

带外力项的曲率半径热流方程

谢海勤

广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林

收稿日期: 2026年9月28日; 录用日期: 2026年10月21日; 发布日期: 2026年10月29日

摘 要

在本文中, 我们证明下述热流方程在 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上存在光滑凸解的短时间存在性

$$\begin{cases} X_t = \left(\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_k} \right)^{\frac{1}{n-k}} \left(\lambda(h_{ij}) \right) - u^q \varrho^p f(p) \right) \cdot \nu, (z, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T); \\ X(z, 0) = \varphi(z) \cdot \nu, z \in \mathbb{S}^n \end{cases}$$

该研究源于一些带外力项的热流问题以及Minkowski问题的热流方法。文中还给出了曲率估计和凸性估计, 这是由 h_{ij} 的最大特征值和最小特征值的一些微分不等式推导而来的。

关键词

热流方程, Hessian算子, 光滑解, 曲率估计, 凸性估计

On a Heat Flow Equation for Curvature Radii with Forced Term

Haiqin Xie

College of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi

Received: September 28, 2026; accepted: October 21, 2026; published: October 29, 2026

Abstract

In the present paper, we prove a short-time existence of smooth convex solutions to the following heat flow equation on $\mathbb{S}^n \times [0, T)$

$$\begin{cases} X_t = \left(\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_k} \right)^{\frac{1}{n-k}} \left(\lambda(h_{ij}) \right) - u^q \varrho^p f(p) \right) \cdot \nu, (z, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T); \\ X(z, 0) = \varphi(z) \cdot \nu, z \in \mathbb{S}^n \end{cases}$$

which was motivated by some heat flow problems with forced term and heat flow approach to Min-kowski type problem. The curvature estimates and convexity estimates follows from some differential inequalities of largest eigenvalue and smallest eigenvalue of h_{ij} respectively.

Keywords

Heat Flow Equation, Hessian Quotient Type Operator, Smooth Solution, Curvature Estimates, Convexity Estimates

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

类似于 Eells 和 Sampson [1] 提出的调和映射, 以及 Hamilton 针对黎曼流形的里奇流 [2]。热流法是研究超曲面几何与拓扑性质的有力工具。

设 X 表示超曲面 M 的位置向量, 其满足以下发展方程:

$$\begin{cases} X_t = -\bar{R}\nu, (z, t) \in \mathbb{S}^n \times (0, \infty); \\ X(z, 0) = \varphi(z) \cdot \nu, z \in \mathbb{S}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 ν 是 M 的单位外法向量, 我们有理由期望方程(1.1)的凸解整体存在并收敛。此外, 该流的自相似解还会引出有趣的几何结构。

若 $\bar{R} = H$ 为超曲面 M 的平均曲率, 则方程(1.1)可化简为如下方程:

$$\begin{cases} X_t = \Delta X, & (p, t) \in \mathbb{S}^n \times (0, \infty); \\ X(p, 0) = \varphi(p)\nu, & p \in \mathbb{S}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

关于方程(1.2), Huisken 建立了一系列精妙的结果, 包括自相似解的存在性, 收敛性与刚性, 以及它们的几何应用, 参见文献[3] [4]。

另一个重要的几何研究对象是与高斯曲率相关的如下热流:

$$\begin{cases} X_t = -\bar{R}(K)\nu, & (z, t) \in \mathbb{S}^n \times (0, \infty); \\ X(z, 0) = \varphi(z)\nu, & z \in \mathbb{S}^n. \end{cases} \quad (1.3)$$

Firey 提出的一个著名猜想指出, 当 $\bar{R} = K = \frac{1}{\det h_{ij}}$, 球面是方程(1.3)唯一中心对称自相似解。为证明

这一猜想, chow [5] 证明了方程(1.3)解的整体存在性。对于 $n=1$ 一维情形, Andrews [6] 建立了高斯曲率流方程的收敛性, 并进一步将 Firey 猜想作为推论予以证实。然而, 高维情形则相当微妙, 需要付出大量的技术努力。

更一般地说, 当 $\bar{R} = K^\alpha$ 时, 方程(1.3)也得到了充分研究, 相关收敛结果可参考 Andrews [7], Chow

[8] [9], Guan 和 Ni [10]以及 Andrews, Guan 和 Ni [11]的文献。至于刚性结论以及对 Firey 猜想的后续验证, 基于[7]-[9]中发展的分析技巧, Choi 和 Daskalopoulos [12]证明了任意 $\alpha \in \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ 的刚性结果。特别是, 他们的工作为所有维度 $n \geq 2$ 的 Firey 猜想提供了完整证明。此后, Brendle, Choi 和 Daskalopoulos [13]最终将刚性结论推广到任意 $\alpha > \frac{1}{n+2}$ 。

对于满足椭圆性、凹性和强凹性(或逆凹性)等特定结构条件的更一般速度函数 $\bar{R}$, 类似的流问题也已被提出并得到系统研究。相关研究成果可见于 Gerhardt [14] [15], Urbas [16] [17], Andrews [18], Chow, Liou 和 Tsai [19], Chen 和 Gao [20], Gao, Li 和 Wang [21]的著作。以及近期 Andrews, Chow, Guenther 和 Langford [4]的著作。近年来, 带外力项的平均曲率和高斯曲率流也受到广泛关注, 参见文献[22]-[26]。

受到上述文献启发, 本文主要研究如下涉及 Hessian 商算子 $\frac{\sigma_n}{\sigma_k}$ 和外力项的热流问题:

$$\begin{cases} X_t = (\mathcal{F}(h_{ij}) - u^q \varrho^p f(z))v, & (z, t) \in \mathbb{S}^n \times (0, \infty); \\ X(z, 0) = \varphi(z)v, & z \in \mathbb{S}^n, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 $\mathcal{F}(h_{ij}) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}(\lambda(h_{ij}))$, u 和 ϱ 分别表示超曲面 M 的支撑函数和径向函数。若 $X_t \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow \infty$, 则极限超曲面 $\tilde{X}(\cdot) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} X(\cdot, t)$ 满足下述 Hessian 商方程

$$F(\tilde{h}_{ij}) = \tilde{u}^q \tilde{\varrho}^p f(z) \quad (1.5)$$

对所有 $z \in \mathbb{S}^n$ 成立, 该方程可视为与 Hessian 商 $\mathcal{F}$ 相关的 Minkowski 型问题。

设 $X = X(z, t)$ 为方程(4)的一个解, 可以看出 M 的支撑函数 $u = u(z, t)$ 满足相应的演化方程

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{F}(h_{ij}) - u^q \varrho^p f(z), & (z, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]; \\ u(z, 0) = \varphi(z), & z \in \mathbb{S}^n, \end{cases} \quad (1.6)$$

