

γ -弱对角占优矩阵与严格 γ -对角占优矩阵的放缩关系

张峻伟¹, 陈悦希¹, 郎迎璞¹, 鲍宇轩¹, 王超¹, 田万福², 翟林²

¹沈阳航空航天大学民用航空学院, 辽宁 沈阳

²沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2026年9月28日; 录用日期: 2026年10月21日; 发布日期: 2026年10月29日

摘 要

本文通过构造正对角矩阵 D , 证明 γ -弱对角占优矩阵可经双边正对角放缩转化为严格 γ -对角占优矩阵, 从而得到其为非奇异 H -矩阵。该结果建立了两类矩阵之间的放缩联系, 为进一步研究 γ -弱对角占优矩阵的性质提供了工具。进一步比较其与相关矩阵类的关系, 并讨论参数 γ 的端点情形及可行集合。

关键词

γ -弱对角占优矩阵, 严格 γ -对角占优矩阵, 正对角放缩, H -矩阵

A Scaling Relationship between γ -Weakly Diagonally Dominant Matrices and Strictly γ -Diagonally Dominant Matrices

Junwei Zhang¹, Yuexi Chen¹, Yingying Lang¹, Yuxuan Bao¹, Chao Wang¹, Wanfu Tian², Lin Zhai²

¹School of Civil Aviation, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

²College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: September 28, 2026; accepted: October 21, 2026; published: October 29, 2026

Abstract

We construct a positive diagonal scaling matrix to show that every γ -weakly diagonally dominant matrix can be transformed by a two-sided diagonal scaling into a strictly γ -diagonally dominant

文章引用: 张峻伟, 陈悦希, 郎迎璞, 鲍宇轩, 王超, 田万福, 翟林. γ -弱对角占优矩阵与严格 γ -对角占优矩阵的放缩关系[J]. 应用数学进展, 2026, 15(10): 401-410. DOI: 10.12677/aam.2026.1510424

matrix. Consequently, every γ -weakly diagonally dominant matrix is a nonsingular H-matrix. This result establishes a scaling relationship between the two classes of matrices. We also compare this class with related matrix classes and examine the endpoint cases and the admissible set of the parameter γ .

Keywords

γ -Weakly Diagonally Dominant Matrix, Strictly γ -Diagonally Dominant Matrix, Positive Diagonal Scaling, Nonsingular H-Matrix

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文研究由分块行和与列和共同刻画的 γ -弱对角占优矩阵, 并通过正对角放缩证明其为非奇异 H-矩阵. 矩阵逆范数界与最小奇异值估计是数值线性代数中的基本问题. Nedović 和 Arsić[1]给出了 H-矩阵的新放缩判据及其应用, 进一步丰富了相关理论.

Huang [2]于 2008 年提出 γ -对角占优矩阵, 并给出了相应的逆范数上界和最小奇异值下界; 赵建兴[3]等于 2015 年进一步研究了严格 γ -对角占优 M-矩阵的逆范数上界. 构造正对角放缩矩阵是研究非奇异 H-矩阵及其子类的常用方法. 2018 年, Zhao 等人[4]中提出了 H-矩阵的新子类——DZT 矩阵, 并利用 M-矩阵的相关性质证明其为非奇异 H-矩阵; 2023 年, Zeng 等人[5]中通过构造放缩矩阵, 进一步证明 DZT 矩阵是非奇异 H-矩阵; 2024 年, 刘丹、王诗云、周立新、吕振华在文献[6]中给出了 DZT 矩阵放缩矩阵的一般构造形式. 上述工作表明, 正对角放缩是研究非奇异 H-矩阵的重要工具. 与仅使用行和的 S-严格对角占优条件相比, 本文的条件同时引入行和、列和及参数 γ . 因此, 有必要明确其与已有矩阵类的关系, 并给出可直接检验的放缩参数区间.

