

一类三次曲面的分类

黄 昊

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年9月26日; 录用日期: 2026年10月19日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

本文考虑实参数 λ 的三次曲面族: $S_\lambda \subset P^4: \begin{cases} \lambda x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + t^3 = 0 \\ x + y + z + w + t = 0 \end{cases}$ 。将超平面 $x + y + z + w + t = 0$ 视

为 P^3 利用Jacobian秩判据证明其复化仅 $\lambda = \frac{1}{16}$, $\lambda = \frac{1}{4}$ 时奇异。对于非奇异参数, 利用方程关于 y, z, w, t 的置换对称性, 显式构造光滑情形下的27条直线, 其中三条固定, 其余24条直线分为 $q = 0$ 和 $q \neq 0$ 两个代数分支。对 $q \neq 0$ 分支, 将控制直线的回文四次方程经 $u = q^2$ 化为二次方程, 对 $q = 0$ 分支, 通过二次方程的判别式判断直线的实性, 并进一步利用复共轭直线对的对交关系区分仅含3条实直线的两种Schläfli类型。最终得到: 当 $\lambda > \frac{1}{4}$ 时, $S_\lambda \in F_1$, 当 $\frac{1}{16} < \lambda < \frac{1}{4}$ 时, $S_\lambda \in F_5$, 当 $\lambda < \frac{1}{16}$ 时, $S_\lambda \in F_4$ 。该方法避免了求解一般三次曲面直线提取中出现的27次消元多项式, 给出了该对称曲面族Schläfli类型转变的直接代数证明, 并明确描述了相应的直线配置。

关键词

实三次曲面, Schläfli分类, 27条直线, 复共轭直线, 置换对称性, 奇异参数

Classification of a Class of Cubic Surfaces

Hao Huang

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: September 26, 2026; accepted: October 19, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

We study the one-parameter family of real cubic surfaces: $S_\lambda \subset P^4: \begin{cases} \lambda x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + t^3 = 0 \\ x + y + z + w + t = 0 \end{cases}$.

Viewing the hyperplane $x + y + z + w + t = 0$ as P^3 , we use the Jacobian rank criterion to show that the complexification of S_λ is singular if and only if $\lambda = \frac{1}{16}$ or $\lambda = \frac{1}{4}$. For every nonsingular parameter, the permutation symmetry in y, z, w, t allows us to construct all 27 lines explicitly. Three of them are fixed real lines, while the remaining 24 lines split into two algebraic branches. For the $q \neq 0$ branch, a reciprocal quartic equation is reduced to a quadratic equation by setting $u = q^2$; the $q = 0$ branch is governed by a second quadratic equation. Combining the reality of their roots with the incidence relations of complex-conjugate line pairs, we obtain: $\lambda > \frac{1}{4}$, $S_\lambda \in F_1$; $\frac{1}{16} < \lambda < \frac{1}{4}$, $S_\lambda \in F_5$ and $\lambda < \frac{1}{16}$, $S_\lambda \in F_4$. Thus, the Schläfli-type transitions of this symmetric family are obtained by a direct algebraic argument without solving the degree-27 elimination polynomial required in general methods. The corresponding configurations of the 27 lines are also described explicitly.

Keywords

Real Cubic Surface, Schläfli Classification, 27 Lines, Complex-Conjugate Lines, Permutation Symmetry, Singular Parameter

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非奇异复三次曲面上的 27 条直线是经典代数几何中的基本结果之一。Schläfli 利用双六组(double-six)刻画了这些直线的相交结构,并据此研究实三次曲面的不同类型[1]。Salmon 系统整理了三次曲面的解析几何理论[2],Henderson 专门讨论了 27 条直线及其配置[3],Segre 则进一步研究了实三次曲面上直线的实性、复共轭作用及其退化情况[4]。