正如引理 4.3 中所证明的。令

$$C = C^{2, \alpha}(\mathbb{S}^n) \cap \Gamma_+. \quad (1.7)$$

在阐述本文的主要结果之前, 我们作出如下假设。

(f.1) 存在 $0 < f \in C^2(\mathbb{S}^n)$ 使得

$$\|f\|_{C^2(\mathbb{S}^n)} < \infty. \quad (1.8)$$

(f.2) 矩阵 $\left((f^m)_{ij} + f^m \delta_{ij}\right)_{n \times n}$ 在 $\mathbb{S}^n$ 上为半负定的, 其中 $m = \frac{1}{1-q}$ 。此条件限制了流形的曲率结构, 确

保流形在演化过程中保持某种凸性。

(f.3) 函数 $0 < \varphi \in C^2(\mathbb{S}^n)$ 满足 $\min_{\mathbb{S}^n \times t} \varphi_t \geq 0$ 以及 $(\varphi_{ij} + \varphi \delta_{ij})_{n \times n}$ 在 $\mathbb{S}^n$ 上为正定的。通过正定性和时间单调性施加凸性限制, 确保算子具有良好的性质(如椭圆性), 并为证明解的长期存在性和收敛性提供工具。

本文主要定理如下。

定理 1.1 $n \geq 1$, $k \in [0, n-1]$, $q \in [0, 1]$, $q \leq p$ 和 $p+q > 1$, 设 $\varphi(z)$ (对应 $z \in \mathbb{S}^n$) 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个光滑、闭的严格凸超曲面的支撑函数。假设条件(f.1)~(f.3)成立, 则方程(1.6)存在唯一解 $u \in \mathcal{C}$ 。

值得注意的是, 超曲面 M 的曲率估计与支撑函数 u 的凸性估计, 均可由算子 $F = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_k} \right)^{\frac{1}{n-k}}$ 的强凹性推导得出。该性质由 Ren, Wang 和 Xiao [27] 证明, 也可参考 Gao, Li 和 Ma [28]。

注 1.1 可以预见方程(1.6)解的整体存在性与收敛性, 这将是后续研究的重点。

本文的其余部分安排如下。第 2 节, 我们给出一些关于商 $\frac{\sigma_n}{\sigma_k}$ 的基本分析。第 3 节, 我们推导解的先验估计, 并给出定理 1.1 的证明。第 4 节, 我们回顾微分几何中的一些基本事实。

2. 预备知识

定义 2.1 对任意的 $k = 1, 2, \dots, n$, 令

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \quad (2.1)$$

其中, 任意 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ 。我们还设 $\sigma_0 \equiv 1$ 以及当 $j > n$ 时, $\sigma_j \equiv 0$ 。此外, 定义凸锥

$$\Gamma_k = \{ \lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_1(\lambda) > 0, \sigma_2(\lambda) > 0, \dots, \sigma_k(\lambda) > 0 \}. \quad (2.2)$$

引理 2.2 对任意固定的 $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, Γ_k 是一个满足以下条件的开锥

$$\Gamma_+ = \Gamma_n \subseteq \Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma_k. \quad (2.3)$$

引理 2.3 设 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 为任意 $n \times n$ 矩阵, 记 $\lambda_1(B), \lambda_2(B), \dots, \lambda_n(B)$ 是 B 的特征值, 记向量 $\lambda(B) = (\lambda_1(B), \lambda_2(B), \dots, \lambda_n(B))$ 。定义算子:

$$F(B) = F(\lambda(B)). \quad (2.4)$$

记 $F^{ij}(A)$ 和 $F^{ij,rs}(A)$ 分别表示 F 在 A 处沿方向 B 的 C^2 的一阶导数和二阶导数。即

$$\frac{\partial}{\partial s} F(A + sB) = F^{ij}(A) B_{ij}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} F(A + sB) = F^{ij,rs}(A) B_{ij} B_{rs}. \quad (2.6)$$

对任意固定的下标 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$\mathcal{F}^{ii}(A) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad (2.7)$$

和

$$\sum_{i,j} \mathcal{F}^{ii,jj}(A) B_{ii} B_{jj} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} B_{ii} B_{jj} + \sum_{i \neq j} \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} B_{ij}^2. \quad (2.8)$$

引理 2.4 对于任意固定的 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 令

$$F(\lambda) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_k} \right)^{\frac{1}{n-k}}(\lambda). \quad (2.9)$$

则以下结论成立:

(i) F 在 Γ_n 内是椭圆的且是凹的;

(ii) 对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 均有不等式成立

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + 2 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \delta_{ij} \geq 0. \quad (2.10)$$

(iii) 假设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 则对任意整数 $p \geq 2$, 有

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda_p} - \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_p} \geq \frac{1}{\lambda_p} \frac{\partial F}{\partial \lambda_p}. \quad (2.11)$$

引理 2.3 的结论(i)和(ii)由 Andrews [18]给出, 结论(iii)由 Ren, Wang 和 Xiao [27]给出。

引理 2.5 [3] 假设超曲面 M 满足演化方程

$$X_t = R \cdot \nu, \quad (2.12)$$

则支撑函数 u 与径向函数 ϱ 满足如下发展方程:

$$u_t = R, \quad (2.13)$$

$$\varrho_t = -\frac{\sqrt{\varrho^2 + |\nabla \varrho|^2}}{\varrho} R = -\frac{\varrho}{u} R. \quad (2.14)$$

3. 先验估计与全局存在性

在本节, 我们为问题(1.6)建立先验估计, 并完成定理 1.1 的证明, 后续分析分为两部分进行。

3.1. 先验估计

3.1 的主要结果表述如下。

定理 3.0 给定固定整数 $n \geq 1$, $k \in [0, n-1]$, $q \in [0, 1)$, 且满足 $q \leq p$ 和 $p+q > 1$ 。设 $u(\cdot, t) \in \mathcal{C}$ 是方程 (1.6) 定义在区域 $Q = \mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的正解, 则存在正常数 c 以及 $\tau_0 \in (0, 1)$, 使得对任意 $t \in [0, T)$, 均有

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(Q)} + \|u_t\|_{C^{\tau_0}(Q)} \leq c. \quad (3.1)$$

定理 3.0 的证明被分为以下两个部分。

3.1.1. C^0 和 C^1 估计

引理 3.1 给定任意固定整数 $n \geq 1$, $k \in [0, n-1]$, $q \in [0, 1)$, 且满足 $q \leq p$ 和 $p+q > 1$, 设 $\varphi(z) (z \in \mathbb{S}^n)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中光滑, 闭, 严格凸超曲面的支撑函数。假设条件 (f.1)~(f.3) 全部成立。若 $u(\cdot, t) \in \mathcal{C}$ 是方程 (1.6) 在区域 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的解, 则存在一个与解 u 无关的正常数 c , 使得对任意 $t \in [0, T)$, 有

$$0 < A_1 \leq u(\cdot, t) \leq A_2 < \infty, \quad (3.2)$$

其中常数 A_1 和 A_2 定义为

$$A_1 = \min \left\{ \min_{z \in \mathbb{S}^n} \varphi(z), \left(\frac{1}{\max_{z \in \mathbb{S}^n} f(z)} \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \right\} \quad (3.3)$$

