

具有恒定速度的传送带模型全局动力学

罗勇顺

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年9月22日; 录用日期: 2026年10月15日; 发布日期: 2026年10月23日

摘 要

本文基于Filippov非光滑动力系统理论, 研究了一类置于恒定速度运动传送带上的干摩擦SD振子的全局动力学行为。深入探讨了子系统平衡点的存在性、类型及稳定性。然后, 利用Lyapunov函数方法与Filippov凸组合理论, 系统分析了全局吸引子的存在性条件, 并给出了擦边周期轨与擦边同宿轨发生分岔的充分条件。进一步揭示了在临界参数下, 传送带速度对同宿环存在状态及破裂机制的调控作用。通过数值模拟验证了理论分析的有效性。所得结论为含干摩擦几何非线性振动系统的设计与减振控制提供了理论依据。

关键词

SD振子, 干摩擦, Filippov系统, 全局吸引子, 擦边同宿环

Global Dynamics of a Conveyor Belt Model Moving at Constant Velocity

Yongshun Luo

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: September 22, 2026; accepted: October 15, 2026; published: October 23, 2026

Abstract

Based on the Filippov's theory of non-smooth dynamical systems, this paper studies the global dynamic behavior of a class of dry-friction SD (Smooth and Discontinuous) oscillators placed on a constant speed motion conveyor belt. The existence, type and stability of the balance point of the subsystem are discussed in depth. Subsequently, using the Lyapunov function method and Filippov's convex combination theory, the system analyzes the existential conditions of the global attractor, and gives the sufficient conditions for the splitting of the edge period track and the edge and the sleep track. It further reveals the regulatory effect of the conveyor belt velocity on the state of existence and

the rupture mechanism of the same boarding track under critical parameters. The validity of the theoretical analysis is verified through numerical simulations, and these conclusions obtained provide a theoretical basis for the design and vibration damping control of the geometric split-line vibration system with dry friction.

Keywords

SD Oscillator, Dry Friction, Filippov Systems, Global Attractor, Grazing Homoclinic Orbit

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性动力学作为现代数学与力学交叉的核心领域，其理论发展深刻推动了工程科学中复杂系统的认知与预测[1][2]。在实际工程系统中，如机械传动振荡、地震工程、车辆悬架振动等，其动力学行为往往由非光滑因素主导。其中，干摩擦作为一类典型的非光滑接触力，广泛存在于两固体接触并相对运动的场景中，直接决定了系统的能量耗散、振动幅值与运动稳定性。大量实验表明，干摩擦引起的粘滑振动和极限环振荡会显著影响系统的稳定性。因此，建立并分析含干摩擦的非光滑动力学模型，具有重要的理论价值与工程意义。

干摩擦作为接触面相对运动中常见的非光滑力学特征，其建模与分析一直是非线性动力学研究中的前沿与难点。Kowalczyk 等人分析了干摩擦振子中周期解的滑动分岔[3]；SD 振子是由曹庆杰等学者[4]-[6]提出并逐步完善的一类典型几何非线性动力学模型，通过引入光滑参数，有效刻画了由几何约束引发的、本质为非光滑的双稳态动力学系统。随着 SD 振子研究的不断深化，学者们开始关注干摩擦对 SD 振子的影响：Chen 等人深入研究了一类干摩擦机械系统的全局动力学，完整揭示了包含 Hopf 分岔、同宿分岔在内的复杂动力学行为[7][8]；Li 等人基于库仑摩擦定律，对包含干摩擦的 SD 振子系统进行了详细的静力学与动力学分析[9][10]。探讨了系统在非光滑状态下的平衡集存在性、稳定性以及由于摩擦力不连续引发的滑动分岔和极限环运动。然而，需要指出的是，现有针对此类含干摩擦 SD 振子的理论分析，均普遍假设质量块底部的支撑面(传送带)是静止的。在摩擦力模型中，其符号函数项通常被定义为依赖于质量块绝对速度的 $\text{Sign}(\dot{x})$ 函数。

在现实物理与工程应用场景中，许多机械系统(如皮带输送、摩擦传动机构等)的摩擦接触面常处于恒定运动状态。当传送带以恒定速度 v_0 运动时，干摩擦力的切换判据将不再取决于绝对速度，而是取决于质量块与传送带之间的相对速度 $\dot{x} - v_0$ 。这一看似微小的物理边界条件的改变，将导致系统在数学上由一个经典的静态切换系统，演变为具有非零流速阈值 Filippov 非光滑系统。此时，系统的切换流形发生平移，其滑模区域的存在条件、平衡点的数目及性质将发生实质性改变，甚至可能诱发全新的复杂动力学行为。

基于上述背景，本文在 Li 等人研究的静态干摩擦 SD 振子模型和 Wang 等人研究的含有不连续振子的全局动力学分析[11]的基础上，深入探讨物块置于恒速运动传送带上的动力学行为。本文的主要研究目标如下：运用 Filippov 系统理论与非光滑动力系统方法，建立含运动传送带的干摩擦 SD 振子模型；在系统不同几何参数与传送带速度下，全面分析系统的平衡点分布、局部稳定性及滑模动力学；进一步揭示全局动力学特征，阐明传送带速度对系统同宿分岔与渐近稳定性的调控机理。

本文结构安排如下：第 2 节介绍模型并给出预备知识；第 3 节研究子系统的动力学；第 4 节分析系

统的滑模动力学；第 5 节探讨系统的全局动力学以及同宿轨分支，给出主要定理及其证明；第 6 节对全文进行总结。

2. 模型介绍及预备知识

本文研究的传送带模型如图 1 所示。图中所示 SD 振子模型由一个质量为 m 的物块和一个劲度系数为 k 的可拉伸和压缩的弹簧组成，同时该系统由以恒定速度 v_0 运动的传送带支撑。弹簧原长记为 l ，其固定点与传送带之间的垂直距离为 h 。质量块与传送带之间存在干摩擦力 F_s 。

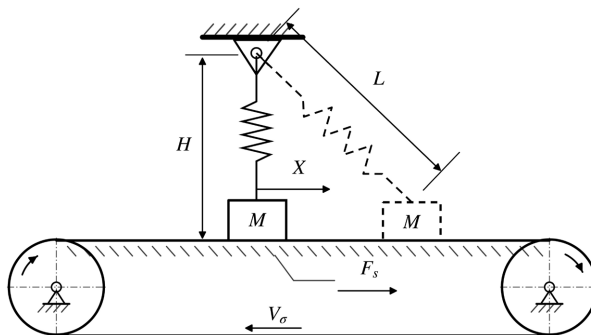


Figure 1. Model schematic

图 1. 模型示意图

设物块随时间运动的位置，速度，加速度分别为 x ， $\dot{x}$ ， $\ddot{x}$ 。物块和斜面间的摩擦系数为 μ ，重力加速度为 g ，根据牛顿第二定律可得

$$m\ddot{x} = F_T + F_s.$$

其中， F_T 为物块运动方向所受弹力， F_s 为物块与非光滑传送带之间的库伦摩擦力，表达式分别为

$$F_T = -kx \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right),$$

$$F_s \in -\mu \left[mg - kh \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) \right] \text{Sign}(\dot{x} - v_0).$$

可以建立物体在传送带上的运动方程：

$$m\ddot{x} + kx \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) \in -u \left[mg - kh \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) \right] \text{Sign}(\dot{x} - v_0). \quad (2.1)$$

$\text{Sign}(\dot{x} - v_0)$ 的表达式为：

$$\text{Sign}(\dot{x} - v_0) = \begin{cases} \{-1\}, & \dot{x} < v_0, \\ [-1, 1], & \dot{x} = v_0, \\ \{1\}, & \dot{x} > v_0. \end{cases}$$

令 $\dot{x} = y$ ，系统(2.1)等价于

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} \in -\frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) - \frac{u}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) \text{Sign}(y - v_0). \end{cases} \quad (2.2)$$

系统(2.2)可化为

$$(\dot{x}, \dot{y}) \in F(x, y). \quad (2.3)$$

其中

$$F(x, y) = \left(y, -\frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) - \frac{\mu}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) \text{Sign}(y - v_0) \right)^T.$$