对定义在 R 上的非奇异三次曲面,其复化仍含有 27 条直线,但这些直线未必全部定义在 R 上。非实直线在复共轭作用下成对出现。按照实直线的数目及复共轭线对之间的相交关系,非奇异实三次曲面可分为五种 Schläfli 类型 F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 : 其中 F_1, F_2, F_3 分别含有 27、15 和 7 条实直线,而 F_4, F_5 均只含有 3 条实直线。二者的区别在于: F_4 的 12 对复共轭直线中有 6 对异面、6 对共面,而 F_5 的 12 对复共轭直线全部共面[4]-[7]。因此,在仅有 3 条实直线的情形下,仅统计实直线数目并不足以确定曲面类型。

对一般三次曲面,直线提取和参数化通常需要较复杂的消元计算。Abhyankar 和 Bajaj 研究了三次曲线与三次曲面的自动参数化问题[5];Sederberg 和 Snively 利用切平面及曲面交线构造了三次代数曲面的参数表示[6];Bajaj、Holt 和 Netravali 则给出了适用于一般非奇异实三次曲面的计算方法,通过构造并求解一个 27 次多项式提取曲面上的 27 条直线,并利用这些直线的实性判断曲面类型[7]。对于 F_1, F_2, F_3 型曲面,可利用实斜线构造有理参数化; F_4 型可利用一对复共轭斜线;而 F_5 型由于不存在复共轭斜线,需要采用不同的参数化方法[7]。

文献[5]-[7]给出了适用于一般三次曲面的参数化和直线提取方法,但相关计算通常涉及消元运算或

较高次数的代数方程[8]。Polo-Blanco 和 Top 进一步从几何角度给出了非奇异三次曲面的参数化算法,并提供了由隐式方程寻找曲面上全部直线的方法。与这些面向一般三次曲面的算法不同,本文针对一个具有特殊置换对称性的单参数三次曲面族,不以构造一般参数化为目的,而是利用 y, z, w, t 四个变量之间的对称性,将其余 24 条直线分解为 $q \neq 0$ 与 $q = 0$ 两个低次代数分支。由此, Schläfli 类型的判定可归结为一个四次方程、一个二次方程的根的实性以及复共轭直线的线性相交检验,从而避免一般情形下较高次数的消元计算。

2. 预备知识

2.1. Schläfli 分类

定义 1 (Schläfli 类型): 设 $S \subset P_R^3$ 为非奇异实三次曲面,并设其复化 $S_c \subset P_c^3$ 也是非奇异的。由经典结果, S_c 上恰有 27 条直线。复共轭作用 $\sigma: p_c^3 \rightarrow p_c^3$ 。

保持 S_c 不变,因此这 27 条直线在复共轭作用下或者保持不变,或者成复共轭直线对出现。其中,被复共轭作用保持不变的直线即为定义在 R 上的实直线。

按照实直线的数目以及非实复共轭直线对之间的相交关系,将非奇异实三次曲面分为以下五种 Schläfli 类型:

- 1) 若 S 上的 27 条直线全部为实直线,则称 S 为 F_1 型曲面。
- 2) 若 S 上有 15 条实直线,其余 12 条非实直线组成 6 对复共轭直线,则称 S 为 F_2 型曲面。
- 3) 若 S 上有 7 条实直线,其余 20 条实直线组成 10 对复共轭直线,则称 S 为 F_3 型曲面。
- 4) 若 S 上有 3 条实直线,其余 24 条非实直线组成 12 对复共轭直线,其中恰有 6 对互为异面直线,另外 6 对互为共面直线,则称 S 为 F_4 型曲面。
- 5) 若 S 上有 3 条实直线,其余 24 条非实直线组成 12 对复共轭直线,并且每一对复共轭直线均为共面直线,则称 S 为 F_5 型曲面。

这里,两条不同的射影直线若包含在同一个射影平面中,则称它们为共面直线;在 P^3 中,两条不同直线共面当且仅当它们相交。若两条直线没有公共点,则称其为异面直线。

在复射影空间中,非奇异三次曲面恰 27 条直线[1] [9]。对实三次曲面而言,非实直线成复共轭对出现,因此曲面类型不仅由实直线条数决定;当实直线只有 3 条时,还必须考察共轭线对是否相交。下面采用 F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 的记号。

