分布下的更新收益。

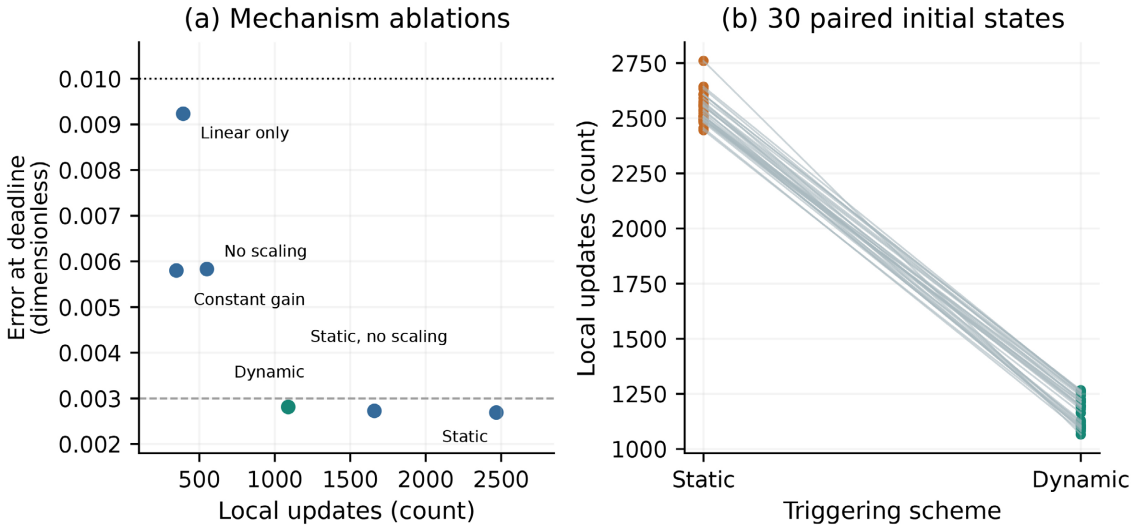


Figure 4. Ablations and paired trials
图 4. 消融与配对初值比较

Table 6. Thirty paired trials
表 6. 30 组配对初值结果

方案	更新次数均值 $\pm$ 样本标准差	终端误差中位数	最大终端误差	终端/持续成功组数
静态	2543.2 ± 65.9	0.000790	0.004001	30/30; 30/30
动态	1179.5 ± 65.9	0.000850	0.003845	30/30; 28/30

5.4. 积分分辨率与物理采样周期

固定 $h = 2 \times 10^{-4}$ s 改变积分步长(表 7)。最细两级终端误差、更新次数及终端后峰值分别相差约 0.24%、0.37%和 2.06%; 基准与最细级终端误差相差约 1.48%。四种细网格均支持 0.01 容差结论, 但阈值附近的积分差异可改变事件序列, 不能据此宣称混合实现全局四阶收敛。

Table 7. Integration-step checks at fixed sampling
表 7. 固定采样周期的步长检查

$\Delta t/s$	$E(T_p)$	E_{post}	更新次数	J_u
2×10^{-4}	0.002959	0.008997	1096	66488.53
1×10^{-4}	0.002829	0.009071	1094	66488.63
5×10^{-5}	0.002812	0.008854	1089	66488.67
2.5×10^{-5}	0.002861	0.008989	1095	66488.71
1.25×10^{-5}	0.002854	0.008807	1099	66488.72

固定 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ，取 $h = 10^{-4}, 2 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-4} \text{ s}$ ，更新数依次为 1100、1095、1068、982，终端误差为 0.002962、0.002861、0.002959、0.003046。最后一组虽不满足原判据的 $Kh < 1$ 仍数值达标，体现充分条件的保守性。基准最小事件间隔为 0.0008 s；无 Zeno 结论仍来自采样结构(如图 5 所示)。