这里 T 表示转置。

为保证弹簧运动过程中弹簧是可压缩和拉伸的并且压力方向始终向下，我们假设 $l \geq h$ ， $mg \geq kh$ 。

系统(2.3)的切换线为 $\Sigma = \{(x, y) | y = v_0\}$ ，将 R^2 分为两个区域

$$G_1 = \{(x, y) \in R^2 | y < v_0\}, G_2 = \{(x, y) \in R^2 | y > v_0\}.$$

此时系统(2.3)被分为了两个子系统

$$F^-(X): \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F_1(x), \end{cases} \quad y < v_0. \quad (2.4)$$

$$F^+(X): \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F_2(x), \end{cases} \quad y > v_0. \quad (2.5)$$

其中

$$F_1(x) = -\frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) + \frac{u}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right),$$

$$F_2(x) = -\frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) - \frac{u}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right).$$

由于库伦摩擦力的不连续性，导致了向量场的不连续，本文将讨论系统(2.3)Filippov 意义下的解，其定义如下：

定义 2.1: [12] 若向量函数 $(x(t), y(t))$ 在区间 $[0, T]$ ($T \in (0, +\infty]$) 的任意紧子区间上绝对连续，满足 $x(0) = x_0$ 和 $y(0) = y_0$ ，且存在可测函数 $\gamma = \gamma(t): [0, T] \rightarrow [-1, 1]$ 使得对几乎所有的 $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) - \frac{\mu\gamma}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right). \end{cases}$$

那么称向量函数 $(x(t), y(t))$ 是系统(2.3)过初始值 (x_0, y_0) 的解。

为了后面分析切换线 Σ 附近的动力学，在此引入李导数概念，对于任意的 $p \in h^{-1}(0)$ ， $\nabla h(p) \neq 0$ ， h 在向量场上的李导数可表示为

$$L_F h = \langle \nabla h, F \rangle.$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示标准内积。

定义 2.2: [13] 假设 ∇h 总指向 G_2 ，则 Σ 可以分为以下三个区域：

1) 若对于切换线 Σ 上的点 X 满足 $L_{F^+} h(X) \cdot L_{F^-} h(X) > 0$ ，那么称 X 为穿越点。所有穿越点构成的集合称为穿越域，记为 Σ_c ；

2) 若对于切换线 Σ 上的点 X 满足 $L_{F^+} h(X) \leq 0$ ， $L_{F^-} h(X) \geq 0$ ，那么称 X 为滑模点。所有滑模点构

成的集合称为滑模区域, 记为 Σ_s ;

3) 若对于切换线 Σ 上的点 X 满足 $L_{F^+}h(X) \geq 0$, $L_{F^-}h(X) \leq 0$, 那么称 X 为逃逸点。所有逃逸点构成的集合称为逃逸区域, 记为 Σ_e 。

为了确定 Σ_s 和 Σ_e 上解的性态, 根据 Filippov 凸方法, 可以得到系统(2.3)在滑模区域上的动力学方程:

$$\frac{dX}{dt} = F_s(X) = (1-\lambda)F^+(X) + \lambda F^-(X),$$

其中

$$\lambda = \frac{L_{F^+}h(X)}{L_{F^+}h(X) - L_{F^-}h(X)} \in (0,1).$$

根据平衡点与切换线的相对位置, 有如下定义。

定义 2.3: [14] 对于系统(2.3)中的平衡点, 有

- 1) 若 $X \in G_1$, $F^-(X) = 0$ 或 $X \in G_2$, $F^+(X) = 0$ 成立, 则称 X 为系统(2.3)的实平衡点;
- 2) 若 $X \in G_1$, $F^+(X) = 0$ 或 $X \in G_2$, $F^-(X) = 0$ 成立, 则称 X 为系统(2.3)的虚平衡点;
- 3) 当 $X \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$, 满足 $F_s(X) = 0$ 时, 则称 X 为系统(2.3)的伪平衡点;
- 4) 当 $X \in \Sigma$, 且满足 $L_{F^-}h(X) = 0$, $F^-(X) \neq 0$ 或 $L_{F^+}h(X) = 0$, $F^+(X) \neq 0$, 则称 X 为系统(2.3)的切点。

3. 子系统动力学分析

接下来分析子系统 $F^-(X)$, $F^+(X)$ 平衡点的存在性与稳定性。通过文献[11]可得以下引理:

引理 3.1: $F_1(X)$ 分别在区间 $(-\infty, x_1^*)$ 与 $(x_2^*, +\infty)$ 上单调递减, 在区间 (x_1^*, x_2^*) 上单调递增, 其中 x_1^* 是 $F_1(X)$ 的极小值点, x_2^* 是 $F_1(X)$ 的极大值点。

引理 3.2: $F_2(x)$ 分别在 $(-\infty, x'_1)$ 与 $(x'_2, +\infty)$ 上单调递减, 在 (x'_1, x'_2) 上单调递增, 且 x'_1 是 $F_2(x)$ 的极小值点, x'_2 是 $F_2(x)$ 的极大值点。

注意到 $F_1(x) = -F_2(-x)$, 因此我们只需要讨论 $F_1(X)$ 零点情况, 由 $F_1(X)$ 的单调性可知 $F_1(X)$ 可能存在二阶零点。固定参数 m, k, μ, g 。取 x, h, l 为变量。由 $F_1(x) = F_1'(x) = 0$, 得

$$\begin{cases} -\frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) + \frac{\mu}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) = 0, \\ -(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - \mu h l x + l h^2 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

令 $x = h \tan \theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \arctan \frac{1}{\mu} \right)$, 则有参数表达式:

$$l = \eta(h): \begin{cases} h(\theta) = \frac{\mu m g (\mu \tan \theta - 1)}{k \tan \theta (\mu + \tan \theta)^2}, \\ l(\theta) = \frac{-\mu m g \sec^3 \theta}{k \tan \theta (\mu + \tan \theta)^2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

借助参数曲线表达式 $l = \eta(h)$, 可得 $F_1(X)$, $F_2(X)$ 的零点情况。

引理 3.3: 对于参数表达式有以下结论成立:

- 1) 当 $l < \eta(h)$ 时, $F_1(X)$ 有唯一零点 $x_1 > 0$, $F_2(x)$ 有唯一零点 $-x_1$ 。
- 2) 当 $l = \eta(h)$ 时, $F_1(X)$ 有两个零点 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$; $F_2(x)$ 有两个零点 $-\bar{x}_1, -\bar{x}_2$; 其中 $\bar{x}_1 < 0 < \bar{x}_2$, 且满足 $F_1(\bar{x}_1) = F_1'(\bar{x}_1) = F_2(-\bar{x}_1) = F_2'(-\bar{x}_1) = 0$ 。

3) 当 $l > \eta(h)$ 时, $F_1(X)$ 有三个零点 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$; $F_2(x)$ 有三个零点 $-\tilde{x}_1, -\tilde{x}_2, -\tilde{x}_3$; 其中 $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < 0 < \tilde{x}_3$ 。证明可参考文献[11]的证明。

定理 3.1: 对于系统(2.4), 下面的结论成立:

- 1) 当 $l < \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在唯一平衡点: $E_1(x_1, 0)$, 且 E_1 为中心;
- 2) 当 $l = \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在两个平衡点: $\bar{E}_1(\bar{x}_1, 0)$, $\bar{E}_2(\bar{x}_2, 0)$, 且 $\bar{E}_1$ 为形如图 2 的退化奇点, $\bar{E}_2$ 为中心;
- 3) 当 $l > \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在三个平衡点: $\tilde{E}_1(\tilde{x}_1, 0)$, $\tilde{E}_2(\tilde{x}_2, 0)$, $\tilde{E}_3(\tilde{x}_3, 0)$, 且 $\tilde{E}_2$ 为鞍点, $\tilde{E}_1$ 和 $\tilde{E}_3$ 为中心。

证明: 系统(2.3)的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F_1'(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

对于平衡点 E_1 ,

$$\det J_{(E_1)} = -F_1'(x_1) > 0, \quad \text{tr } J_{(E_1)} = 0.$$

则可得 E_1 是中心。通过类似的计算, 可知 $\bar{E}_2, \tilde{E}_1, \tilde{E}_3$ 均为中心。

对于平衡点 $\bar{E}_1$,

$$\det J_{(\bar{E}_1)} = -F_1'(\bar{x}_1) = 0, \quad \text{tr } J_{(\bar{E}_1)} = 0.$$

可知 $\bar{E}_1$ 是高次奇点, 将 $\bar{E}_1$ 平移到原点,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = P(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

其中

$$P(x) = -\frac{k}{m}(x + \bar{x}_1) \left(1 - \frac{l}{\sqrt{(x + \bar{x}_1)^2 + h^2}} \right) + \frac{\mu}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{(x + \bar{x}_1)^2 + h^2}} \right).$$