和

$$A_2 = \max \left\{ \max_{z \in \mathbb{S}^n} \varphi(z), \left(\frac{1}{\min_{z \in \mathbb{S}^n} f(z)} \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \right\}, \quad (3.4)$$

其中 $\sigma_0 = p + q - 1$ 。

证明。为推导 u 的 C^0 估计，我们对空间变量定义如下最大值函数：对任意固定的 $t \in [0, T)$

$$\dot{R}(t) = \max_{z \in \mathbb{S}^n} u(z, t) \quad (3.5)$$

设 $u(z, t)$ 在区域 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的最大值取于点 $Q_1 = (z_1, t_1)$ 。如果 $t_1 = 0$ ，则所需结论可由条件 **(f.3)** 直接推出。因此，不失一般性，我们不妨设 $t_1 > 0$ ，根据最大值原理，在该点满足

$$\nabla u = 0, \quad (3.6)$$

并且在点 Q_1 处，Hessian 矩阵 $(u_{ij})_{n \times n}$ 半负定。由此可推出，在点 Q_1 处有

$$h_{ij}(t) \leq \dot{R}(t) \delta_{ij}, \varrho = u. \quad (3.7)$$

对所有固定的 $t \in [0, T)$ ，我们假设

$$\dot{R}(t) \geq \left(\frac{1}{\min_{p \in \mathbb{S}^n} f(p)} \right)^{\frac{1}{\sigma_0}}, \quad (3.8)$$

其中 $\sigma_0 = p + q - 1$ 。否则， $\dot{R}(t)$ 的上界可直接得到。

于是可得不等式

$$\dot{R}_t \leq \dot{R} \left(1 - \dot{R}^{\sigma_0} f \right) \leq \dot{R} \left(1 - \dot{R}^{\sigma_0} \min_{z \in \mathbb{S}^n} f(z) \right) \leq 0, \quad (3.9)$$

由此可推出，对任意 $t \in [0, T)$ ，有

$$u(\cdot, t) \leq R(t) \leq \max \left\{ \max_{z \in \mathbb{S}^n} \varphi(z), \left(\frac{1}{\min_{z \in \mathbb{S}^n} f(z)} \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \right\}. \quad (3.10)$$

采用与上文完全对称的论证方式，我们进一步可得到

$$u(\cdot, t) \geq \min \left\{ \min_{z \in \mathbb{S}^n} \varphi(z), \left(\frac{1}{\max_{z \in \mathbb{S}^n} f(z)} \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \right\}. \quad (3.11)$$

联立不等式(3.10)与(3.11)即可证得式(3.2)。至此，完成 C^0 估计的证明。

推论 3.2 对任意固定 $n \geq 1$ ， $k \in [0, n-1]$ ， $q \in [0, 1)$ ， $q \leq p$ 和 $p + q > 1$ ，令 $\varphi(z) (z \in \mathbb{S}^n)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中光滑，闭，严格凸超曲面的支撑函数。假设条件 **(f.1)**~**(f.3)** 全部成立，假设 $u(\cdot, t) \in C$ 是方程(1.6)在 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的解，则存在与解 u 无关的正常数 c ，使得对任意 $t \in [0, T)$ 成立

$$|\nabla u(\cdot, t)| \leq c < \infty. \quad (3.12)$$

证明。由等式

$$u = \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + |\nabla \varrho|^2}}, \quad (3.13)$$

可知, 在径向函数 ρ 的任意极大值点处, 均满足 $\varrho = u$ 。结合引理 3.1 ϱ 具有一致有界性。再联立几何恒等式

$$\varrho^2 = u^2 + |\nabla u|^2, \quad (3.14)$$

我们可以直接推出 u 的梯度一致有界。

3.1.2. C^2 估计与速度函数估计

引理 3.3 令 $L\nu = \mathcal{F}^{ab}\nu_{ab} - \nu_t$, 则超曲面的第二基本形式与速度函数 u_t 满足如下演化方程:

$$Lu_t = ((q-p)fu^{q-1}\varrho^p - \text{tr } \mathcal{F})u_t \quad (3.15)$$

和

$$\begin{aligned} -Lh_{ij} = & \mathcal{F}^{ab,cd}\nabla_i h_{ab}\nabla_j h_{cd} + \sum_{ab} \mathcal{F}^{ab} (\delta_{bi}h_{ja} - \delta_{ba}h_{ji} + \delta_{ji}h_{ba} - \delta_{ja}h_{bi}) \\ & + (\mathcal{F} - u^q\varrho^p f)\delta_{ij} - (u^q\varrho^p f)_{ij} \end{aligned} \quad (3.16)$$

特别地, 若 h_{ij} 为对角矩阵(此时 $\mathcal{F}^{ij}$ 也对角), 则

$$-Lh_{11} = \mathcal{F}^{ab,cd}\nabla_1 h_{ab}\nabla_1 h_{cd} - \text{tr } \mathcal{F}h_{11} + 2F - u^q\varrho^p f - (u^q\varrho^p f)_{11}. \quad (3.17)$$

证明。先推导 u_t 的演化方程, 首先有等式

$$\mathcal{F}^{ab}(u_t)_{ab} = \mathcal{F}^{ab}(u_{ab})_t = \mathcal{F}^{ab}(h_{ab} - u\delta_{ab})_t = \mathcal{F}^{ab}\partial_t h_{ab} - \text{tr } \mathcal{F}u_t \quad (3.18)$$

和

$$\partial_t(u_t) = \partial_t(\mathcal{F} - u^q\varrho^p f) = \mathcal{F}^{ab}\partial_t h_{ab} - (u^q\varrho^p)_t f. \quad (3.19)$$

计算时间导数:

$$(u^q\varrho^p)_t = qu^{q-1}\varrho^p u_t + pu^q\varrho^{p-1}\varrho_t = (q-p)fu^{q-1}\varrho^p u_t, \quad (3.20)$$

代入算子定义得到

$$Lu_t = ((q-p)fu^{q-1}\varrho^p - \text{tr } \mathcal{F})u_t. \quad (3.21)$$

为推导第二基本形式 h_{ij} 的演化方程, 对方程(1.6)两侧关于任意固定的下标 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 连续求两次 i 方向偏导数。回忆第二基本形式满足关系式 $h_{ij} = u_{ij} + u\delta_{ij}$, 可得

$$\partial_i u_i = \mathcal{F}^{ab}\nabla_i h_{ab} - (u^q\varrho^p f)_i, \quad (3.22)$$

$$\partial_i u_{ij} = \mathcal{F}^{ab}\nabla_i \nabla_j h_{ab} + \mathcal{F}^{ab,cd}\nabla_i h_{ab}\nabla_j h_{cd} - (u^q\varrho^p f)_{ij} \quad (3.23)$$