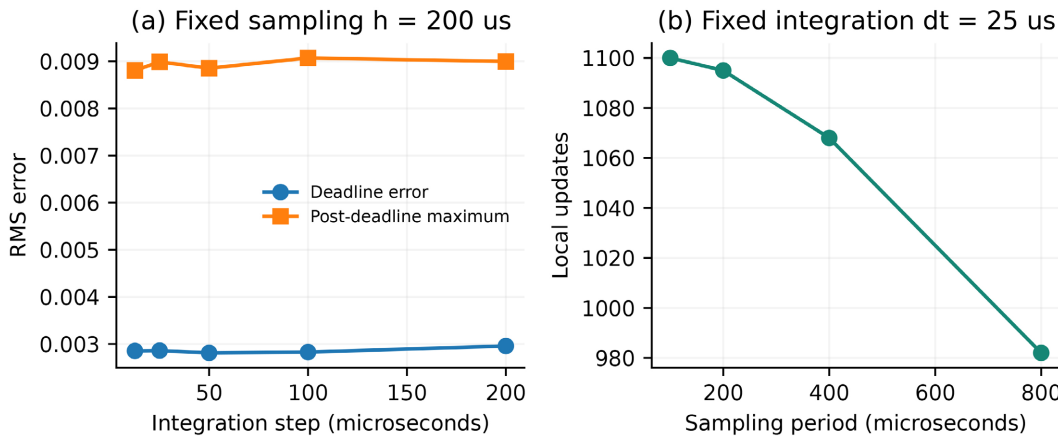


Figure 5. Integration and sampling resolution
图 5. 积分与采样分辨率

5.5. 网络、期限与实现压力测试

对 BA、WS 及 ER 各生成 5 个图，种子 31~35，初值种子 91。BA 沿用优先连接初始化；WS 为 10 节点、4 近邻、重连概率 0.3；ER 以边概率 0.35 独立生成并拒绝不连通图，不强制加边。三类图未匹配边数，试验检验跨实例适用性，不将差异单独归因于拓扑类别。

表 8 表明连通性不足以保证该 Lorenz 配置达标。固定基准图取 $T_p = 2, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 \text{ s}$ ，动态终端误差依次为 0.240525、0.031664、0.011980、0.002812、0.001020、0.000894；前三组不满足 0.01 容差(图 6)。

Table 8. Five trials per graph family
表 8. 各类拓扑的 5 组测试

拓扑	静态终端/持续	动态终端/持续	动态终端误差范围
BA	5/5; 5/5	5/5; 4/5	0.000395~0.005278
WS	5/5; 5/5	5/5; 5/5	0.0000446~0.001140
连通 ER	2/5; 1/5	2/5; 1/5	0.000310~0.343718

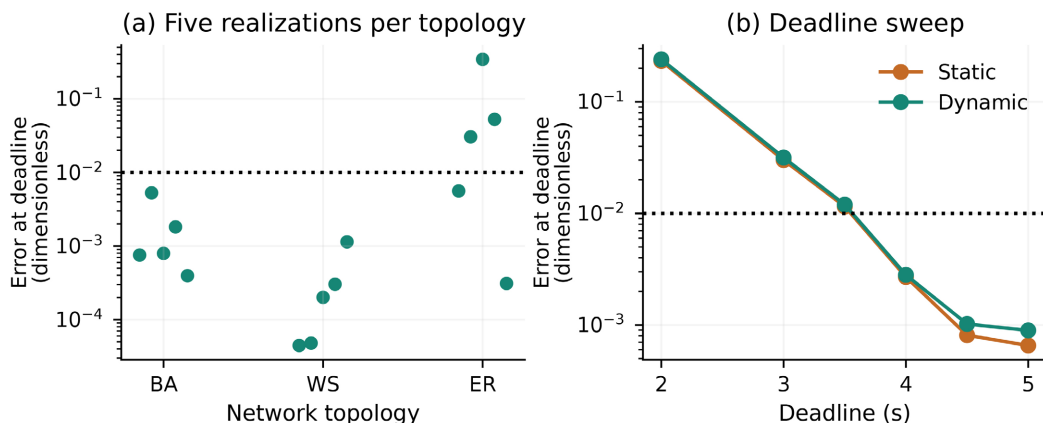


Figure 6. Graph and deadline effects

图 6. 图实例与期限的影响

其余测试各改变一个因素。时滞均值固定 0.03 s、振幅取 0、0.005、0.015、0.025 s，动态终端误差为 0.002043~0.003343；零振幅仍为 0.03 s 常时滞。噪声在各采样时刻、各受控分量独立取 $U[-\nu, \nu]$ ，种子 2026，两方案共享序列；结果仅为两档噪声的单次配对压力测试。