在 $O(0,0)$ 领域内泰勒展开,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{P''(0)}{2}x^2 + \frac{P'''(0)}{6}x^3 + O(x^4). \end{cases} \quad (3.4)$$

通过文献[15]中第二章定理 7.3 可得, $O(0,0)$ 是形如图 3 的退化奇点, 即 $\bar{E}_1$ 为退化奇点。

对于平衡点 $\tilde{E}_2$, $\det J_{(\tilde{E}_2)} = -F_1'(\tilde{x}_2) < 0$, 则 $\tilde{E}_2$ 是鞍点。证毕。

定理 3.2: 对于系统(2.4), 下面的结论成立:

- 1) 若 $l = \eta(h)$, 则系统(2.4)存在唯一的同宿环;
- 2) 若 $l > \eta(h)$, 则系统(2.4)存在唯一的双同宿环(8 字型同宿环)

证明: 显然系统(2.4)是一个 Hamilton 系统, 对系统(2.4)进行首次积分可得:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x F_1(s) ds = h. \quad (3.5)$$

可知其关于 x 轴对称, 当 $l = \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在一个形如图 2 的退化奇点 $\bar{E}_1$ 和一个中心点 $\tilde{E}_2$, 且过 $\bar{E}_1$ 的轨线方程为:

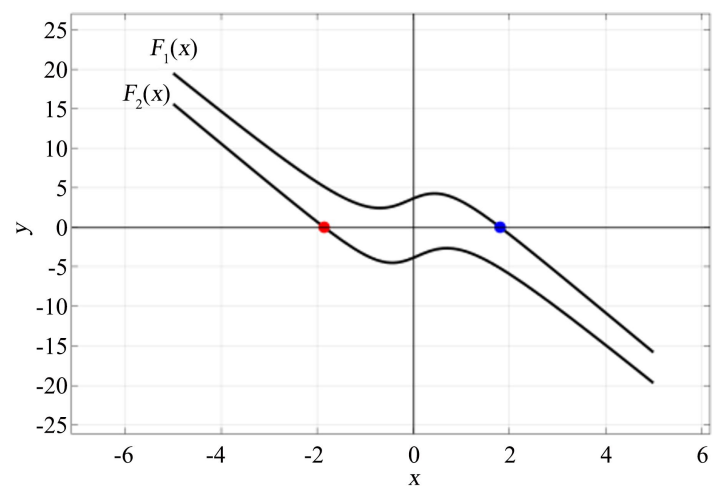
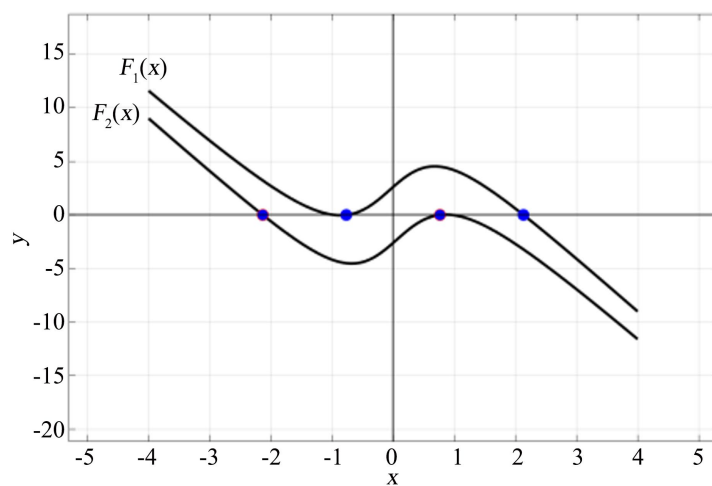
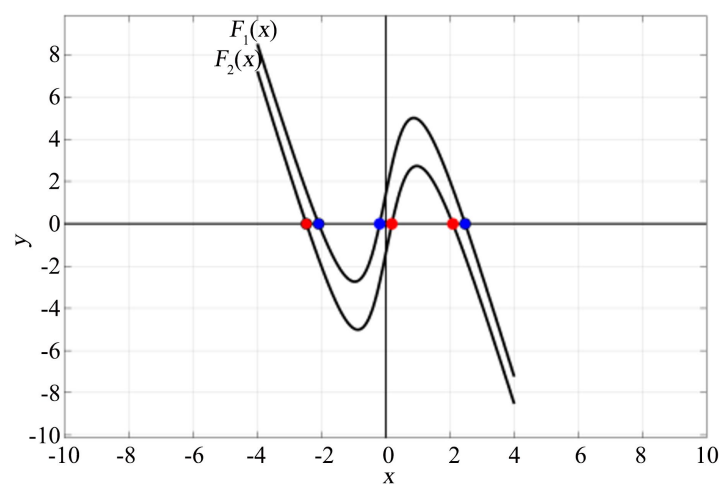
(a) $l < \eta(h)$ (b) $l = \eta(h)$ (c) $l > \eta(h)$

Figure 2. Graphs of two functions in different cases
图 2. 不同情况下两个函数的图像

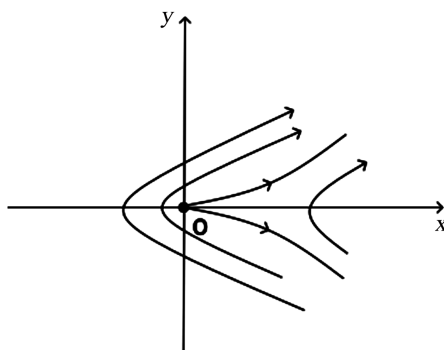


Figure 3. Schematic diagram of local equilibrium points

图 3. 局部平衡点示意图

$$y = \pm \sqrt{2 \int_{\bar{x}_1}^x F_1(s) ds}. \quad (3.6)$$

当 $l > \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在一个鞍点 $\tilde{E}_2$, 且在 $\tilde{E}_2$ 左右两侧均存在一个中心点 $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3$ 。并且过 $\tilde{E}_2$ 的轨线方程为:

$$y = \pm \sqrt{2 \int_{\bar{x}_2}^x F_1(s) ds}. \quad (3.7)$$

由前面分析的 $F_1(x)$ 的性质以及对称性可得, 当 $l = \eta(h)$ 时, 过 $\tilde{E}_1$ 右侧的分界线形成一个同宿环 Γ_0 , 如图 4 所示。当 $l > \eta(h)$ 时, 过 $\tilde{E}_2$ 左侧的分界线形成一个同宿环 Γ_1^1 , 过 $\tilde{E}_2$ 右侧的分界线形成一个同宿环 Γ_1^2 , 且 Γ_1^1 与 Γ_1^2 共同形成一个双同宿环 Γ_1 , 如图 5 所示。

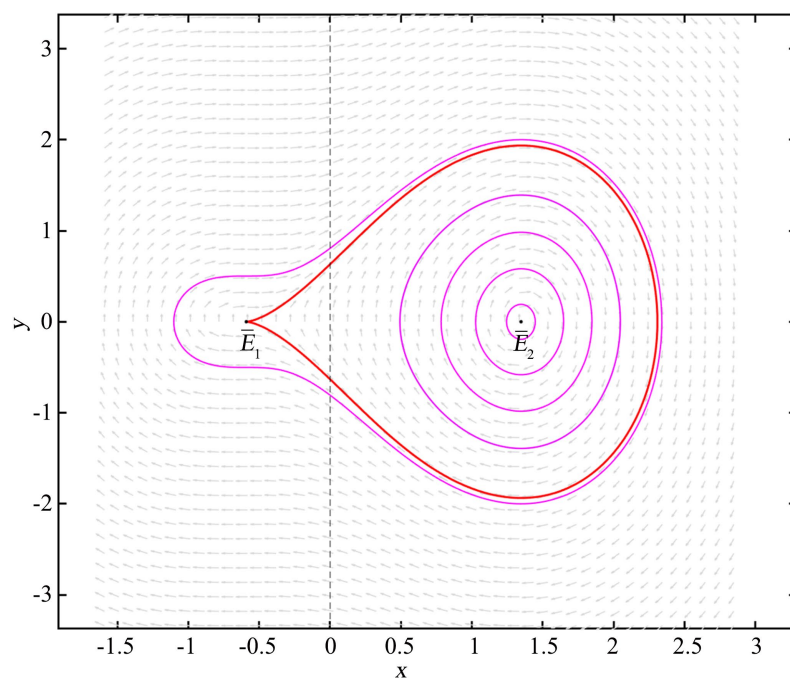


Figure 4. The system (2.4) has a unique homoclinic orbit under this condition. $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.075144, g=10$