针对这一问题, 本文通过构造正对角放缩矩阵, 建立 γ -弱对角占优矩阵与严格 γ -对角占优矩阵之间的放缩关系, 并由此证明 γ -弱对角占优矩阵是非奇异 H-矩阵, 从而为 γ -对角占优矩阵的进一步研究提供理论基础. 此外, 本文比较该矩阵类与 S-严格对角占优矩阵及 DZT 矩阵的关系, 并讨论 $\gamma=0$ 、 $\gamma=1$ 及一般参数下的可行集合.

2. 预备知识

令 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 表示 n 阶复矩阵的全体, 记 $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$. 对任意 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 采用以下记号:

$$\begin{aligned} r_i(A) &= \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \\ c_i(A) &= \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \\ N^+(A) &= \{i \in \langle n \rangle : |a_{ii}| > r_i(A)\} \\ N^-(A) &= \{i \in \langle n \rangle : |a_{ii}| \leq r_i(A)\} \end{aligned}$$

以下统一记 $N = \langle n \rangle$. 对任意 $S \subseteq N$, 定义分块行和与列和

$$r_i^S(A) = \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq i}} |a_{ik}|, \quad c_i^S(A) = \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq i}} |a_{ki}|.$$

全文的 $N^+(A)$ 和 $N^-(A)$ 均采用上述按行和的划分; 不致混淆时省略集合后的 (A) 。

定义 1: 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 给定 $\gamma \in [0, 1]$ 。若

$$|a_{ii}| > \gamma r_i(A) + (1-\gamma)c_i(A), \forall i \in N$$

则称矩阵 A 为严格 γ -对角占优矩阵。

定义 2: 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $N^+(A) \neq \emptyset$ 、 $N^-(A) \neq \emptyset$ 。给定 $\gamma \in [0, 1]$, 若对所有 $i \in N^+(A)$ 、 $j \in N^-(A)$ 均有

$$\begin{aligned} & \left[|a_{ii}| - \gamma r_i^{N^+}(A) - (1-\gamma)c_i^{N^+}(A) \right] \left[|a_{jj}| - \gamma r_j^{N^-}(A) - (1-\gamma)c_j^{N^-}(A) \right] \\ & > \left[\gamma r_i^{N^-}(A) + (1-\gamma)c_i^{N^-}(A) \right] \left[\gamma r_j^{N^+}(A) + (1-\gamma)c_j^{N^+}(A) \right], \end{aligned}$$

则矩阵 A 为 γ -弱对角占优矩阵。

上述非空条件是定义 2 及下述定理 1 的前提。若 $N^-(A) = \emptyset$, 则 A 已是严格行对角占优矩阵; 若 $N^+(A) = \emptyset$, 则不属于本文定义 2 的适用范围, 不能仅凭交叉不等式对空指标集自动成立而作出判定。下文讨论不同 γ 时, 均保持按行和确定的划分 $N^+(A)$ 、 $N^-(A)$ 不变。

引理 1: 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是严格 γ -对角占优矩阵, 则它是非奇异 H -矩阵。

3. 主要结论

定理 1: 设 A 是定义 2 中的 γ -弱对角占优矩阵, 且 $N^+(A) \neq \emptyset$ 、 $N^-(A) \neq \emptyset$, N^+ 、 N^- 沿用预备知识中的按行和划分。令

$$\begin{aligned} L_j &= \frac{\gamma r_j^{N^+}(A) + (1-\gamma)c_j^{N^+}(A)}{|a_{jj}| - \gamma r_j^{N^-}(A) - (1-\gamma)c_j^{N^-}(A)}, \quad j \in N^-, \\ R_i &= \frac{|a_{ii}| - \gamma r_i^{N^+}(A) - (1-\gamma)c_i^{N^+}(A)}{\gamma r_i^{N^-}(A) + (1-\gamma)c_i^{N^-}(A)}, \quad i \in N^+, \end{aligned}$$