噪声幅度为 $\nu = 10^{-4}$ 和 10^{-3} 时，动态更新 1470、5711 次，静态 36,903、51,622 次，终端均达标。内部裕度缓解了近零噪声敏感性，但噪声仍显著提高更新负担。噪声及饱和均不在定理 1 假设内。

逐分量饱和 $|u_{ij}| \leq U_{\max}$ 下，取 $U_{\max} = 50, 100, 300$ ，动态终端误差为 0.000177、0.000251、0.002806，均达标。裁剪改变暂态，个别误差变小不说明饱和普遍有利或这些阈值最优。

扩为 30 节点，受控比例 30% (1, 4, 7, ..., 28)。原时滞下终端 RMS 约 2.99×10^3 ，明显失败；时滞改为 $0.01 + 0.005 \sin(2t)$ s 后，终端误差为 1.91×10^{-5} ，至 6 s 峰值为 0.001085。规模扩展需重新核查图谱和时滞，该实例不提供最大允许时滞界。

5.6. 共同容差、参考机制与独立初值验证

固定第 5.1 节表 3 基准的反馈、图、期限和网格，以 $E_{\text{post}} \leq \varepsilon$ 为共同约束，比较缩放静态、缩放动态、未缩放静态、未缩放动态和 Girard 型周期化参考五种机制。“未缩放”指始终 $\chi_\ell = 1$ ；每种均使用 8 个候选，搜索预算相同。

参考机制采用 Girard [8] 式(7)~(8)的结构，取线性衰减、二次范数信号及 $\theta = 1$ ，改为相同采样网格检测，并对采样后冻结驱动动作精确指数更新：

$$\zeta_{i,\ell+1} = a_h \zeta_{i,\ell} + b_h \left[\sigma \|e_i(t_\ell)\|^2 - \|\delta_{i,\ell}^+\|^2 \right], \zeta_{i,0} = \eta_0. \quad (21)$$

$$\|\hat{e}_i(t_\ell^-) - e_i(t_\ell)\|^2 \geq \sigma \|e_i(t_\ell)\|^2 + \zeta_{i,\ell}. \quad (22)$$

该参考不含正底值、投影及期限缩放。由事件后 $\|\delta_{i,\ell}^+\|^2 \leq \sigma \|e_i(t_\ell)\|^2 + \zeta_{i,\ell}$ ，在 $a_h \geq b_h$ 及 $\zeta_{i,0} \geq 0$ 时有 $\zeta_{i,\ell+1} \geq (a_h - b_h) \zeta_{i,\ell} \geq 0$ ；本配置满足此非负性条件。网络、时变反馈及周期检测与原文完整闭环不同，故不沿用其连续检测稳定性定理，也不声称复现原文性能排序。

预先固定倍率 $\mathcal{A} = \{0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1, 3, 10, 30\}$ 及容差 $\{0.003, 0.005, 0.01, 0.02\}$ 。四种本文机制将表 3 的 $\sigma, \eta_0, \eta_f, \rho, \gamma$ 同乘 $a \in \mathcal{A}$ (静态忽略内部参数)；参考机制仅将 σ, ζ_0 同乘倍率，其余不变。40 个候选均在种子 91 运行；各容差下选可行候选中更新最少者，同数时依次取较小峰值、较小倍率。表 9 的“-”表示无可行候选。

Table 9. Minimum updates at common tolerances
表 9. 共同容差下的最少更新数

方案	$\varepsilon = 0.003$	$\varepsilon = 0.005$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.02$
缩放静态	1575	1575	1575	1575
缩放动态	-	1275	1089	978
未缩放静态	977	977	977	977
未缩放动态	814	792	550	371
Girard 型周期化参考	1388	782	472	327