图 4. 系统(2.4)在 $l = \eta(h)$ 时存在唯一的同宿环。 $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.075144, g=10$

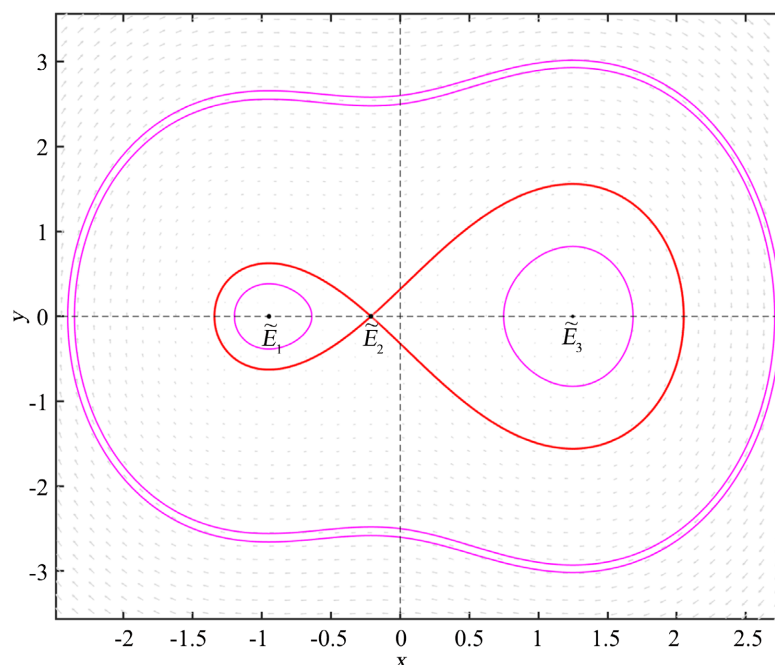


Figure 5. The system (2.4) admits a double homoclinic orbit. $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.04, g=10$

图 5. 系统(2.4)在 $l > \eta(h)$ 时存在双同宿环。 $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.04, g=10$

4. 滑模动力学

本节将讨论滑模的存在性及其动力学行为。

$$L_{F^+}h = \langle \nabla h, F^+(X) \rangle = F_2(x),$$

$$L_{F^-}h = \langle \nabla h, F^-(X) \rangle = F_1(x).$$

则系统(2.3)向量场与切换线切点的个数等价于 $F_1(x), F_2(x)$ 的零点个数。

根据滑模域的定义, 可以得到

穿越滑模域为

$$\Sigma_c = \{(x, y) \in \Sigma \mid F_1(x)F_2(x) > 0\},$$

吸引滑模域为

$$\Sigma_s = \{(x, y) \in \Sigma \mid F_1(x)F_2(x) \leq 0\}.$$

定理 4.1: 对于系统(2.3), 下面的结论成立:

- 1) 当 $l < \eta(h)$ 时, 系统(2.3)只有一段吸引滑模域 Σ_s^{11} , 其中 $\Sigma_s^{11} = \{(x, v_0) \mid -x_1 \leq x \leq x_1\}$;
- 2) 当 $l = \eta(h)$ 时, 系统(2.3)只有一段吸引滑模域 Σ_s^{21} , 其中 $\Sigma_s^{21} = \{(x, v_0) \mid -\bar{x}_2 \leq x \leq \bar{x}_2\}$;
- 3) 当 $l > \eta(h)$ 时, 系统(2.3)有三段吸引滑模域 $\Sigma_s^{31}, \Sigma_s^{32}, \Sigma_s^{33}$, 其中 $\Sigma_s^{31} = \{(x, v_0) \mid -\tilde{x}_3 \leq x \leq \tilde{x}_1\}$, $\Sigma_s^{32} = \{(x, v_0) \mid \tilde{x}_2 \leq x \leq -\tilde{x}_2\}$, $\Sigma_s^{33} = \{(x, v_0) \mid -\tilde{x}_1 \leq x \leq \tilde{x}_3\}$ 。

证明: 通过引理 3.1 至引理 3.3 可知, 当 $l < \eta(h)$ 时, $F_1(x), F_2(x)$ 均只有一个零点 $x_1, -x_1$, 从而系统(2.3)存在两个切点 $T_1 = (-x_1, v_0)$, $T_2 = (x_1, v_0)$, 且有

$$(x - x_1)F_1(x) \leq 0, (x + x_1)F_2(x) \leq 0. \quad (4.1)$$

故系统(2.3)的吸引滑模域为 $\Sigma_s^{11} = \{(x, v_0) | -x_1 \leq x \leq x_1\}$, 穿越滑模域为 $\Sigma_c^{11} = \{(x, v_0) | x < -x_1, x > x_1\}$ 。

当 $l = \eta(h)$ 时, $F_1(x)$ 有两个零点 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, $F_2(x)$ 有两个零点 $-\bar{x}_2, -\bar{x}_1$, 从而系统(2.3)存在四个切点 $\bar{T}_1 = (-\bar{x}_2, v_0)$, $\bar{T}_2 = (\bar{x}_1, v_0)$, $\bar{T}_3 = (-\bar{x}_1, v_0)$, $\bar{T}_4 = (\bar{x}_2, v_0)$, 且有

$$(x - \bar{x}_2)F_1(x) \leq 0, (x + \bar{x}_2)F_2(x) \leq 0. \quad (4.2)$$

故系统(2.3)的吸引滑模域为 $\Sigma_s^{21} = \{(x, v_0) | -\bar{x}_2 \leq x \leq \bar{x}_2\}$, 穿越滑模域为 $\Sigma_c^{21} = \{(x, v_0) | x < -\bar{x}_2, x > \bar{x}_2\}$ 。

当 $l > \eta(h)$ 时, $F_1(x)$ 有三个零点 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$, $F_2(x)$ 有三个零点 $-\tilde{x}_3, -\tilde{x}_2, -\tilde{x}_1$, 从而系统(2.3)存在六个切点 $\tilde{T}_1 = (-\tilde{x}_3, v_0)$, $\tilde{T}_2 = (\tilde{x}_1, v_0)$, $\tilde{T}_3 = (\tilde{x}_2, v_0)$, $\tilde{T}_4 = (-\tilde{x}_2, v_0)$, $\tilde{T}_5 = (-\tilde{x}_1, v_0)$, $\tilde{T}_6 = (\tilde{x}_3, v_0)$, 且有

$$(x - \tilde{x}_1)(x - \tilde{x}_2)(x - \tilde{x}_3)F_1(x) \leq 0, (x + \tilde{x}_1)(x + \tilde{x}_2)(x + \tilde{x}_3)F_2(x) \leq 0. \quad (4.3)$$

故系统(2.3)有三段吸引滑模域

$$\Sigma_s^{31} = \{(x, v_0) | -\tilde{x}_3 \leq x \leq \tilde{x}_1\}, \Sigma_s^{32} = \{(x, v_0) | \tilde{x}_2 \leq x \leq -\tilde{x}_2\}, \Sigma_s^{33} = \{(x, v_0) | -\tilde{x}_1 \leq x \leq \tilde{x}_3\}.$$

系统(2.3)有四段穿越滑模域

$$\begin{aligned} \Sigma_c^{31} &= \{(x, v_0) | x < -\tilde{x}_3\}, \Sigma_c^{32} = \{(x, v_0) | \tilde{x}_1 \leq x \leq \tilde{x}_2\}, \\ \Sigma_c^{33} &= \{(x, v_0) | -\tilde{x}_2 \leq x \leq -\tilde{x}_1\}, \Sigma_c^{34} = \{(x, v_0) | x > \tilde{x}_3\}. \end{aligned}$$

由 Filippov 凸组合方法可得系统(2.3)在 Σ_s 上的滑模方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ y = v_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

由于传送带速度 $v_0 > 0$, 显然不存在伪平衡点, 且可知当轨线进入到滑模区域后始终是从滑模域右端离开。

5. 全局动力学及同宿轨分支

定理 5.1: 设 $V_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_1}^x F_1(s)ds$, 其中 x_1 满足 $F_1(x_1) = 0$ 。如果 $l < \eta(h)$, 那么系统(2.3)存在全局吸引子 Ω_1 , 其中 $\Omega_1 = \{(x, y) \in G_1 \cup \Sigma | V_1(x, y) \leq V_1(x_1, v_0)\}$ 。此时系统(2.3)在 Ω_1 的边界上存在唯一全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^1 , 且 Γ_c^1 与滑模域 Σ_s^{11} 相切于点 (x_1, v_0) 。从 Ω_1 外部出发的轨线最终会进入到 Γ_c^1 , 从 Ω_1 内部出发的轨线均为包含 E_1 的闭轨。