由此进一步推出

$$\begin{aligned} \partial_i h_{ij} = & \mathcal{F}^{ab}\nabla_i \nabla_j h_{ab} + \mathcal{F}^{ab,cd}\nabla_i h_{ab}\nabla_j h_{cd} - (u^q\varrho^p f)_{ij} + u_i \delta_{ij} \\ = & \mathcal{F}^{ab}\nabla_i \nabla_j h_{ab} + \mathcal{F}^{ab,cd}\nabla_i h_{ab}\nabla_j h_{cd} + F - u^q\varrho^p f \delta_{ij} - (u^q\varrho^p f)_{ij}. \end{aligned}$$

由引理 2.5 可得

$$\nabla_i \nabla_j h_{ab} = \nabla_a \nabla_b h_{ij} + \delta_{bi} h_{ja} - \delta_{ba} h_{ji} + \delta_{ji} h_{ba} - \delta_{ja} h_{bi} \quad (3.24)$$

于是

$$\begin{aligned} \partial_i h_{ij} - \sum_{ab} \mathcal{F}^{ab} \nabla_a \nabla_b h_{ij} &= \mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_i h_{ab} \nabla_j h_{cd} + \sum_{ab} \mathcal{F}^{ab} (\delta_{bi} h_{ja} - \delta_{ba} h_{ji} + \delta_{ji} h_{ba} - \delta_{ja} h_{bi}) \\ &\quad + (\mathcal{F} - u^q \varrho^p f) \delta_{ij} - (u^q \varrho^p f)_{ij} \end{aligned} \quad (3.25)$$

假设 h_{ij} 是对角矩阵(此时 $\mathcal{F}^{ij}$ 同样是对角), 经计算有

$$\sum_{ab} \mathcal{F}^{ab} (\delta_{bi} h_{ja} - \delta_{ba} h_{ji} + \delta_{ji} h_{ba} - \delta_{ja} h_{bi}) = \sum_a \mathcal{F}^{aa} h_{aa} - \text{tr } \mathcal{F} h_{11} = F - \text{tr } \mathcal{F} h_{11}, \quad (3.26)$$

由此可知 h_{11} 满足

$$-Lh_{11} = \mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_i h_{ab} \nabla_i h_{cd} - \text{tr } \mathcal{F} h_{11} + 2F - u^q \varrho^p f - (u^q \varrho^p f)_{11}, \quad (3.27)$$

该式即为式(3.17)。

引理 3.4 给定任意固定 $n \geq 1$, $k \in [0, n-1]$, $q \in [0, 1)$, $q \leq p$ 和 $p+q > 1$, 令 $\varphi(z)$ ($z \in \mathbb{S}^n$) 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内光滑, 闭, 严格凸超曲面的支撑函数。假设条件(f.1)~(f.3)全部成立。若 $u(\cdot, t) \in C$ 是方程(1.6)在区域 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的解, 则存在与解 u 无关的正常数 c_1, c_2 , 使得对任意 $t \in [0, T)$, 成立

$$c_1 \leq u_t(\cdot, t) \leq c_2 e^{(p+2-q)t}. \quad (3.28)$$

证明。 u_t 的下界可直接由最大值原理推得。具体来说, 由于 $q \leq p$, 结合(3.15)可知, 当 $\nabla(\log v) = 0$ 时, 函数 $v = u_t$ 满足微分不等式:

$$\mathcal{F}^{ij}(\log v)_{ij} - (\log v)_t = (q-p)u^{q-1}\varrho^p f - \text{tr } \mathcal{F} \leq 0. \quad (3.29)$$

因此对任意固定的 $t \in [0, T)$, 有

$$u_t(\cdot, t) \geq u_t(\cdot, 0) = \min_{z \in \mathbb{S}^n} \varphi_t(z). \quad (3.30)$$

为得到 u_t 的上界, 对任意固定的 $t \in [0, T)$, 定义

$$G(\cdot, t) = \frac{u_t(\cdot, t)}{u(\cdot, t) - r}, \quad (3.31)$$

其中 $r = \frac{1}{2} \min_{(z,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,T)} u(z, t)$ 。假设对每一固定时刻 $t \in [0, T)$, 函数 $G(z, t)$ 在球面 S_n 上的最大值于点 $z_2 \in \mathbb{S}^n$ 处取得。由最大值原理可知,

$$(\log G)_i = 0 \quad (3.32)$$

并且在点 (z_2, t) 处, Hessian 矩阵 $(\log G)_{ij}$ 是半负定的。我们可以选取标准正交标架 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 且满足 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, 使得在点 (z_2, t) 处有

$$h_{ij}(t) = \lambda_i(t) \delta_{ij}. \quad (3.33)$$

直接计算可得

$$(\log G)_i = \frac{u_{ii}}{u_t} - \frac{u_i}{u-r}, \quad (3.34)$$

$$(\log G)_t = \frac{u_{tt}}{u_t} - \frac{u_t}{u-r} = \frac{u_{tt}}{u_t} - \frac{\mathcal{F} - u^q \varrho^p f}{u-r} \quad (3.35)$$

和

$$(\log G)_{ii} = \frac{u_{iii}}{u_i} - \frac{u_{ii}}{u-r} = \frac{u_{iii}}{u_i} - \frac{h_{ii}}{u-r} + \frac{u}{u-r} \quad (3.36)$$

上式对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立。注意到不等式 $p + \frac{u}{u-r} - q \leq p + 2 - q$ ，在极值条件 $(\log G)_i = 0$ 下，我们可以推得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{ii}(\log G)_{ii} - (\log G)_i &= \frac{1}{u_i} \left(\mathcal{F}^{ii}(u_i)_{ii} - (u_i)_i \right) + \frac{1}{u-r} \left(\mathcal{F} - \mathcal{F}^{ii} h_{ii} - u^q \varrho^p f \right) + \frac{u}{u-r} \operatorname{tr} \mathcal{F} \\ &= \frac{r}{u-r} \operatorname{tr} \mathcal{F} + \left(q - p - \frac{u}{u-r} \right) f u^{q-1} \varrho^p \geq -(p+2-q) \log G. \end{aligned}$$

由此可以得到

$$G(\cdot, t) \leq G(\cdot, 0) e^{(p+2-q)t} \quad (3.37)$$

进而对所有 $t \in [0, T)$ ，有

$$u_i(\cdot, t) \leq c e^{(p+2-q)t}. \quad (3.38)$$

为得到超曲面 M 的曲率估计，我们做如下定义：对任意固定的时刻 $t \in [0, T)$ ，令

$$\tilde{\lambda}(\cdot, t) = \max \left\{ \lambda_1(h_{ij}(\cdot, t)), \lambda_2(h_{ij}(\cdot, t)), \dots, \lambda_n(h_{ij}(\cdot, t)) \right\}. \quad (3.39)$$