2.2. 奇点

定义 2 (完全交曲面的奇点): 设 $K = R$ 或 C 并设 $F, H \in [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ 为齐次多项式。考虑射影代数簇

$$S = V(F, H) = \{p \in p_k^4 : F(P) = H(P) = 0\}.$$

假设 S 是 P_k^4 中余维为 2 的完全交曲面。对于任意点

$$P = [x : y : z : w : t] \in S$$

定义 F, H 在 P 处的 Jacobian 矩阵为

$$J_s(p) = \begin{pmatrix} F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) & F_w(p) & F_t(p) \\ H_x(p) & H_y(p) & H_z(p) & H_w(p) & H_t(p) \end{pmatrix}$$

若

$$\operatorname{rank} J_s(p) < 2$$

则称 P 为曲面 S 的一个**奇点**；若 $\operatorname{rank} J_s(p) = 2$ ，则称 P 为 S 的**非奇异点**或**光滑点**。若 S 上不存在奇点，则称 S 为**非奇异曲面**或**光滑曲面**。

3. 三次曲面的分类

3.1. 单参数三次曲面分类

考虑实射影空间中的单参数三次曲面族 $\lambda x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0$ ，为了方便研究，我们把曲面写成

$$S_\lambda : \begin{cases} \lambda x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + t^3 = 0, \\ x + y + z + w + t = 0. \end{cases}$$

其中 $[x:y:z:w:t] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ 。端点 $\lambda = \frac{1}{4}$ 或者 $\lambda = \frac{1}{16}$ 为奇异参数。

3.2. 奇异参数的确定

令 $F = \lambda x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + t^3$ ， $H = x + y + z + w + t$ ，那么由上述定义 2 可知，曲面 S_λ 在超平面 $H = 0$ 中存在奇异点，当且仅当存在 $\mu \in \mathbb{C}$ ，满足 $\nabla F = \mu \nabla H$ 。根据

$$\nabla F = (3\lambda x^2, 3y^2, 3z^2, 3w^2, 3t^2), \quad \nabla H = (1, 1, 1, 1, 1)$$

可得

$$3\lambda x^2 = 3y^2 = 3z^2 = 3w^2 = 3t^2 = \mu,$$

其中 $\mu \neq 0$ ，否则 $y = z = w = t = 0$ 。再由 $H = 0$ 得 $x = 0$ ，与射影坐标不全为 0 矛盾， $\lambda = 0$ 的情形也同样不能产生奇点。令

$$r^2 = \frac{\mu}{3}$$

则存在 $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ ，使得

$$y = \varepsilon_1 r, \quad z = \varepsilon_2 r, \quad w = \varepsilon_3 r, \quad t = \varepsilon_4 r, \quad x = \varepsilon_0 \frac{r}{\sqrt{\lambda}}$$

代入超平面方程 $H = 0$ ，得到

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\lambda}} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

零值不可能，因此

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 4,$$

从而

$$\lambda = \frac{1}{4} \text{ 或 } \lambda = \frac{1}{16}.$$

反过来当 $\lambda = \frac{1}{16}$ ， $p = [-4:1:1:1:1]$ 满足 $F(p) = H(p) = 0$ ，并且 $3\lambda x^2 = 3y^2 = 3z^2 = 3w^2 = 3t^2 = 3$ ，故

p 为奇点: 当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, $p = [-2:1:1:1:-1]$, 以及将最后四个坐标中的 -1 作四种置换所得的恰有四个不同奇点。