证明: 显然可知 $V_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_1}^x F_1(s)ds$ 是系统(2.3)在 R^2 上的 Lyapunov 函数。

该 Lyapunov 函数沿着系统(2.3)求导可得,

$$\dot{V}_1(x, y) = \begin{cases} -\frac{2\mu y}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right), & y > v_0, \\ \leq 0, & y = v_0, \\ 0, & y < v_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

由于 $mg \geq kh$, 则对所有的 $(x, y) \in R^2$, 均有 $\dot{V}_1(x, y) \leq 0$, 且 $\dot{V}_1(x, y) = 0$ 仅在集合 $\Lambda_1 = G_1 \cup (\Sigma \setminus \Sigma_s^{11})$ 上成立。在其余区域均有 $\dot{V}_1(x, y) < 0$, 由广义 LaSalle 不变集原理, 平面内所有轨线终将收敛于 Λ_1 的最大不变集中。对任意的 $(x_0, y_0) \notin \Omega_1$, 其对应轨线必在有限时间内进入到 Σ_s^{11} 中, 根据滑模方程可知, 进入到 Σ_s^{11} 中的轨线都将沿着 Σ_s^{11} 滑至边界点 (x_1, v_0) 后进入 Ω_1 区域, 即 Ω_1 为系统(2.3)的全局吸引子。又由于在

G_1 区域中 $\dot{V}_1(x, y) = 0$, 可知存在围绕平衡点 E_1 的闭轨簇, 由解对初值的连续依赖性, 可得存在唯一的闭轨 Γ_c^1 与 Σ_s^{11} 相切于点 (x_1, v_0) , 且在 G_1 中周期轨的最大能量为 $V_1(x_1, v_0)$, 且 $V_1(x_1, v_0)$ 的水平集为闭集, 则系统(2.3)在 G_1 区域中存在一条全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^1 与滑模域 Σ_s^{11} 相切于点 (x_1, v_0) , 且从 Ω_1 外部出发的轨线最终会进入到 Γ_c^1 , 从 Ω_1 内部出发的轨线均为包含 E_1 的闭轨。证毕。(图 6)

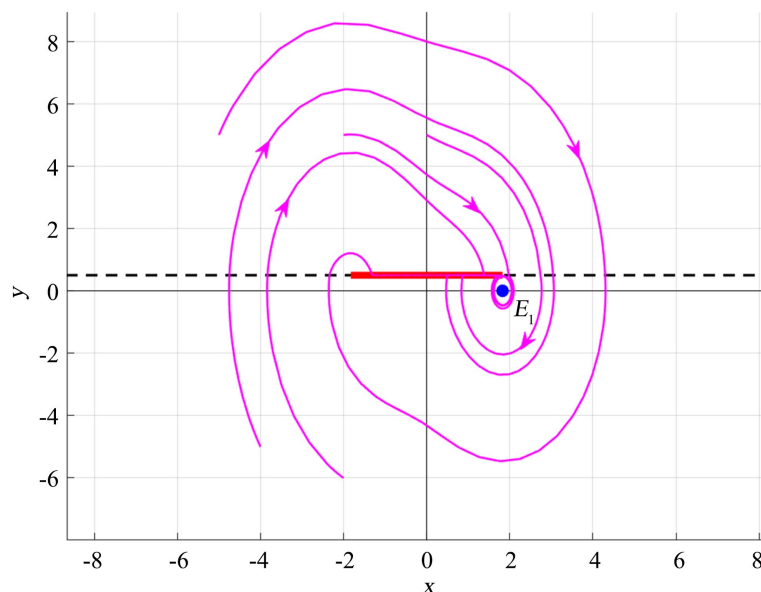


Figure 6. Schematic of a closed orbit tangent to the sliding mode domain. $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.3, g=10, v_0=0.5$

图 6. 存在一条闭轨 Γ_c^1 与滑模域相切的示意图。 $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.3, g=10, v_0=0.5$

同定理 5.1 的证明, 可得以下定理。

定理 5.2: 设 $V_2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{\bar{x}_2}^x F_1(s)ds$, 其中 $\bar{x}_2$ 满足 $F_1(\bar{x}_2) = 0$, $F_1'(\bar{x}_2) < 0$ 。如果 $l < \eta(h)$, 那么系

统(2.3)存在全局吸引子 Ω_2 , 其中 $\Omega_2 = \{(x, y) \in G_1 \cup \Sigma \mid V_2(x, y) \leq V_2(\bar{x}_2, v_0)\}$ 。此时系统(2.3)在 Ω_2 的边界上存在唯一全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^2 , 且 Γ_c^2 与滑模域 Σ_s^{21} 相切于点 $(\bar{x}_2, v_0)$, 从 Ω_2 外部出发的轨线最终会进入到 Γ_c^2 , 从 Ω_2 内部出发的轨线都为包含 E_2 的闭轨。

通过定理 3.2 可知, 当 $l = \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在唯一的同宿环 Γ_0 , 接下来我们讨论在 $l = \eta(h)$ 时系统(2.3)同宿环的存在性。

定理 5.3: 设 $l = \eta(h)$, 则对于系统(2.3)有以下结论:

- 1) 当 $V_2(\bar{x}_1, 0) < V_2(\bar{x}_2, v_0)$ 时, 系统(2.3)存在唯一的同宿环 Γ_0 , 且包含于擦边周期轨 Γ_c^2 内部;
- 2) 当 $V_2(\bar{x}_1, 0) = V_2(\bar{x}_2, v_0)$ 时, 系统(2.3)存在唯一全局渐近稳定的擦边同宿环 Γ_0 , 且与滑模域 Σ_s^{21} 相切于点 $(\bar{x}_2, v_0)$;
- 3) 当 $V_2(\bar{x}_1, 0) > V_2(\bar{x}_2, v_0)$ 时, 系统(2.3)不存在同宿环, 且从平衡点 E_1 出发的不稳定流形收敛至擦边周期轨 Γ_c^2 。

证明: 已知当 $l = \eta(h)$ 时, 系统(2.3)存在一个退化奇点 E_1 和一个中心 E_2 , 且存在一段吸引滑模域 Σ_s^{21} , 进入到 Σ_s^{21} 的轨线均沿滑模从点 $(\bar{x}_2, v_0)$ 进入到 G_1 区域。

根据定理 5.1 与定理 5.2 的证明可知, 在区域 Ω_2 中闭轨的最大能量值为 $V_2(\bar{x}_2, v_0)$ 。若 $V_2(\bar{x}_1, 0) < V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 由于在 G_1 区域中 $\dot{V}_2(x, y) = 0$, 则从平衡点 E_1 出发的轨线在 G_1 区域内构成同宿环 Γ_0 ,

且因为在该点处的能量值小于擦边周期轨 Γ_c^2 的能量值, 同宿轨 Γ_0 必在 Γ_c^2 的内部; 若 $V_2(\bar{x}_1, 0) = V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 此时过平衡点 $\bar{E}_1$ 的轨线会到达点 $(\bar{x}_2, v_0)$ 再进入 G_1 区域最终回到点 $\bar{E}_1$, 从而形成一个全局渐近稳定的擦边同宿环 Γ_0 ; 若 $V_2(\bar{x}_1, 0) > V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 则从平衡点 $\bar{E}_1$ 出发的轨线必将在有限时间内到达滑模域 Σ_s^{21} , 然后收敛至擦边周期轨 Γ_c^2 , 从而同宿环破裂。证毕。

通过定理 5.3 的证明, 发现系统(2.3)同宿环的存在性与参数 v_0 有关, 为了呈现这些分支现象, 我们通过数值模拟的方法验证, 首先固定参数 $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.075144, g=10$, 此时满足 $l=\eta(h)$ 。