引理 3.5 (曲率估计) 对任意固定 $n \geq 1$ ， $k \in [0, n-1]$ ， $q \in [0, 1]$ ， $q \leq p$ 和 $p+q > 1$ 。设 $\varphi(z)$ ($z \in \mathbb{S}^n$) 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中光滑，闭，严格凸超曲面的支撑函数。假设条件 **(f.1)**~**(f.3)** 全部成立。若 $u(\cdot, t) \in C$ 是方程 (1.6) 在 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的解，则存在与解 u 无关的正常数 c ，使得对任意 $t \in [0, T)$ ，都有

$$\tilde{\lambda}(\cdot, t) \leq c < \infty. \quad (3.40)$$

证明。证明基于最大值原理。对任意固定的 $t \in [0, T)$ ，定义 $\tilde{P}(\cdot, t) = \log \tilde{\lambda}(\cdot, t) - \beta u(\cdot, t) + \beta M$ 。其中 $\beta > 0$ 为待定常数。假设 $\tilde{P}(z, t)$ 在球面 S^n 上的最大值在 $Q_3 = (z_3, t_3) \in S^n \times [0, T)$ 处取得。若 $t_3 = 0$ ，则结论可由条件 **(f.3)** 直接得到。因此，不失一般性，不妨设 $t_3 > 0$ 。此外，我们可以旋转标架 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，使得 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ，并且在点 Q_3 处满足

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (3.41)$$

由此可以推出：在点 Q_3 处，对任意下标 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，有

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial h_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \mathcal{F}^{ii} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_i} \quad (3.42)$$

我们给出下述命题：

命题 C.1 在点 Q_3 处成立不等式

$$\sum_i \mathcal{F}^{ii} \tilde{P}_{ii} - \tilde{P}_i \geq \mathcal{F}^{11} \beta (u - \beta \varrho^2) + p \varrho^{p-4} u^2 \tilde{\lambda} - \frac{c}{\tilde{\lambda}}. \quad (3.43)$$

直接计算可得到

$$\tilde{P}_i = -\frac{\tilde{\lambda}_{ii}}{\tilde{\lambda}} - \beta u_i, \quad (3.44)$$

$$\tilde{P}_i = -\frac{\tilde{\lambda}_{,i}}{\tilde{\lambda}} - \beta u_i = -\frac{\tilde{\lambda}_{,i}}{\tilde{\lambda}} - \beta(\mathcal{F} - u^q \varrho^p f), \quad (3.45)$$

并且对任意下标 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ii} &= -\frac{\tilde{\lambda}_{,ii}}{\tilde{\lambda}} + \frac{\tilde{\lambda}_{,i}^2}{\tilde{\lambda}^2} - \beta u_{ii} \\ &= -\frac{\tilde{\lambda}_{,ii}}{\tilde{\lambda}} + \frac{\tilde{\lambda}_{,i}^2}{\tilde{\lambda}^2} - \beta \lambda_i + \beta u \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}^{ii} > 0$, 当 $\mathcal{F} > 0$ 时, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \tilde{P}_{ii} - \tilde{P}_i &= -\frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(\mathcal{F}^{ii} \tilde{\lambda}_{,ii} - \partial_i \tilde{\lambda} - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{,i}^2}{\tilde{\lambda}} \right) + \beta(\mathcal{F} - \mathcal{F}^{ii} \lambda_i) - \beta u^q \varrho^p f + \beta u \text{tr} \mathcal{F} \\ &\geq \frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(L(\tilde{\lambda}) - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{,i}^2}{\tilde{\lambda}} \right) + \beta u \mathcal{F}^{11} - \beta u^q \varrho^p f, \end{aligned}$$

结合(3.17)可得

$$L(\tilde{\lambda}) = -\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} + \sum_a \mathcal{F}^{aa} (\tilde{\lambda} - \lambda_a) - F + u^q \varrho^p f + (u^q \varrho^p f)_{11}. \quad (3.46)$$

计算有

$$\begin{aligned} (\varrho^p)_1 &= p \varrho^{p-2} u_i h_{1i} = p \varrho^{p-2} u_1 h_{11}, \\ (\varrho^p)_{11} &= p \varrho^{p-2} (u_{11} h_{11} + u_i \nabla_i h_{11}) + p(p-2) \varrho^{p-4} u_i h_{1i} u_k h_{k1} \\ &= p \varrho^{p-2} (h_{11}^2 - \delta_{11} u h_{11} + u_i \nabla_i h_{11} + (p-2) \varrho^{-2} u_i h_{1i} u_k h_{k1}) \\ &= p \varrho^{p-2} (h_{11}^2 - u h_{11} + u_i \nabla_i h_{11} + (p-2) \varrho^{-2} u_1^2 h_{11}^2) \\ &= p \varrho^{p-4} (u^2 + |\nabla u|^2 + (p-2) u_1^2) h_{11}^2 - p u \varrho^{p-2} h_{11} + p \varrho^{p-2} u_i \nabla_i h_{11} \\ &\geq p \varrho^{p-4} (u^2 + (p-1) u_1^2) h_{11}^2 - p u \varrho^{p-2} h_{11} \\ &\geq p \varrho^{p-4} u^2 h_{11}^2 - p u \varrho^{p-2} h_{11}, \end{aligned}$$

以及

$$(u^q f)_{11} \geq q u^{q-1} h_{11} f + A_1$$

其中 A_1 为有界常数(这里用到条件 $p > q+1 > 1$)。于是我们有

$$\begin{aligned} (u^q \varrho^p f)_{11} &= (\varrho^p)_{11} u^q f + 2(u^q f)_1 (\varrho^p)_1 + \varrho^p (u^q f)_{11} \\ &\geq p \varrho^{p-4} u^2 h_{11}^2 + h_{11} (-p u \varrho^{p-2} + q u^{q-1} \varrho^p f + p \varrho^{p-2} u_1 (u^q f)_1) + A_1 \varrho^p. \end{aligned}$$

因此, 在点 Q_3 处可得

$$\sum_i \mathcal{F}^{ii} \tilde{P}_{ii} - \tilde{P}_i \geq \frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(-\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{,i}^2}{\tilde{\lambda}} \right) + \beta u \mathcal{F}^{11} + p \varrho^{p-4} u^2 \tilde{\lambda} - \frac{\mathcal{F}}{\tilde{\lambda}} - \frac{c}{\tilde{\lambda}} - c.$$