并记 $L = \max_{j \in N^-} L_j$ 、 $R = \min_{i \in N^+} R_i$ 。当 R_i 的分母为零时, 约定 $R_i = +\infty$ 。则 $0 \leq L < R$ 。任取有限的 $X \in (L, R)$, 构造正对角矩阵

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i = \begin{cases} 1, & i \in N^+, \\ X, & i \in N^-. \end{cases}$$

则 $C = DAD$ 为严格 γ -对角占优矩阵, 且 A 和 C 均为非奇异 H -矩阵。

证明: 首先证明有关量的正性和参数区间的非空性。记

$$\begin{aligned} u_i &= |a_{ii}| - \gamma r_i^{N^+}(A) - (1-\gamma)c_i^{N^+}(A), \quad i \in N^+, \\ v_j &= |a_{jj}| - \gamma r_j^{N^-}(A) - (1-\gamma)c_j^{N^-}(A), \quad j \in N^-. \end{aligned}$$

由于 N^+ 内部的行和总和等于列和总和, 且 $|a_{ii}| > r_i(A)$ 对所有 $i \in N^+$ 成立, 故

$$\sum_{i \in N^+} u_i = \sum_{i \in N^+} (|a_{ii}| - r_i^{N^+}(A)) > \sum_{i \in N^+} r_i^{N^-}(A) \geq 0.$$

于是存在 $i_0 \in N^+$ 使 $u_{i_0} > 0$ 。定义 2 的交叉不等式右端非负, 因此 $u_{i_0} v_j > 0$, 从而所有 $v_j > 0$ 。再固定任意 $j \in N^-$, 同理得到所有 $u_i > 0$ 。

当 R_i 的分母为正时, 由交叉不等式除以正数可得 $L_j < R_j$, 对所有 $j \in N^-$ 均成立; 当该分母为零时, $R_i = +\infty$ 。由于两个指标集均有限且非空, 故 $0 \leq L < R$ 。因此可以选取有限的 $X \in (L, R)$, 且 $X > 0$ 。

当 $i \in N^+$ 时, $d_i = 1$, 因而 $|c_{ii}| = |a_{ii}|$ 。由 $c_{ij} = d_i a_{ij} d_j$ 可得

$$r_i(C) = r_i^{N^+}(A) + X r_i^{N^-}(A), \quad c_i(C) = c_i^{N^+}(A) + X c_i^{N^-}(A).$$

因此

$$\begin{aligned} & |c_{ii}| - \gamma r_i(C) - (1-\gamma)c_i(C) \\ &= |a_{ii}| - \gamma \left(r_i^{N^+}(A) + X r_i^{N^-}(A) \right) - (1-\gamma) \left(c_i^{N^+}(A) + X c_i^{N^-}(A) \right) \\ &= u_i - X \left[\gamma r_i^{N^-}(A) + (1-\gamma)c_i^{N^-}(A) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

若括号内的量为正, 则 $X < R \leq R_i$ 保证式(1)大于零; 若该量为零, 则式(1)等于 $u_i > 0$ 。所以

$$|c_{ii}| > \gamma r_i(C) + (1-\gamma)c_i(C), \quad i \in N^+.$$

当 $i \in N^-$ 时, $d_i = X$, 因而 $|c_{ii}| = X^2 |a_{ii}|$, 并且

$$r_i(C) = X r_i^{N^+}(A) + X^2 r_i^{N^-}(A), \quad c_i(C) = X c_i^{N^+}(A) + X^2 c_i^{N^-}(A).$$

代入并提取 X , 得到

$$\begin{aligned} & |c_{ii}| - \gamma r_i(C) - (1-\gamma)c_i(C) \\ &= X^2 |a_{ii}| - \gamma \left(X r_i^{N^+}(A) + X^2 r_i^{N^-}(A) \right) - (1-\gamma) \left(X c_i^{N^+}(A) + X^2 c_i^{N^-}(A) \right) \\ &= X \left[X v_i - \gamma r_i^{N^+}(A) - (1-\gamma)c_i^{N^+}(A) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