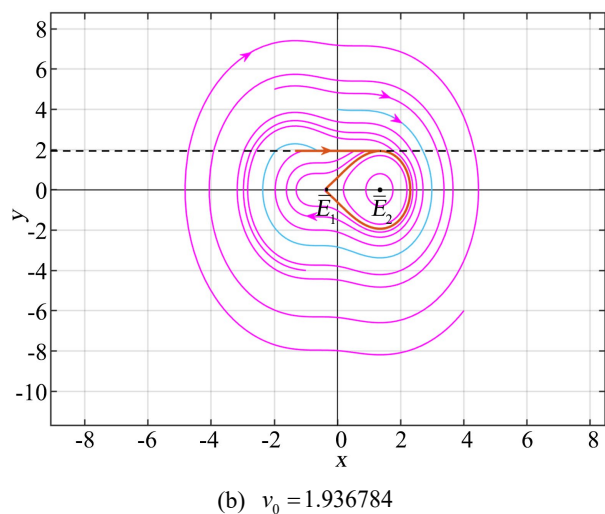
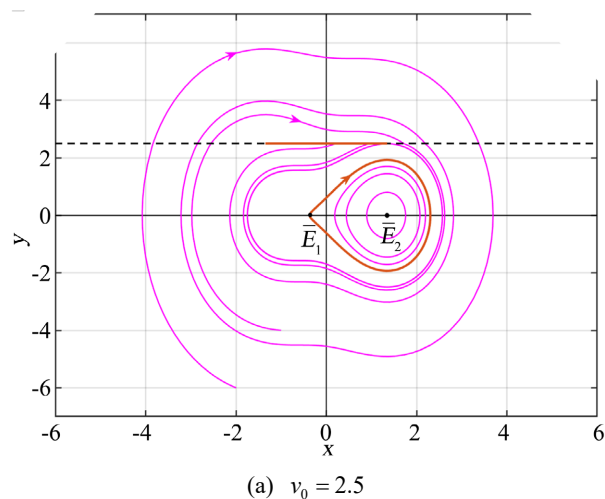
通过积分等式 $V_2(\bar{x}_1, 0) = V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 即 $\int_{\bar{x}_x}^{\bar{x}_s} F_1(s) ds = \frac{1}{2} v_0^2$, 我们可确定临界参数 $v_0 = 1.936784$ 。

数值模拟结果如下:

1) 当 $v_0 > 1.936784$ 时, 满足 $V_2(\bar{x}_1, 0) < V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 此时系统(2.3)存在唯一的同宿环 Γ_0 包含于擦边周期轨 Γ_c^2 内部, 如图 7(a)所示;

2) 当 $v_0 = 1.936784$ 时, 对应临界状态 $V_2(\bar{x}_1, 0) = V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 此时系统(2.3)存在擦边同宿环 Γ_0 , 且在 Γ_0 外部出发的轨线均在有限时间内收敛于 Γ_0 , 如图 7(b)所示;

3) 当 $0 < v_0 < 1.936784$ 时, 满足 $V_2(\bar{x}_1, 0) > V_2(\bar{x}_2, v_0)$, 此时系统(2.3)同宿环 Γ_0 破裂, 从平衡点 $\bar{E}_1$ 出发的不稳定流形所对应的轨线在有限时间内收敛至擦边周期轨 Γ_c^2 , 如图 7(c)所示。



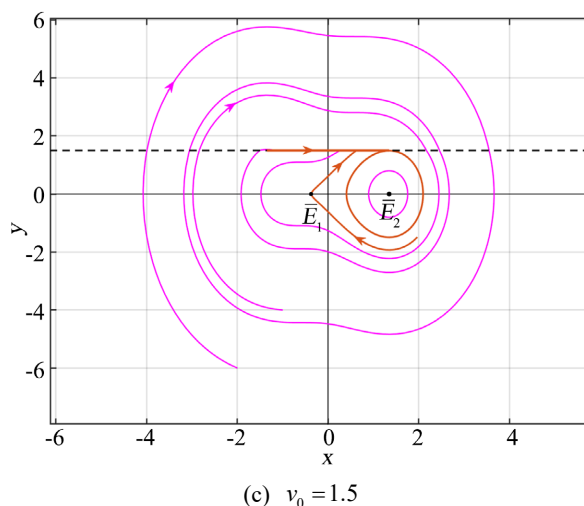


Figure 7. Bifurcation schematic of homoclinic orbits for system (2.3). $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.075144, g=10$

图 7. 系统(2.3)满足 $l=\eta(h)$ 时同宿环的分支示意图。 $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.075144, g=10$

注意到当 $l > \eta(h)$ 时, 系统(2.3)有三个平衡点, 且此时系统(2.3)有三段吸引滑模域 $\Sigma_s^{31}, \Sigma_s^{32}, \Sigma_s^{33}$, 分别在点 $P(\tilde{x}_1, v_0)$ 与点 $Q(\tilde{x}_3, v_0)$ 处脱离滑模域进入 G_1 区域。

设

$$V_3(x, y) = \begin{cases} V_3^1(x, y), & x \geq \tilde{x}_2, \\ V_3^2(x, y) - V_3^2(\tilde{x}_2, y) + V_3^1(\tilde{x}_2, y), & x < \tilde{x}_2. \end{cases} \quad (5.2)$$

其中

$$V_3^1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{\tilde{x}_3}^x F_1(s)ds, \quad V_3^2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{\tilde{x}_1}^x F_1(s)ds.$$

且 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_3$ 分别满足 $F_1(\tilde{x}_1) = F_1(\tilde{x}_3) = 0$, $F_1'(\tilde{x}_1) < 0$, $F_1'(\tilde{x}_3) < 0$ 。

在点 $P(\tilde{x}_1, v_0)$ 处的能量函数值为

$$V_3(\tilde{x}_1, v_0) = \frac{1}{2}v_0^2 + \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} F_1(s)ds, \quad (5.3)$$

在点 $Q(\tilde{x}_3, v_0)$ 处的能量函数值为

$$V_3(\tilde{x}_3, v_0) = \frac{1}{2}v_0^2. \quad (5.4)$$

记 $I(\mu) = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} F_1(s)ds$ 。当 $\mu=0$ 时, 有

$$I(0) = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} -\frac{k}{m}s \left(1 - \frac{1}{\sqrt{s^2 + h_2}} \right) ds = 0. \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\mu)}{\partial \mu} &= F_1(\tilde{x}_3) \frac{d\tilde{x}_3}{d\mu} - F_1(\tilde{x}_1) \frac{d\tilde{x}_1}{d\mu} + \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} \frac{\partial F_1(s)}{\partial \mu} ds \\ &= \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} \frac{1}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{s^2 + h^2}} \right) ds > 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

则有 $I(\mu)$ 关于 μ 严格单调递增, 即当 $\mu > 0$ 时, $I(\mu) = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_3} F_1(s) ds > 0$ 恒成立。

由(5.5)式与(5.6)式可得,

$$V_3(\tilde{x}_1, v_0) > V_3(\tilde{x}_3, v_0). \quad (5.7)$$

定理 5.4: 当 $l > \eta(h)$ 时, 函数 $V_3(x, y)$ 是系统(2.3)在 R^2 上的 Lyapunov 函数, 且有

1) 若 $V_3(\tilde{x}_1, v_0) < V_3(\tilde{x}_2, 0)$, 则系统(2.3)存在双稳态全局吸引子 $\Omega_3^1 = \Omega_3^{11} \cup \Omega_3^{12}$, 其中

$$\Omega_3^{11} = \{(x, y) \in G_1 \cup \Sigma \mid V_3(x, y) \leq V_3(\tilde{x}_1, v_0), x < \tilde{x}_2\},$$

$$\Omega_3^{12} = \{(x, y) \in G_1 \cup \Sigma \mid V_3(x, y) \leq V_3(\tilde{x}_3, v_0), x > \tilde{x}_2\}.$$

系统(2.3)存在两个全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^{31} 和 Γ_c^{32} , 分别与滑模域 Σ_s^{31} 和 Σ_s^{33} 相切于点 P 与点 Q 。

2) 若 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) > V_3(\tilde{x}_2, 0)$, 则系统(2.3)存在全局吸引子 Ω_3^2 , 其中

$$\Omega_3^2 = \{(x, y) \in G_1 \cup \Sigma \mid V_3(x, y) \leq V_3(\tilde{x}_1, v_0)\}.$$

且系统(2.3)存在一个包含三个平衡点的全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^{33} , 且 Γ_c^{33} 与 Σ_s^{33} 相切于点 Q 。