对于项 $\frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(-\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{,i}^2}{\tilde{\lambda}} \right) + \beta u \mathcal{F}^{11}$, 利用引理 2.4 的第(iii)条结论, 在点 Q_3 处有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(-\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{ii}^2}{\tilde{\lambda}} \right) \\
 &= \frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(-\sum_{ij} \mathcal{F}^{ij} h_{ij}^2 + \sum_{i \neq 1} \frac{\mathcal{F}^i - \mathcal{F}^1}{\lambda_1 - \lambda_i} \tilde{\lambda}_{ii}^2 - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{ii}^2}{\tilde{\lambda}} \right) \\
 &\geq \frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(\sum_{i \neq 1} \left(\frac{\mathcal{F}^i - \mathcal{F}^1}{\lambda_1 - \lambda_i} - \frac{\mathcal{F}^i}{\lambda_i} \right) \tilde{\lambda}_{ii}^2 - \frac{\mathcal{F}^1}{\lambda_1} \tilde{\lambda}_{11}^2 \right) \\
 &\geq -\mathcal{F}^1 \frac{\tilde{\lambda}_{11}^2}{\tilde{\lambda}^2} = -\mathcal{F}^{11} \frac{\tilde{\lambda}_{11}^2}{\tilde{\lambda}^2} = -\mathcal{F}^{11} \beta^2 u_i^2 \geq -\mathcal{F}^{11} \beta^2 \varrho^2
 \end{aligned}$$

因此得到

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(-\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} - \mathcal{F}^{ii} \frac{\tilde{\lambda}_{ii}^2}{\tilde{\lambda}} \right) + \beta u \mathcal{F}^{11} \geq \mathcal{F}^{11} \beta (u - \beta \varrho^2). \quad (3.47)$$

对于项 $-\frac{\mathcal{F}}{\tilde{\lambda}} - \frac{c}{\tilde{\lambda}}$, 结合式(3.28), 在点 Q_3 处有

$$-\frac{\mathcal{F}}{\tilde{\lambda}} - \frac{c}{\tilde{\lambda}} = -\frac{u_i + u^q \varrho^p f + c}{\tilde{\lambda}} \geq -\frac{c}{\tilde{\lambda}}. \quad (3.48)$$

在点 Q_3 处得到

$$\sum_i \mathcal{F}^{ii} \tilde{P}_{ii} - \tilde{P}_i \geq \mathcal{F}^{11} \beta (u - \beta \varrho^2) + p \varrho^{p-4} u^2 \tilde{\lambda} - \frac{c}{\tilde{\lambda}}, \quad (3.49)$$

至此命题 C.1 得证。

我们选取

$$\beta = \frac{1}{2 + \left(\frac{2}{\min u} \right) \max_{z \in \mathbb{S}^n} \varrho^2}, \quad (3.50)$$

由此可推出

$$u - \beta \varrho^2 \geq \frac{1}{2} \min u, p - \beta u \geq \frac{p}{2}. \quad (3.51)$$

记 $\delta_0 = \min_{\mathbb{S}^n \times [0, T]} p \varrho^{p-4} u^2$ 。结合(3.51)与(3.49), 当 $\tilde{P}$ 充分大时, 有

$$\sum_i \mathcal{F}^{ii} \tilde{P}_{ii} - \tilde{P}_i \geq \delta_0 \tilde{\lambda} - \frac{c}{\tilde{\lambda}} \geq 0 \quad (3.52)$$

这就导出矛盾。

因此存在常数 c , 使得

$$\tilde{\lambda} \leq c, \quad (3.53)$$

由此即证得不等式(3.40)。

为证明 h_{ij} 的正定性, 只需给出 h_{ij} 最小特征值的下界。对任意固定的时刻 $t \in [0, T]$, 定义

$$\hat{\lambda}(\cdot, t) = \min \left\{ \lambda_1(h_{ij}(\cdot, t)), \lambda_2(h_{ij}(\cdot, t)), \dots, \lambda_n(h_{ij}(\cdot, t)) \right\}. \quad (3.54)$$

引理 3.6 (凸性估计) 对任意固定的 $n \geq 1$, $k \in [0, n-1]$, $q \in [0, 1]$, $q \leq p$ 和 $p+q > 1$, 令 $\varphi(z) (z \in \mathbb{S}^n)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中光滑, 闭, 严格凸超曲面的支撑函数。假定条件 **(f.1)~(f.3)** 成立。若 $u(\cdot, t) \in C$ 是方程 (1.6) 在区域 $\mathbb{S}^n \times [0, T)$ 上的解, 则存在与解 u 无关的正常数 c , 使得对所有 $t \in [0, T)$, 都有

$$\hat{\lambda}(\cdot, t) \geq c > 0. \quad (3.55)$$

证明。证明思路沿用 Guan 和 Ma [10] 以及 Ivaki [29] 文中的论证方法。设函数 $\hat{\lambda}(z, t)$ 在球面 $\mathbb{S}^n$ 上的最小值在点 $Q_4 = (z_4, t_4) \in \mathbb{S}^n \times [0, T)$ 处取得。若 $t_4 = 0$, 则结论可由条件 **(f.3)** 直接得到, 不失一般性, 可设 $t_4 > 0$ 。进一步选取坐标系, 使得在点 (z_4, t_4) 处有

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (3.56)$$

并且满足 $h_{11} \leq h_{22} \leq \dots \leq h_{nn}$ 。同时不妨设在点 Q_4 处成立

$$\hat{\lambda} = h_{11} = h_{22} = \dots = h_{nn} = 0. \quad (3.57)$$

为证明 (3.66), 仿照 Guan 和 Ma [10] 以及 Ivaki [29] 的方法, 只需验证 $\hat{\lambda}$ 满足如下微分不等式:

$$\sum_{aa} \mathcal{F}^{aa} \hat{\lambda}_{,aa} - \hat{\lambda}_{,t} - c |\nabla \hat{\lambda}| \leq c \hat{\lambda}. \quad (3.58)$$

事实上, 由等式 (3.17) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{aa} \mathcal{F}^{aa} \hat{\lambda}_{,aa} - \hat{\lambda}_{,t} &= -\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} + \text{tr } \mathcal{F} h_{11} - 2\mathcal{F} + u^q \varrho^p f + (u^q \varrho^p f)_{11} \\ &= -\left(\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} + 2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_1 h_{ib})^2}{h_{bb}} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_1 h_{ib})^2}{h_{bb}} + \text{tr } \mathcal{F} h_{11} - 2\mathcal{F} + u^q \varrho^p f + (u^q \varrho^p f)_{11} \\ &\leq -\left(\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} + 2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_1 h_{ib})^2}{h_{bb}} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_1 h_{ib})^2}{h_{bb}} - \mathcal{F} + h_{11} \text{tr } \mathcal{F} + u^q \varrho^p f + (u^q \varrho^p f)_{11}. \end{aligned}$$