由 $X > L \geq L_i$ 及 $v_i > 0$, 式(2)中方括号内的量为正。再由 $X > 0$, 可得

$$|c_{ii}| > \gamma r_i(C) + (1-\gamma)c_i(C), \quad i \in N^-.$$

综上, $C = DAD$ 为严格 γ -对角占优矩阵。由引理 1, C 是非奇异 H -矩阵。记 $\mathcal{M}(B)$ 为矩阵 B 的比较矩阵, 即其对角元为 $|b_{ii}|$, 非对角元为 $-|b_{ij}|$ 。由于 $\mathcal{M}(C) = D\mathcal{M}(A)D$, 且非奇异 M -矩阵在正对角左右缩放下保持, 故 A 也是非奇异 H -矩阵。

4. 与相关矩阵类的比较

首先比较 S -严格对角占优(S -SDD)矩阵。对非空真子集 $S \subset N$, 记 $\bar{S}$ 为 S 在 N 中的补集。其标准条件为[7]

$$\begin{aligned} & |a_{ii}| > r_i^S(A), \quad i \in S, \\ & (|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A)r_j^S(A), \quad i \in S, j \in \bar{S}. \end{aligned}$$

当 $S = N^+(A)$ 时, 第一个条件由 $N^+(A)$ 的定义自动满足, 第二个条件恰为定义 2 在 $\gamma = 1$ 时的交叉不

等式。因此,在这一固定划分下,1-弱对角占优条件与 S -SDD 条件等价。上述等价关系限于 $S = N^+(A)$,并非对任意可选划分的等价刻画。

再比较 DZT 矩阵。根据文献[4] [7],在 $N^-(A) \neq \emptyset$ 时, DZT 条件可表述为:对每个 $j \in N^-(A)$,存在 $k \in N^+(A)$,使得

$$\left(|a_{jj}| - r_j(A) + |a_{jk}|\right)|a_{kk}| > |a_{jk}|r_k(A). \quad (3)$$

这一条件依赖每个非占优行所对应的一个指标,而定义 2 要求两个指标集之间的所有交叉对同时满足不等式。以下两个对称矩阵说明,即使允许 γ 在 $[0,1]$ 内变化,这两类矩阵也一般互不包含。取

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

两者均有 $N^+ = \{1,2\}$ 、 $N^- = \{3\}$,且分块行和与列和相等,所以定义 2 中的条件不依赖 γ 。对 B_1 ,两个交叉对均满足 $3 \times 3 > 2 \times 4$,故它对每个 $\gamma \in [0,1]$ 都是 γ -弱对角占优矩阵。但对 $j=3$,无论取 $k=1$ 还是 $k=2$,式(3)均要求 $(3-4+2) \times 3 > 2 \times 2$,即 $3 > 4$,不成立。因此 B_1 不是 DZT 矩阵。

对 B_2 ,在式(3)中取 $j=3$ 、 $k=2$,得到 $(4-6+3) \times 12 = 12 > 3 \times 3 = 9$,故 B_2 是 DZT 矩阵。然而,定义 2 中 $(i,j)=(1,3)$ 对应的条件要求 $4 \times 4 > 3 \times 6$,不成立。因此 B_2 对任何 $\gamma \in [0,1]$ 都不满足定义 2。这表明本文条件与 DZT 条件提供了不同的可检验判据。

5. 参数 γ 的作用

参数 γ 决定行和与列和在判据中的权重。当 $\gamma=1$ 时,定义 1 为严格行对角占优,定义 2 退化为上一节中取 $S = N^+(A)$ 的 S -SDD 条件,定理 1 给出严格行对角占优的放缩矩阵 DAD 。当 $\gamma=0$ 时,定义 1 为严格列对角占优,定义 2 则成为

$$\left(|a_{ii}| - c_i^{N^+}(A)\right)\left(|a_{jj}| - c_j^{N^-}(A)\right) > c_i^{N^-}(A)c_j^{N^+}(A), i \in N^+, j \in N^-.$$