证明: 该 Lyapunov 函数沿着系统(2.3)求导可得,

$$\dot{V}_3(x, y) = \begin{cases} -\frac{2\mu y}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right), & y > v_0, x \geq \tilde{x}_2, \\ -\frac{2\mu y}{m} \left(mg - kh + \frac{kh l}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right), & y > v_0, x < \tilde{x}_2, \\ 0, & y < v_0, x \geq \tilde{x}_2, \\ 0, & y < v_0, x < \tilde{x}_2, \\ \leq 0, & y = v_0, x \geq \tilde{x}_2, \\ \leq 0, & y = v_0, x < \tilde{x}_2. \end{cases} \quad (5.8)$$

综上, 对任意的 $(x, y) \in R^2$, 均有 $\dot{V}_3(x, y) \leq 0$, 且 $\dot{V}_3(x, y) = 0$ 仅在集合 $\Lambda_2 = G_1 \cup \left(\Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^3 \Sigma_s^{3i} \right)$ 上成立, 在其余区域均有 $\dot{V}_3(x, y) < 0$ 。

对于情形(1), 当 $V_3(\tilde{x}_1, v_0) < V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 时, 由于过点 P 与点 Q 的轨线会进入 G_1 区域, 且在 G_1 区域中 $\dot{V}_3(x, y) = 0$, 结合 $V_3(\tilde{x}_2, 0) \leq V_3(\tilde{x}_2, y)$, 则过点 $(\tilde{x}_1, v_0)$ 与点 $(\tilde{x}_3, v_0)$ 的两条轨线均不会穿过 $x = \tilde{x}_2$ 这条直线, 同定理 5.1 分析, 可得系统(2.3)存在由两个不连通紧致集构成的双稳态的全局吸引子 $\Omega_3^1 = \Omega_3^{11} \cup \Omega_3^{12}$, 且在平衡点 $\tilde{E}_2$ 左右两侧出发的不稳定流形分别会收敛于全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^{31} 和 Γ_c^{32} , 在 Ω_3^1 外部的轨线均会收敛至擦边周期轨 Γ_c^{31} 或 Γ_c^{32} , 在 Γ_c^{31} 内部的轨线均为包含 $\tilde{E}_1$ 的闭轨, 在 Γ_c^{32} 内部的轨线均为包含 $\tilde{E}_2$ 的闭轨。

对于情形(2), 当 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) > V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 时, 此时过点 P 与点 Q 的轨线必然会穿过 $x = \tilde{x}_2$, 且不会与 $\tilde{E}_2$ 相交。同定理 5.1, 可知系统(2.3)存在全局吸引子 Ω_3^2 。由 $V_3(\tilde{x}_1, v_0) > V_3(\tilde{x}_3, 0)$, 则从点 P 出发的轨线会穿过 $x = \tilde{x}_2$ 包围住 $\tilde{E}_3$ 并在有限时间内到达点 Q 形成一个包含三个平衡点的擦边周期轨 Γ_c^{33} 。证毕。

通过定理 3.2, 可知当 $l > \eta(h)$ 时, 系统(2.4)存在唯一的双同宿环 Γ_1 , 接下来我们讨论在该条件下系统(2.3)同宿环的存在性。

定理 5.5: 若 $l > \eta(h)$, 则对系统(2.3)有以下结论成立:

1) 当 $V_3(\tilde{x}_1, v_0) < V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 时, 系统(2.3)不存在同宿环, 此时由鞍点 $\tilde{E}_2$ 左、右两侧分别出发的不稳定

流形将各自收敛于左侧擦边周期轨 Γ_c^{31} 与右侧擦边周期轨 Γ_c^{32} ;

2) 当 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) > V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 时, 系统(2.3)存在唯一的双同宿环 Γ_1 , 且该同宿环包含于一个大擦边周期轨 Γ_c^{33} 内部;

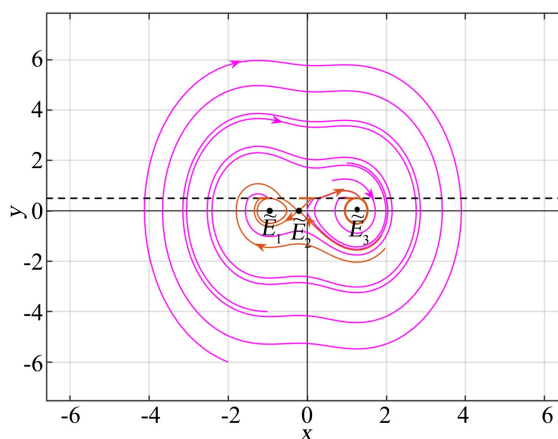
3) 当 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) \leq V_3(\tilde{x}_2, 0) \leq V_3(\tilde{x}_1, v_0)$ 时, 分以下三种情形:

a) 若 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) = V_3(\tilde{x}_2, 0) < V_3(\tilde{x}_1, v_0)$, 则系统(2.3)存在唯一全局渐近稳定的擦边双同宿环 Γ_1 , 且与滑模域 Σ_s^{33} 相切于点 Q ;

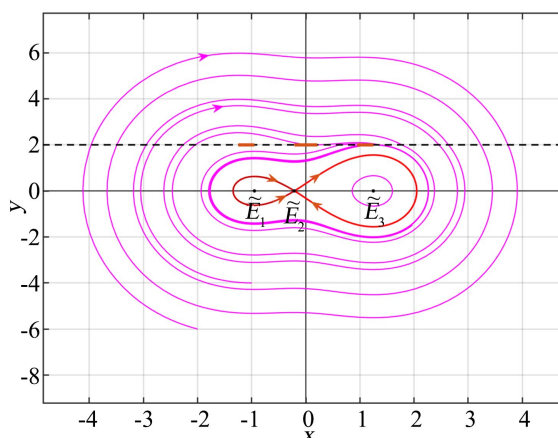
b) 若 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) < V_3(\tilde{x}_2, 0) = V_3(\tilde{x}_1, v_0)$, 则系统(2.3)在 $\tilde{E}_2$ 左侧存在擦边同宿环 Γ_1^1 , 右侧存在擦边周期轨 Γ_c^{32} , 其中 Γ_1^1 与 Σ_s^{31} 相切于点 P , Γ_c^{32} 与 Σ_s^{33} 相切于点 Q ;

c) 若 $V_3(\tilde{x}_3, v_0) < V_3(\tilde{x}_2, 0) < V_3(\tilde{x}_1, v_0)$, 则系统(2.3)在 $\tilde{E}_2$ 右侧同宿环破裂, 且从 $\tilde{E}_2$ 右侧出发的不稳定流形收敛至全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^{32} , 且 Γ_c^{32} 与 Σ_s^{33} 相切于点 Q 。

证明: 通过定理 5.3 的证明可知, 若情况(1)成立, 由于在鞍点 $\tilde{E}_2$ 处的能量函数 $V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 大于点 P 与点 Q 处的能量函数, 故从 $\tilde{E}_2$ 左侧出发的不稳定流形会收敛至左擦边周期轨 Γ_c^{31} , 从 $\tilde{E}_2$ 右侧出发的不稳定流形会收敛至右擦边周期轨 Γ_c^{32} , 此时双同宿环左右两侧均破裂, 如图 8(a)所示; 若情况(2)成立, 因在 $\tilde{E}_2$ 处的能量函数 $V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 小于点 P 与点 Q 的能量函数, 则此时双同宿环 Γ_1 包含于一个包含三个平衡点的大擦边周期轨 Γ_c^{33} 内部, 且在 Γ_1 与 Γ_c^{33} 之间的区域均为包含三个平衡点的闭轨, 在 Γ_1^1 内部均为包含 $\tilde{E}_1$ 的闭轨, 在 Γ_1^2 内部均为包含 $\tilde{E}_3$ 的闭轨。如图 8(b)所示。