根据引理 2.3 中的第(ii)条结论, 在点 Q_4 处有

$$-\left(\mathcal{F}^{ab,cd} \nabla_1 h_{ab} \nabla_1 h_{cd} + 2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_1 h_{ib})^2}{h_{bb}} \right) \leq 0. \quad (3.59)$$

此外, 利用 Codazzi 方程有,

$$2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_1 h_{ib})^2}{h_{bb}} = 2 \sum_{b>l} \sum_i \mathcal{F}^{ii} \frac{(\nabla_b h_{li})^2}{h_{bb}} = 2 \mathcal{F}^{11} \sum_{b>l} \frac{(\nabla_b h_{11})^2}{h_{bb}} \leq c |\nabla \hat{\lambda}|. \quad (3.60)$$

不难看出

$$-F + h_{11} \text{tr } \mathcal{F} \leq -F + F \leq 0, \quad (3.61)$$

在点 Q_4 处成立等式 $\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}^{ii} h_{ii}$ 并且满足 $h_{11} \leq h_{22} \leq \dots \leq h_{nn}$ 。记

$$\Lambda = u^q \varrho^p f + (u^q \varrho^p f)_{11}. \quad (3.62)$$

接下来给出结论:

命题 C。假设条件(f.2)成立, 则当 $\hat{\lambda}$ 充分小时, 有不等式

$$\Lambda \leq c\hat{\lambda} + c|\nabla \hat{\lambda}|. \quad (3.63)$$

事实上, 直接计算可得

$$(u^q \varrho^p f)_{11} = \varrho^p (u^q f)_{11} + 2(\varrho^p)_1 (u^q f)_1 + u^q f (\varrho^p)_{11}. \quad (3.64)$$

此外,

$$(\varrho^p)_1 = p\varrho^{p-2}\varrho\varrho_1 = p\varrho^{p-2}u_1h_{11} = p\varrho^{p-2}u_1\hat{\lambda}, \quad (3.65)$$

并且

$$\begin{aligned} (\varrho^p)_{11} &= p\varrho^{p-2}(u_{11}\hat{\lambda} + u_1\hat{\lambda}_{,1}) + p(p-2)\varrho^{p-4}u_1^2\hat{\lambda}^2 \\ &= p\varrho^{p-2}(\hat{\lambda}^2 + u_1\hat{\lambda}_{,1}) + p(p-2)\varrho^{p-4}u_1^2\hat{\lambda}^2 - p\varrho^{p-2}u_1h_{11}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

因此, 当 $\hat{\lambda}$ 足够小时,

$$2(\varrho^p)_1 (u^q f)_1 + u^q f (\varrho^p)_{11} \leq c\hat{\lambda} + c|\nabla \hat{\lambda}|. \quad (3.67)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} (u^q f)_{11} &= u^q f_{11} + 2qu^{q-1}u_1f_1 + (u^q)_{11}f \\ &= u^q f_{11} + 2qu^{q-1}u_1f_1 + qu^{q-1}u_{11}f + q(q-1)u^{q-2}u_1^2f \\ &= qu^{q-1}\hat{\lambda}f + u^q f_{11} - qu^q f + 2qu^{q-1}u_1f_1 + q(q-1)u^{q-2}u_1^2f. \end{aligned}$$

因此, 当 $\hat{\lambda}$ 足够小时, 可得

$$\Lambda \leq c(\hat{\lambda} + |\nabla \hat{\lambda}|) + \varrho^p u^q (f_{11} + (1-q)f + 2qu^{-1}u_1f_1 + q(q-1)u^{-2}u_1^2f). \quad (3.68)$$

下面分两种情况讨论: $q=0$ 和 $q>0$ 。

情形 C.1: $q=0$ 。由条件(f.2)可知, 当 $\hat{\lambda}$ 充分小时, 有

$$\Lambda \leq c(\hat{\lambda} + |\nabla \hat{\lambda}|) + \varrho^2 (f_{11} + f) \leq c(\hat{\lambda} + |\nabla \hat{\lambda}|). \quad (3.69)$$

情形 C.2: $q>0$ 。由 Holder 不等式可得

$$2qu^{-1}u_1f_1 \leq q(1-q)u^{-2}u_1^2f + \frac{q}{1-q}\frac{f_1^2}{f}. \quad (3.70)$$

于是

$$\varrho^2(u^q f_{11} + 2qu^{q-1}u_1f_1 + (1-q)u^q f + q(q-1)u^{q-2}u_1^2f) \leq \varrho^2 u^q \left(f_{11} + (1-q)f + \frac{q}{1-q}\frac{f_1^2}{f} \right)$$

令 $m = \frac{1}{1-q}$ 。直接计算可得

$$(f^m)_{11} = mf^{m-1}f_{11} + m(m-1)f^{m-1}\frac{f_1^2}{f}, \quad (3.71)$$

由此推出

$$f_{11} + (1-q)f + \frac{q}{1-q} \frac{f_1^2}{f} = (1-q)f^{1-m} \left(f^m + (f^m)_{11} \right) \leq 0 \quad (3.72)$$

该不等式成立的依据是条件(f.2)以及 $q \in (0,1)$ 。因此, 当 $\hat{\lambda}$ 充分小时, 有

$$\Lambda \leq c \left(\hat{\lambda} + |\nabla \hat{\lambda}| \right) \quad (3.73)$$

至此命题 C 证毕。

因此, 当 $\hat{\lambda}$ 充分小时, 它满足微分不等式:

$$\sum_i \mathcal{F}^i \hat{\lambda}_{,ii} - \partial_i \hat{\lambda} - c |\nabla \hat{\lambda}| \leq c \hat{\lambda} \quad (3.74)$$

根据线性抛物算子的强极值原理(参见 Lieberman 文献[30]), 若 $\hat{\lambda}(Q_4) = 0$, 则必有 $\hat{\lambda} \equiv 0$ 。由此可推出

$$\sigma_n \equiv 0, \quad (3.75)$$

这与条件 $u \in \Gamma_n$ 矛盾。

于是存在常数 $c_0 > 0$, 使得对任意 $t \in [0, T)$, 都有

$$\hat{\lambda}(\cdot, t) \geq c_0 \quad (3.76)$$

引理 3.6 证明完毕。

现在我们来证明定理 3.0。

证明。由引理 3.1, 推论 3.2, 引理 3.5, 以及引理 3.6 可知, 算子

$$Lw = \partial_i w - F^{ij} w_{ij} \quad (3.77)$$

是一致抛物算子。利用 Evans-Krylov 迭代方法即可完成定理 3.0 的证明, 可参考 Krylov [31] 或者 Li, Sheng 和 Wang [32] 的论文第 851 页。

3.2. 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明。解的短时间存在性可由标准抛物算子理论得到, 参见 Krylov [31], 解的凸性可由命题 3.6 推得。唯一性的证明依靠抛物算子的极大值原理。