所以在三个开区间

$$\left(-\infty, \frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

内, 曲面均为非奇异三次曲面。直接代入可见, 对于任意 λ , 曲面上始终有以下 3 条实直线:

$$L_1: \begin{cases} x=0, \\ y+z=0, \\ w+t=0, \end{cases} L_2: \begin{cases} x=0, \\ y+w=0, \\ z+t=0, \end{cases} L_3: \begin{cases} x=0, \\ y+t=0, \\ z+w=0. \end{cases}$$

为构造其余直线, 利用方程在 y, z, w, t 四个变量上的置换对称性, 先固定一种变量配对方式。在线上取齐次参数 $[s:r] \in P^1$, 并选取如下线性形式 $x=s, y=r, z=As-r, w=Cs+qr$ 。

根据 $H=0$ 得到 $t=-x-y-z-w$, 将它代入三次方程 $F=\lambda x^3+y^3+z^3+w^3+t^3$ 中, 得到关于 s, r 的三次齐次多项式 $F|_L = c_{30}s^3 + c_{21}s^2r + c_{12}sr^2 + c_{03}r^3$, 其中

$$\begin{aligned} c_{30} &= \lambda - 1 - 3A^2C - 3A^2 - 3AC^2 - 6AC - 3A - 3C^2 - 3C, \\ c_{21} &= -3[A^2(q+1) + 2ACq + 2Aq + 2Cq + q], \\ c_{12} &= 3[A(1-q^2) - q^2], \\ c_{03} &= 0 \end{aligned}$$

要使整条直线都在曲面上, 必须有 $F|_L \equiv 0$, 即 $c_{30} = c_{21} = c_{12} = c_{03} = 0$, 解这些系数方程。

由 $c_{12} = 0$ 可知 $q \neq \pm 1$ 并有

$$A = -\frac{q^2}{q^2-1}, \quad C = \frac{q^2-q+1}{2(q-1)},$$

将 A, C 代入 c_{30} 中, 得到 $P_\lambda(q) := (4\lambda-1)q^4 - (8\lambda+1)q^2 + (4\lambda-1) = 0$, 对于 $q=0$ 重新带回系数方程, 此时 $c_{12} = 3A = 0$ 故 $A=0$, 而 $c_{21}=0$ 自动成立; $c_{30}=0$ 化为 $3c^2+3c+1-\lambda=0$ 。

于是得到直线

$$L_q: \begin{cases} z - \left(-\frac{q^2}{q^2-1}\right)x + y = 0, \\ w - \left(\frac{q^2-q+1}{2(q-1)}\right)x - qy = 0, \\ x + y + z + w + t = 0. \end{cases}$$

再对 y, z, w, t 作相应置换(可取三种配对方式)可得, $q \neq 0$ 时共给出 12 条互异直线。该分支的实性由 $P_\lambda(q)=0$ 的根决定; 当 $q=0$ 时, 由 $C_{12}=0$ 得 $A=0$, 而 $C_{21}=0$ 自动成立; 此时 $C_{30}=0$ 化为 $3c^2+3c+1-\lambda=0$ 。对应直线可写成

$$y+z=0, \quad w-cx=0, \quad x+y+z+w+t=0$$

在非奇异参数 $\lambda \neq \frac{1}{4}$ 下, 上述二次方程有两个不同根。对 y, z, w, t 作置换后, $q=0$ 时给出另外 12 条互异直线。于是除 3 条固定实直线外, 其余 24 条直线分成两组, 对 y, z, w, t 作三种配对置换后, $q \neq 0$ 分支产生 12 条互异直线, $q=0$ 分支产生另外 12 条互异直线。连同前述 3 条固定直线, 共得到 27 条互异

直线。由于非奇异复三次曲面恰有 27 条直线，故上述构造已经穷尽 S_λ 上的全部直线； $q \neq 0$ 时 12 条， $q = 0$ 时 12 条。对 $q \neq 0$ 分支 $L_q \cap \{x=0\} = [0:1:-1:q:-q]$ ，而 $x=0$ 是超平面，且 L_q 不包含在 $x=0$ 内。如果 L_q 是实直线，那么它与这个超平面的唯一交点必须是实点，因此 $[0:1:-1:q:-q]$ 也必须是实射影点，从而 $q \in R$ ，同样的。对 $q = 0$ 分支 $L_c = [s:r:-r-Cs:-(1+c)s]$ ， $L_c \cap \{y=0\} = [1:0:0:C:-(1+C)]$ ，可以得到 L_c 为实直线等价于 $C \in R$ 。