(a) $v_0 = 0.5$



(b) $v_0 = 2$

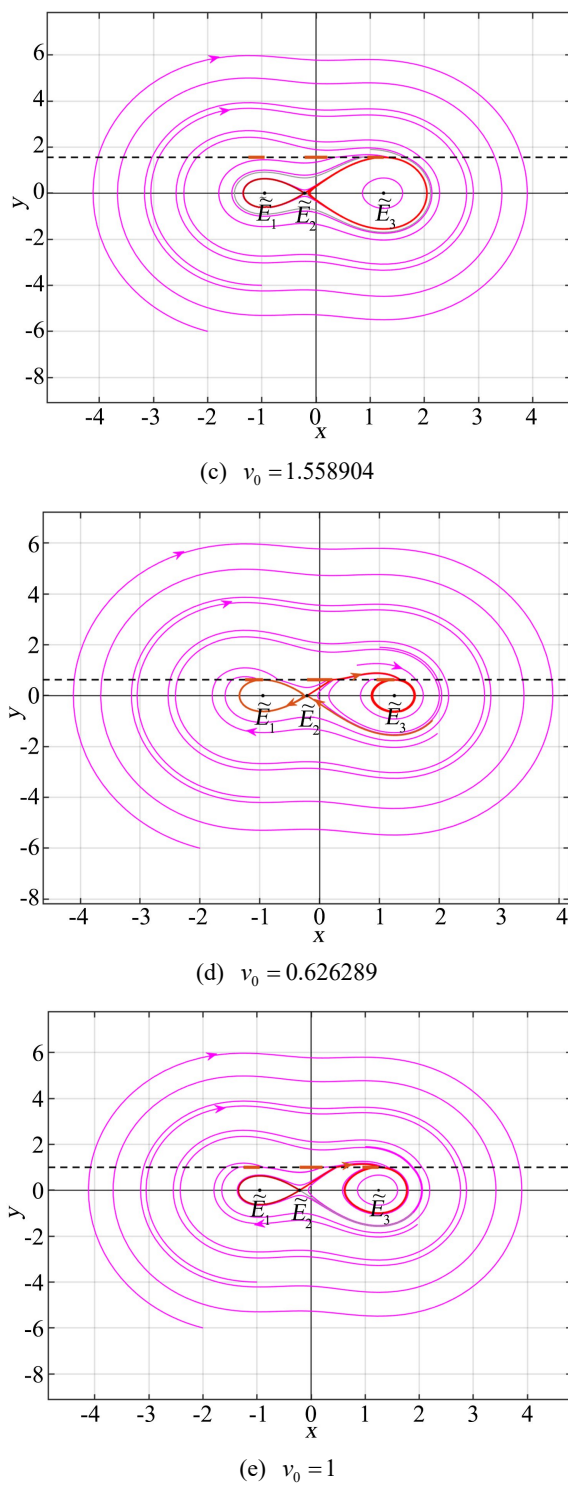


Figure 8. Schematic of homoclinic orbit bifurcation for system (2.3). $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.04, g=10$

图 8. 系统(2.3)满足 $l > \eta(h)$ 时同宿环的分支示意图。 $m=1, k=5, h=1, l=1.5, \mu=0.04, g=10$

若情况(3)中子情形 a 成立, 此时在 $\tilde{E}_2$ 处的能量函数 $V_3(\tilde{x}_2, 0)$ 等于点 Q 处的能量函数, 则从 $\tilde{E}_2$ 右侧不稳定流形出发的轨线会到达点 Q 形成一个擦边同宿环, 由于在点 P 处的能量大于在 $\tilde{E}_2$ 处的能量, 则 $\tilde{E}_2$

左侧的同宿环仍然存在, 共同形成一个擦边双同宿环。如图 8(c)所示。类似的, 可得子情形 b, 对应图 8(d)。若情况(3)中子情形 c 成立, 由于在点 Q 处的能量小于在 $\tilde{E}_2$ 处的能量, 则系统(2.3)从点 Q 出发的轨线不会穿过 $x = \tilde{x}_2$, 所以在 $\tilde{E}_2$ 右侧存在全局渐近稳定的擦边周期轨 Γ_c^{32} , 此时 $\tilde{E}_2$ 右侧同宿环破裂, 且从右侧出发的不稳定流形收敛于 Γ_c^{32} 。而 $\tilde{E}_2$ 左侧同宿环仍然存在。如图 8(e)所示。证毕。

6. 结论

本文针对置于运动传送带上的干摩擦 SD 振子系统, 结合 Filippov 非光滑系统理论与 Lyapunov 稳定性方法开展了全局动力学分析。通过引入相对速度变量 $\dot{x} - v_0$, 将系统模型转化为具有非零速度切换流形的 Filippov 不连续动力系统, 详细探讨了系统平衡点分布、滑模动力学特征及全局分支行为。主要结论如下:

- 1) 系统平衡点的数量与类型由参数曲线 $l = \eta(h)$ 决定。当参数跨越临界值 $l = \eta(h)$ 时, 系统存在从单一中心到退化奇点与中心并存, 再到鞍点与两个中心并存的拓扑结构演变(定理 3.1)。
- 2) 滑模动力学受传送带速度影响。在运动传送带速度 $v_0 > 0$ 的条件下, 系统不存在伪平衡点。滑模域的存在性与个数同样取决于 l 与 $\eta(h)$ 的关系(定理 4.1)。
- 3) 系统存在 Lyapunov 函数并存在全局渐近稳定的擦边周期轨。针对三种不同参数情形, 本文构造了全局 Lyapunov 函数。通过广义 LaSalle 不变集原理证明了系统存在由闭轨构成的全局吸引子。
- 4) 传送带速度 v_0 是决定系统同宿环产生、擦边与破裂的关键参数。本文揭示了 v_0 是诱发系统同宿轨产生、擦边与破裂的关键参数。临界速度的存在直接主导了同宿轨的破裂机制, 导致系统最终收敛于不同的吸引子结构(定理 5.3、定理 5.5)。

与文献中已有的静态传送带模型($v_0 = 0$)的动力学行为对比:

当传送带速度静止时($v_0 = 0$), 此时系统平衡点就不是单个或多个的平衡点, 而是存在平衡点集, 并且该平衡点集由分支曲线 $l = \eta(h)$ 决定: 若 $l < \eta(h)$, 则系统存在唯一的平衡点集, 并且是全局有限时间渐近稳定的; 若 $l = \eta(h)$, 此时系统存在三个孤立的平衡点集, 其中位于中间的平衡点集是不稳定的, 两侧的平衡点集是全局渐近稳定的。

参考文献

- [1] 王松年. 摩擦学原理及应用[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1990.
- [2] Urbakh, M., Klafter, J., Gourdon, D. and Israelachvili, J. (2004) The Nonlinear Nature of Friction. *Nature*, **430**, 525-528. <https://doi.org/10.1038/nature02750>
- [3] Kowalczyk, P. and di Bernardo, M. (2005) Two-Parameter Degenerate Sliding Bifurcations in Filippov Systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **204**, 204-229. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.04.013>
- [4] Cao, Q., Wiercigroch, M., Pavlovskaja, E.E., Grebogi, C. and T. Thompson, J.M. (2006) Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics. *Physical Review E*, **74**, Article ID: 046218. <https://doi.org/10.1103/physreve.74.046218>
- [5] Cao, Q., Wiercigroch, M., Pavlovskaja, E.E., Grebogi, C. and Thompson, J.M.T. (2008) The Limit Case Response of the Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **43**, 462-473. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.003>
- [6] Cao, Q., Wiercigroch, M., Pavlovskaja, E.E., Thompson, J.M.T. and Grebogi, C. (2007) Piecewise Linear Approach to an Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **366**, 635-652. <https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2115>
- [7] Chen, H., Duan, S., Tang, Y. and Xie, J. (2018) Global Dynamics of a Mechanical System with Dry Friction. *Journal of Differential Equations*, **265**, 5490-5519. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.013>
- [8] Chen, H., Llibre, J. and Tang, Y. (2017) Global Dynamics of a SD Oscillator. *Nonlinear Dynamics*, **91**, 1755-1777. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3979-y>
- [9] Li, Z., Cao, Q. and Léger, A. (2017) The Complicated Bifurcation of an Archetypal Self-Excited SD Oscillator with Dry

-
- Friction. *Nonlinear Dynamics*, **89**, 91-106. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3438-9>
- [10] Li, Z., Cao, Q. and Nie, Z. (2020) Stick-Slip Vibrations of a Self-Excited SD Oscillator with Coulomb Friction. *Nonlinear Dynamics*, **102**, 1419-1435. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06009-3>
- [11] Wang, J., Huang, W. and Huang, L. (2023) Global Dynamics and Bifurcation for a Discontinuous Oscillator with Irrational Nonlinearity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **119**, Article ID: 107073. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107073>
- [12] Filippov, A.F. (1964) *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Kluwer Academic Publishers.
- [13] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [14] Buzzi, C.A., de Carvalho, T. and da Silva, P.R. (2013) Closed Poly-Trajectories and Poincaré Index of Non-Smooth Vector Fields on the Plane. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **19**, 173-193. <https://doi.org/10.1007/s10883-013-9169-4>
- [15] 张芷芬. 微分方程定性理论[M]. 科学出版社, 1985.