在 0.01 窗口容差下，缩放动态较调参后的缩放静态少更新 30.9%，但多于其余三种机制；0.003 容差下无可行缩放动态候选。表 9 采用窗口约束，不能与仅看终端误差的评价混用；误差对倍率未必单调，结果仅是离散候选集内最优。

在 0.01 容差下冻结五组已选参数，以未参与选择的种子 200~209 进行 10 组配对独立初值测试，不再调参。表 10 的平均更新数统计 0~6 s，最大 E_{post} 为 10 组在 4~6 s 内各自峰值的最大值，持续达标率为整个窗口不超差的组数占比。五种机制终端均达标，三种动态机制各有 1 组窗口超差，均保留统计；图 7 分别展示候选扫描和独立测试。

Table 10. Five mechanisms at a common tolerance
表 10. 五种机制的共同容差比较

方案	倍率 a	平均更新次数	终端达标	持续达标率	最大 E_{post}
缩放静态	10	1717.8	10/10	100% (10/10)	0.005553
缩放动态	1	1173.7	10/10	90% (9/10)	0.011891
未缩放静态	10	1003.5	10/10	100% (10/10)	0.007085
未缩放动态	1	584.8	10/10	90% (9/10)	0.010508
Girard 型周期化参考	1	616.0	10/10	90% (9/10)	0.010623

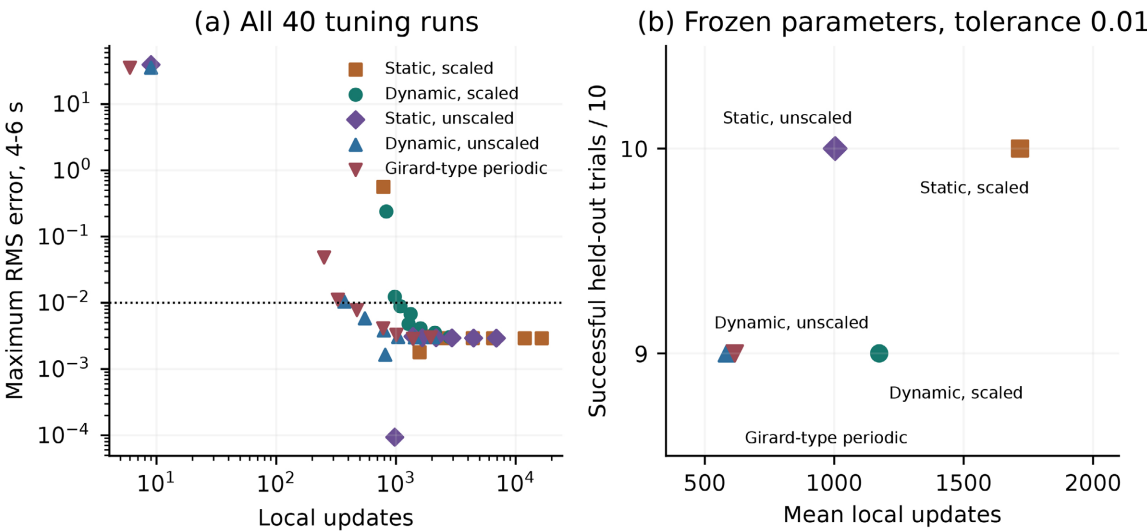


Figure 7. Candidate scan and held-out trials
图 7. 候选扫描与独立测试

表 10 中, 缩放动态节省 31.7%更新, 但峰值由 0.005553 升至 0.011891; 未缩放动态节省 41.7%, 峰值由 0.007085 升至 0.010508, 持续达标率均由 100%降至 90%。两静态机制中, 缩放方案峰值更低, 未缩放方案更新更少。独立测试中未缩放动态平均更新最少, 参考机制为 616.0 次, 两者持续达标率均 90%; 种子 91 上参考机制的 472 次优势未保持至独立测试均值。

6. 结论

本文建立周期事件触发实用同步的误差包络和进入时间, 并以保持值估计及显式 SOS 证书降低部分保守性。标量认证算例的 1.796 s 上界满足 4 s 期限, 动态更新节省 85.4%; 新增 Lorenz 局部配置给出 0.355 s 以内的解析时间界。原 Lorenz 基准的数值结果表明, 更新次数、终端后峰值及持续达标率应联合评价。结论不涉及精确有限时间同步。