此时定理 1 给出严格列对角占优的 DAD 。需要注意,这里的 N^+ 、 N^- 仍按 A 的行和确定,因而不能不加说明地将其换为 A^T 的按行和划分。定理 1 的证明对两个端点均适用。

对给定的矩阵 A ,假设 $N^+(A)$ 、 $N^-(A)$ 均非空。为描述全部可行参数,记

$$\begin{aligned} w_i^S(\gamma) &= \gamma r_i^S(A) + (1-\gamma)c_i^S(A), S \subseteq N, \\ F_{ij}(\gamma) &= \left(|a_{ii}| - w_i^{N^+}(\gamma)\right)\left(|a_{jj}| - w_j^{N^-}(\gamma)\right) - w_i^{N^-}(\gamma)w_j^{N^+}(\gamma), \\ \Gamma(A) &= \{\gamma \in [0,1]: F_{ij}(\gamma) > 0 \text{ 对所有 } i \in N^+, j \in N^-\}. \end{aligned} \quad (4)$$

每个 $w_i^S(\gamma)$ 都是仿射函数,因此每个 $F_{ij}(\gamma)$ 都是次数不超过 2 的多项式。由严格不等式的连续性, $\Gamma(A)$ 在 $[0,1]$ 中相对开。若某个 F_{ij} 恒为零,则 $\Gamma(A) = \emptyset$;否则,这些多项式在 $[0,1]$ 内的全部零点把参数区间分为有限段,每段上所有多项式的符号均不变。因此 $\Gamma(A)$ 是有限个相对开区间的并,也可能为空。求出这些零点并在各段检验符号,即可确定全部可行参数。

一般不能断言 $\Gamma(A)$ 是单个区间。例如,取

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

此时 $N^+ = \{1\}$ 、 $N^- = \{2\}$ ，定义 2 只有一个交叉条件：

$$6 > (4 - 3\gamma)(1 + 3\gamma) = 4 + 9\gamma(1 - \gamma).$$

解此严格不等式，得到

$$\Gamma(B_3) = \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right].$$

所以两个端点都可行，而 $\gamma = 1/2$ 不可行。相反，若 $|a_{ij}| = |a_{ji}|$ 对所有 i, j 成立，则各分块行和与列和相等，定义 2 与 γ 无关，此时 $\Gamma(A)$ 只能是 $[0, 1]$ 或空集。上一节的 B_1 、 B_2 分别给出了这两种情形。

具体算例

算例 1：

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \gamma = 0.4$$

计算行和与列和：

$$r(A) = (5, 4, 4, 2, 4), \quad c(A) = (5, 4, 4, 4, 2).$$

$$\text{diag } A = (5, 4, 7, 6, 5).$$

故 $N^+ = \{3 \ 4 \ 5\}$, $N^- = \{1 \ 2\}$ 。

分块行、列和：

行分块(列下标属于 $N^+ = \{3 \ 4 \ 5\}$ 与 $N^- = \{1 \ 2\}$):

$$r^{N^+}(A) = (5, 2, 1, 0, 2),$$

$$r^{N^-}(A) = (0, 2, 3, 2, 2).$$

列分块(行下标属于 N^+ 与 N^-):

$$c^{N^+}(A) = (3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 0)$$

$$c^{N^-}(A) = (2 \ 0 \ 3 \ 2 \ 2)$$

验证定义 2 (对 $i \in N^+, j \in N^-$):

$$i = 3: \quad |a_{33}| - \gamma r_3^{N^+} - (1 - \gamma)c_3^{N^+} = 7 - 0.4 \times 1 - 0.6 \times 1 = 6,$$

$$i = 4: \quad 6 - 0.4 \times 0 - 0.6 \times 2 = 4.8,$$

计算各分量: $i = 5: \quad 5 - 0.4 \times 2 - 0.6 \times 0 = 4.2,$

$$j = 1: \quad |a_{11}| - \gamma r_1^{N^-} - (1 - \gamma)c_1^{N^-} = 5 - 0.4 \times 0 - 0.6 \times 2 = 3.8,$$