4. 长时存在性与收敛性展望

虽然本文建立了短时间存在性, 但推广至 $T = \infty$ 并证明收敛至方程(1.5)的解仍面临以下难点: 凸性丧失与爆破风险、算子一致椭圆性退化和收敛速率刻画。这些问题的解决将完善带外力项的曲率流理论, 并为相关 Minkowski 型问题提供新见解。

基金项目

本项目受到广西自然科学基金(基金号: 2024GXNSFBA010357)资助。

参考文献

- [1] Eells, J. and Sampson, J.H. (1964) Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds. *American Journal of Mathematics*, **86**, 109-160. <https://doi.org/10.2307/2373037>
- [2] Hamilton, R.S. (1982) Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **17**, 255-306. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922>
- [3] Zhu, X. (2002). Lectures on Mean Curvature Flows. International Press. <https://doi.org/10.1090/amsip/032>

- [4] Andrews, B., Chow, B., Guenther, C. and Langford, M. (2020) Extrinsic Geometric Flows. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/206>
- [5] Tso, K. (Chou, K.) (1985) Deforming a Hypersurface by Its Gauss-Kronecker Curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **38**, 867-882. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160380615>
- [6] Andrews, B. (1999) Gauss Curvature Flow: The Fate of the Rolling Stones. *Inventiones Mathematicae*, **138**, 151-161. <https://doi.org/10.1007/s002220050344>
- [7] Andrews, B. (2000) Motion of Hypersurfaces by Gauss Curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, **195**, 1-34. <https://doi.org/10.2140/pjm.2000.195.1>
- [8] Chow, B. (1985) Deforming Convex Hypersurfaces by the n th Root of the Gaussian Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **22**, 117-138. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214439724>
- [9] Chow, B. (1991) On Harnack's Inequality and Entropy for the Gaussian Curvature Flow. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **44**, 469-483. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160440405>
- [10] Guan, P. and Ni, L. (2017) Entropy and a Convergence Theorem for Gauss Curvature Flow in High Dimension. *Journal of the European Mathematical Society*, **19**, 3735-3761. <https://doi.org/10.4171/jems/752>
- [11] Andrews, B., Guan, P. and Ni, L. (2016) Flow by Powers of the Gauss Curvature. *Advances in Mathematics*, **299**, 174-201. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.05.008>
- [12] Choi, K. and Daskalopoulos, P. (2016) Uniqueness of Closed Self-Similar Solutions to the Gauss Curvature Flow. <https://arxiv.org/abs/1609.05487>
- [13] Brendle, S., Choi, K. and Daskalopoulos, P. (2017) Asymptotic Behavior of Flows by Powers of the Gaussian Curvature. *Acta Mathematica*, **219**, 1-16. <https://doi.org/10.4310/acta.2017.v219.n1.a1>
- [14] Gerhard, C. (1990) Flow of Nonconvex Hypersurfaces into Spheres. *Journal of Differential Geometry*, **32**, 299-314. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214445048>
- [15] Gerhard, C. (2006) Curvature Problems. International Press.
- [16] Urbas, J.I.E. (1990) On the Expansion of Starshaped Hypersurfaces by Symmetric Functions of Their Principal Curvatures. *Mathematische Zeitschrift*, **205**, 355-372. <https://doi.org/10.1007/bf02571249>
- [17] Urbas, J.I.E. (1991) An Expansion of Convex Hypersurfaces. *Journal of Differential Geometry*, **33**, 91-125. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214446031>
- [18] Andrews, B. (2007) Pinching Estimates and Motion of Hypersurfaces by Curvature Functions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **608**, 17-33. <https://doi.org/10.1515/crelle.2007.051>
- [19] Chow, B., Liou, L.-P. and Tsai, D.-H. (1996) On the Nonlinear Parabolic Equation $\partial_t u = F(\Delta u + nu)$ on S^n . *Communications in Analysis and Geometry*, **4**, 415-434. <https://doi.org/10.4310/cag.1996.v4.n3.a3>
- [20] Chen, L. and Gao, S. (2021) Uniqueness of Self-Similar Solutions to Flows by Quotient Curvatures. *Mathematische Nachrichten*, **294**, 1850-1858. <https://doi.org/10.1002/mana.202000397>
- [21] Gao, S., Li, H. and Wang, X. (2022) Self-Similar Solutions to Fully Nonlinear Curvature Flows by High Powers of Curvature. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **783**, 135-157. <https://doi.org/10.1515/crelle-2021-0068>
- [22] Aarons, M.A.S. (2006) Mean Curvature Flow with a Forcing Term in Minkowski Space. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **25**, 205-246. <https://doi.org/10.1007/s00526-005-0351-8>
- [23] Jang, J. (2023) Capillary-Type Boundary Value Problems of Mean Curvature Flows with Force and Transport Terms on a Bounded Domain. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **62**, Article No. 108. <https://doi.org/10.1007/s00526-023-02450-5>
- [24] Schnürer, O.C. and Schwetlick, H.R. (2004) Translating Solutions for Gaußcurvature Flows with Neumann Boundary Conditions. *Pacific Journal of Mathematics*, **213**, 89-109. <https://doi.org/10.2140/pjm.2004.213.89>
- [25] Schnürer, O.C. and Smoczyk, K. (2003) Neumann and Second Boundary Value Problems for Hessian and Gauß Curvature Flows. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **20**, 1043-1073. [https://doi.org/10.1016/s0294-1449\(03\)00021-0](https://doi.org/10.1016/s0294-1449(03)00021-0)
- [26] Xiao, L. (2021) Neumann Boundary Value Problem for General Curvature Flow with Forcing Term. *Geometriae Dedicata*, **213**, 345-358. <https://doi.org/10.1007/s10711-020-00585-9>
- [27] Ren, C., Wang, Z. and Xiao, L. (2024) The Prescribed Curvature Problem for Entire Hypersurfaces in Minkowski Space. *Analysis & PDE*, **17**, 1-40. <https://doi.org/10.2140/apde.2024.17.1>
- [28] Gao, S., Li, H. and Ma, H. (2018) Uniqueness of Closed Self-Similar Solutions to σ_k -Curvature Flow. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **25**, Article No. 45. <https://doi.org/10.1007/s00030-018-0535-5>

-
- [29] Ivaki, M.N. (2019) Deforming a Hypersurface by Principal Radii of Curvature and Support Function. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, Article No. 1. <https://doi.org/10.1007/s00526-018-1462-3>
 - [30] Lieberman, G.M. (1996) Second Order Parabolic Differential Equations. World Scientific Publishing. <https://doi.org/10.1142/3302>
 - [31] Krylov, N.V. (1987) Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order. D. Reidel Publishing Co.
 - [32] Li, Q., Sheng, W. and Wang, X. (2020) Asymptotic Convergence for a Class of Fully Nonlinear Curvature Flows. *The Journal of Geometric Analysis*, **30**, 834-860. <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00169-4>