3.3. 在 $\frac{1}{4} < \lambda < +\infty$ 时，曲面属于 F_1 类

根据上节，除 3 条固定实直线外，其余 24 条直线由 $P_\lambda(q)$ 控制。令 $u = q^2$ ，则四次方程化为二次方程为 $(4\lambda-1)u^2 - (8\lambda+1)u + (4\lambda-1) = 0$ ，其判别式为 $\Delta = 3(16\lambda-1)$ ，当 $\lambda > \frac{1}{4}$ 时，显然有 $\Delta > 0$ ， $4\lambda-1 > 0$ ，所以 u 有两个不同实根 u_1, u_2 ，由韦达定理可得，

$$u_1 u_2 = \frac{4\lambda-1}{4\lambda-1} = 1 > 0, \quad u_1 + u_2 = \frac{8\lambda+1}{4\lambda-1} > 0 \quad (1)$$

所以 $u_1 > 0, u_2 > 0$ 。当 $\lambda > \frac{1}{4}$ 时， $P_\lambda(q) = 0$ 的 4 个根均为实数， $q \neq 0$ 时的 12 条直线均为实线。 $q = 0$ 时， $3c^2 + 3c + 1 - \lambda = 0$ 的判别式为 $\Delta_c = 3(4\lambda-1) > 0$ ，其 12 条直线也全部为实线。连同 3 条固定实直线，共有 27 条实直线，根据定义 1，在 $\lambda > \frac{1}{4}$ 时，曲面属于 F_1 类。

3.4. 在 $\frac{1}{16} < \lambda < \frac{1}{4}$ 时，曲面属于 F_5 类

在此区间中的判别式仍为 3.3 节中的 $\Delta = 3(16\lambda-1)$ ，因为 $\lambda > \frac{1}{16}$ ，所以 $\Delta > 0$ ，因此 u 有两个不同实根 u_1, u_2 ，并且由于 $\lambda < \frac{1}{4}$ ，所以 $4\lambda-1 < 0$ ，从而根据(1)式得 $u_1 u_2 = 1 > 0$ ， $u_1 + u_2 < 0$ ，从而 $u_1 < 0$ ， $u_2 < 0$ ， $q^2 = u_i < 0$ ，于是 $P_\lambda(q) = 0$ 的四个根均为纯虚数， $q \neq 0$ 时 12 条直线均为非实直线。 $q = 0$ 时的判别式为 $\Delta_c = 3(4\lambda-1) < 0$ ，此时的 12 条直线也均为非实直线。曲面上只剩前述 3 条固定实直线，因此只有三条实直线。

已知 $u_1, u_2 < 0$ ， q 为纯虚数，所以 $\bar{q} = -q$ 。又因为 $A(q) = -\frac{q^2}{q^2-1}$ 只依赖于 q^2 ，所以 $A(-q) = A(q)$ ，于是 L_q 与 L_{-q} 共同位于

$$\begin{cases} z - A(q)x + y = 0, \\ x + y + z + w + t = 0, \end{cases}$$

所定义的射影平面中。所以 L_q 与其复共轭线 L_{-q} 是共面的。同理对 y, z, w, t 进行置换得到的复共轭线均为共面对。

$q = 0$ 时，两个根 C 与 $\bar{C}$ 互为共轭，相应的两条线都满足 $y+z=0$ 和 $H=0$ ，所以也共面。因此在该区间内， S_λ 有 3 条实直线，并且 12 对共轭线都共面。根据定义 1，在区间 $\frac{1}{16} < \lambda < \frac{1}{4}$ ，曲面属于 F_5 类。