$$j = 2: \quad 4 - 0.4 \times 2 - 0.6 \times 0 = 3.2.$$

$$\gamma r_i^{N^-} + (1 - \gamma)c_i^{N^-} : (3 \ 2 \ 2) \text{ 对应 } i = 3, 4, 5$$

$$\gamma r_i^{N^+} + (1 - \gamma)c_i^{N^+} : (3.8 \ 3.2) \text{ 对应 } j = 1, 2$$

逐一验证六个交叉对(表 1)

Table 1. Verification of the cross inequalities in Definition 2 for Example 1
表 1. 算例 1 中定义 2 交叉不等式的逐项验证

(i, j)	左端	右端	是否>
(3,1)	$6 \times 3.8 = 22.8$	$3 \times 3.8 = 11.4$	是
(3,2)	$6 \times 3.2 = 19.2$	$3 \times 3.2 = 9.6$	是
(4,1)	$4.8 \times 3.8 = 18.24$	$2 \times 3.8 = 7.6$	是
(4,2)	$4.8 \times 3.2 = 15.36$	$2 \times 3.2 = 6.4$	是
(5,1)	$4.2 \times 3.8 = 15.96$	$2 \times 3.8 = 7.6$	是
(5,2)	$4.2 \times 3.2 = 13.44$	$2 \times 3.2 = 6.4$	是

全部严格成立, 故 A 是 γ -弱对角占优矩阵。
 设 R 和 L 分别为 X 的上界和下界, 确定参数 X 的区间:
 下界(取 $j \in N^- = \{1, 2\}$):

$$L_1 = \frac{\gamma r_1^{N^+} + (1-\gamma)c_1^{N^+}}{|a_{11}| - \gamma r_1^{N^-} - (1-\gamma)c_1^{N^-}} = \frac{3.8}{3.8} = 1$$

$$L_2 = \frac{3.2}{3.2} = 1$$

上界(取 $i \in N^+ = \{3, 4, 5\}$):

$$R_3 = \frac{|a_{33}| - \gamma r_3^{N^+} - (1-\gamma)c_3^{N^+}}{\gamma r_3^{N^-} + (1-\gamma)c_3^{N^-}} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$R_4 = \frac{4.8}{2} = 2.4, \quad R_5 = \frac{4.2}{2} = 2.1.$$

故 X 的取值区间为: $X \in (\max\{L_1, L_2\}, \min\{R_3, R_4, R_5\}) = (1, 2)$
 取 $X = 1.5 \in (1, 2)$, 则
 构造正对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \text{diag}(1.5, 1.5, 1, 1, 1)$
 按 $c_{ij} = d_i a_{ij} d_j$ 逐元素计算:

计算结果为: $C = DAD =$

$$\begin{bmatrix} 11.25 & 0 & 3 & 3 & 1.5 \\ 4.5 & 9 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ 1.5 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

最后验证 C 为严格 γ -对角占优矩阵:
 计算 C 的行和与列和, 验证 $|c_{ii}| > \gamma r_i(C) + (1-\gamma)c_i(C)$:

表 2 所有行均满足严格不等式, 故 C 为严格 γ -对角占优矩阵。由引理 1 知, C 是非奇异 H -矩阵。

Table 2. Verification that C is strictly γ -diagonally dominant for Example 1**表 2.** 算例 1 中矩阵 C 的严格 γ -对角占优性验证

i	$r_i(C)$	$c_i(C)$	$\gamma r_i(C) + (1-\gamma)c_i(C)$	$ c_{ii} $
1	7.5	9	$0.4 \times 7.5 + 0.6 \times 9 = 8.4$	$11.25 > 8.4$
2	7.5	6	$0.4 \times 7.5 + 0.6 \times 6 = 6.6$	$9 > 6.6$
3	5.5	5.5	5.5	$7 > 5.5$
4	3	5	$0.4 \times 3 + 0.6 \times 5 = 4.2$	$6 > 4.2$
5	5	3	$0.4 \times 5 + 0.6 \times 3 = 3.8$	$5 > 3.8$