基金项目

吉林省科技发展计划项目(吉林省自然科学基金), 编号: 220101137JC。

参考文献

- [1] Watts, D.J. and Strogatz, S.H. (1998) Collective Dynamics of ‘Small-World’ Networks. *Nature*, **393**, 440-442. <https://doi.org/10.1038/30918>
- [2] Barabási, A.L. and Albert, R. (1999) Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, **286**, 509-512. <https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>
- [3] Yu, W., Chen, G. and Lü, J. (2009) On Pinning Synchronization of Complex Dynamical Networks. *Automatica*, **45**, 429-435. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.07.016>
- [4] Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2000) Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**, 751-766. <https://doi.org/10.1137/s0363012997321358>
- [5] Polyakov, A. (2012) Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 2106-2110. <https://doi.org/10.1109/tac.2011.2179869>
- [6] Xu, L. and Liu, X. (2023) Prescribed-Time Synchronization of Multiweighted and Directed Complex Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **68**, 8208-8215. <https://doi.org/10.1109/tac.2023.3292148>
- [7] Tabuada, P. (2007) Event-Triggered Real-Time Scheduling of Stabilizing Control Tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 1680-1685. <https://doi.org/10.1109/tac.2007.904277>
- [8] Girard, A. (2015) Dynamic Triggering Mechanisms for Event-Triggered Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **60**, 1992-1997. <https://doi.org/10.1109/tac.2014.2366855>
- [9] Heemels, W.P.M.H., Donkers, M.C.F. and Teel, A.R. (2013) Periodic Event-Triggered Control for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**, 847-861. <https://doi.org/10.1109/tac.2012.2220443>
- [10] Ge, X., Han, Q.L., Zhang, X.M. and Ding, D. (2021) Dynamic Event-Triggered Control and Estimation: A Survey. *International Journal of Automation and Computing*, **18**, 857-886. <https://doi.org/10.1007/s11633-021-1306-z>
- [11] Li, X., Wu, H. and Cao, J. (2023) Prescribed-Time Synchronization in Networks of Piecewise Smooth Systems via a Nonlinear Dynamic Event-Triggered Control Strategy. *Mathematics and Computers in Simulation*, **203**, 647-668. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.07.010>
- [12] Zhao, X., Wu, H., Cao, J. and Wang, L. (2025) Prescribed-Time Synchronization for Complex Dynamic Networks of Piecewise Smooth Systems: A Hybrid Event-Triggering Control Approach. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **24**, Article No. 11. <https://doi.org/10.1007/s12346-024-01166-x>
- [13] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:dnf>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2)
- [14] Yang, X., Li, A. and Zhu, Q. (2025) Dynamic Periodic Event-Triggered Control of Stochastic Complex Networks with Time-Varying Delays. *Neural Networks*, **190**, Article 107659. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2025.107659>
- [15] Li, W., Yu, H., Dhullipalla, M.H. and Shi, D. (2024) Model-Based Dynamic Periodic Event-Triggered Control for Nonlinear Networked Control Systems with Transmission Delays. 2024 *IEEE 63rd Conference on Decision and Control (CDC)*, Milan, 16-19 December 2024, 1696-1701. <https://doi.org/10.1109/cdc56724.2024.10886156>
- [16] Cai, J., Yu, J., You, Z. and Jing, C. (2026) Event-Triggered Synchronization for Delayed Dynamic Complex Networks

-
- via Impulsive Control Strategy. *AIMS Mathematics*, **11**, 11173-11193. <https://doi.org/10.3934/math.2026460>
- [17] Wang, W., Postoyan, R., Nesic, D. and Heemels, W.P.M.H. (2020) Periodic Event-Triggered Control for Nonlinear Networked Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**, 620-635. <https://doi.org/10.1109/tac.2019.2914255>
- [18] Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013) Wirtinger-Based Integral Inequality: Application to Time-Delay Systems. *Automatica*, **49**, 2860-2866. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.05.030>
- [19] Parrilo, P.A. (2000) Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology. <https://www.mit.edu/~parrilo/pubs/files/thesis.pdf>