算例 2 (对称矩阵, $\gamma = 0.7$)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \gamma = 0.7$$

计算行和、列和(对称矩阵 $r_i = c_i$):

$$r(A) = c(A) = (3, 2, 4, 4, 3), \text{diag } A = (6, 4, 4, 4, 5)$$

划分 N^+ 与 N^- :

阈值 $\gamma r_i + (1-\gamma)c_i = 0.7r_i + 0.3c_i = r_i$ (对称):

$$\begin{aligned} i=1: & \quad r_1 = 3, |a_{11}| = 6 > 3 \Rightarrow 1 \in N^+, \\ i=2: & \quad r_2 = 2, |a_{22}| = 4 > 2 \Rightarrow 2 \in N^+, \\ i=3: & \quad r_3 = 4, |a_{33}| = 4 \leq 4 \Rightarrow 3 \in N^-, \\ i=4: & \quad r_4 = 4, |a_{44}| = 4 \leq 4 \Rightarrow 4 \in N^-, \\ i=5: & \quad r_5 = 3, |a_{55}| = 5 > 3 \Rightarrow 5 \in N^+. \end{aligned}$$

故 $N^+ = \{1, 2, 5\}, N^- = \{3, 4\}$

分块行、列和(对称矩阵 $r^{N^+} = c^{N^+}, r^{N^-} = c^{N^-}$):

$$r^{N^+}(A) = (0, 1, 3, 3, 1),$$

$$r^{N^-}(A) = (3, 1, 1, 1, 2).$$

验证定义 2 (对 $N^+ = \{1, 2, 5\}, N^- = \{3, 4\}$):

$$i=1: \quad |a_{11}| - \gamma r_1^{N^+} - (1-\gamma)c_1^{N^+} = 6 - 0.7 \times 0 - 0.3 \times 0 = 6,$$

$$i=2: \quad 4 - 0.7 \times 1 - 0.3 \times 1 = 3,$$

各分量: $i=5: \quad 5 - 0.7 \times 1 - 0.3 \times 1 = 4,$

$$j=3: \quad |a_{33}| - \gamma r_3^{N^-} - (1-\gamma)c_3^{N^-} = 4 - 0.7 \times 1 - 0.3 \times 1 = 3,$$

$$j=4: \quad 4 - 0.7 \times 1 - 0.3 \times 1 = 3.$$

当 $i=1,2,5$ 时, $\gamma r_i^{N^-} + (1-\gamma)c_i^{N^-} = r_i^{N^-}$ 的值依次为 3,1,2; 当 $j=3,4$ 时, $\gamma r_j^{N^+} + (1-\gamma)c_j^{N^+} = r_j^{N^+}$ 的值均为 3。

交叉验证见表 3:

Table 3. Verification of the cross inequalities in Definition 2 for Example 2

表 3. 算例 2 中定义 2 交叉不等式的逐项验证

(i,j)	左端	右端	是否
(1,3)	$6 \times 3 = 18$	$3 \times 3 = 9$	是
(1,4)	$6 \times 3 = 18$	$3 \times 3 = 9$	是
(2,3)	$3 \times 3 = 9$	$1 \times 3 = 3$	是
(2,4)	$3 \times 3 = 9$	$1 \times 3 = 3$	是
(5,3)	$4 \times 3 = 12$	$2 \times 3 = 6$	是
(5,4)	$4 \times 3 = 12$	$2 \times 3 = 6$	是

全部严格成立, A 是 γ -弱对角占优矩阵。

设 R 和 L 分别为参数 X 的上界和下界, 由此确定参数 X 的区间:

下界(取 $j \in N^- = \{3,4\}$):

$$L_3 = L_4 = \frac{r_j^{N^+}}{|a_{jj}| - r_j^{N^-}} = \frac{3}{4-1} = 1$$

上界(取 $i \in N^+ = \{1,2,5\}$):

$$R_1 = \frac{6-0}{3} = 2, R_2 = \frac{3}{1} = 3, R_5 = \frac{4}{2} = 2.$$

故 $X \in (\max\{L_3, L_4\}, \min\{R_1, R_2, R_5\}) = (1, 2)$

取 $X = 1.5$, 则 $D = \text{diag}(1, 1, 1.5, 1.5, 1)$

$$C = DAD = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1.5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 0 & 9 & 2.25 & 3 \\ 3 & 1.5 & 2.25 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

最后验证 C 为严格 γ -对角占优矩阵(表 4):

所有行均满足严格不等式, 故 C 为严格 γ -对角占优矩阵。由引理 1 知, C 是非奇异 H -矩阵。

Table 4. Verification that C is strictly γ -diagonally dominant for Example 2
表 4. 算例 2 中矩阵 C 的严格 γ -对角占优性验证

i	$r_i(C)$	$c_i(C)$	$\gamma r_i(C) + (1-\gamma)c_i(C)$	$ c_{ii} $
1	4.5	4.5	4.5	$6 > 4.5$
2	2.5	2.5	2.5	$4 > 2.5$
3	6.75	6.75	6.75	$9 > 6.75$
4	6.75	6.75	6.75	$9 > 6.75$
5	4	4	4	$5 > 4$

算例小结(表 5):

Table 5. Summary of the results of the two numerical examples
表 5. 两个算例的计算结果汇总

算例	γ	结构	N^+	N^-	X 区间	选取 X
算例 1	0.4	非对称	$\{3, 4, 5\}$	$\{1, 2\}$	$(1, 2)$	1.5
算例 2	0.7	对称	$\{1, 2, 5\}$	$\{3, 4\}$	$(1, 2)$	1.5

两个算例均满足:

- 1) A 是定义 2 意义下的 γ -弱对角占优矩阵(交叉对不等式全部严格成立);
- 2) 由定理 1 可构造正对角矩阵 D , 参数 X 落在非空开区间内;
- 3) $C = DAD$ 是严格 γ -对角占优矩阵。由引理 1 知, C 为非奇异 H -矩阵。

参考文献

- [1] Nedović, M. and Arsić, D. (2025) New Scaling Criteria for H-Matrices and Applications. *AIMS Mathematics*, **10**, 5071-5094. <https://doi.org/10.3934/math.2025232>
- [2] Huang, T.Z. (2008) Estimation of $\|A^{-1}\|_\infty$ and the Smallest Singular Value. *Computers & Mathematics with Applications*, **55**, 1075-1080. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.04.036>
- [3] 赵建兴, 桑彩丽. 严格 α -对角占优 M -矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(19): 280-284.
- [4] Zhao, J.X., Liu, Q.L., Li, C.Q. and Li, Y.T. (2018) Dashnic-Zusmanovich Type Matrices: A New Subclass of Nonsingular H-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **552**, 277-287. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.04.028>
- [5] Zeng, W., Liu, J. and Mo, H. (2023) Schur Complement-Based Infinity Norm Bound for the Inverse of Dashnic-Zusmanovich Type Matrices. *Mathematics*, **11**, Article 2254. <https://doi.org/10.3390/math11102254>
- [6] 刘丹, 王诗云, 周立新, 吕振华. Dashnic-Zusmanovich 型矩阵的行列式估计[J]. 数学理论与应用, 2024, 44(4): 116-126.
- [7] Kolotilina, L.Y. (2019) On Dashnic-Zusmanovich (DZ) and Dashnic-Zusmanovich Type (DZT) Matrices and Their Inverses. *Journal of Mathematical Sciences*, **240**, 799-812. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04397-5>