3.5. 在 $\lambda < \frac{1}{16}$ 时，曲面属于 F_4 类

当 $\lambda < \frac{1}{16}$ 时， $P_\lambda(q)$ 的二次化判别式为负， $q \neq 0$ 分支没有实直线；同时 $\Delta_c = 3(4\lambda-1) < 0$ 。 $q = 0$ 时

也没有实直线。因此 S_λ 仍只有 3 条固定实直线。根据定义 1, 下面需再证明存在一对复共轭斜线即可判定为 F_4 。

此时二次方程的两个根 u_1, u_2 互为共轭, 且 $u_1 u_2 = 1$, 因此 $|u_i| = 1$ 。根据 $q^2 = u_i$ 有 $\bar{q} = \frac{1}{q}$ 。考虑 L_q 与其复共轭线 $L_{\frac{1}{q}}$ 。将两条直线联立, 得到五个线性方程:

$$\begin{aligned} z - A(q)x + y &= 0, \\ w - C(q)x - qy &= 0, \\ z - A(1/q)x + y &= 0, \\ w - C(1/q)x - \frac{1}{q}y &= 0, \\ x + y + z + w + t &= 0. \end{aligned}$$

它们的系数矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} -A(q) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -C(q) & -q & 0 & 1 & 0 \\ -A(1/q) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -C(1/q) & -1/q & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

直接计算可得 $\det(M) = -\frac{q^2+1}{q}$ 。如果两条共轭线相交, 仅当联立两条直线的线性方程后所得齐次线性系统存在非零射影解。由于该系统的系数矩阵为方阵 M , 这一条件等价于必须有 $\det M = 0$, 即 $q^2+1=0$, $q = \pm i$ 。从而 $P(i) = P(-i) = 16\lambda - 1$, 所以如果 $q = \pm i$ 同时为根, 就必须有 $\lambda = \frac{1}{16}$, 与当前 $\lambda < \frac{1}{16}$ 矛盾。因此两条共轭直线不相交, 即为斜线。对每一个 $q \neq 0$ 的根, 前面的行列式论证均成立, 所以 $q \neq 0$ 时所形成的 6 对共轭线全是斜线。同时 $q = 0$ 时的六对共轭线仍处在相应实平面中, 所以这六对全部共面。

综上得到六对共轭斜线和六对共轭共面线, 根据定义 1, 在 $\lambda < \frac{1}{16}$ 时, 曲面属于 F_4 类。值得指出的是, 本曲面族中不会出现 F_2 和 F_3 型。事实上, Schläfli 分类中 F_2 型和 F_3 型分别含有 15 条和 7 条实直线, 而在本文曲面族中, 除始终存在的 3 条固定实直线外, 其余 24 条直线分别组成两个 12 条直线的代数分支。上述根的实性分析表明, 在三个非奇异参数区间内, 曲面的实直线总数仅可能为 27 或 3, 而不会出现 15 或 7。因此本单参数族只出现 F_1, F_4, F_5 三种类型。对于仅含 3 条实直线的情形, 再根据复共轭线对是否存在异面线来区分 F_4 与 F_5 。

3.6. 直线构造的互异性与完备性

前文已经在曲面 S_λ 上构造了 3 条固定实直线, 以及 $q \neq 0$ 和 $q = 0$ 时对应的两组直线。下面说明:

当 $\lambda \in R \setminus \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{4} \right\}$ 时, 上述构造得到的 27 条直线两两互异, 并且恰好构成 S_λ 在 C 上的所有直线。

命题 1 (直线构造的完备性): 对任意 $\lambda \in R \setminus \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{4} \right\}$, 3.2 节中构造的 3 条固定直线、 $q \neq 0$ 分支的 12 条直线以及 $q = 0$ 分支的 12 条直线两两互异, 并且它们恰好构成复曲面 S_λ 在 C 上的全部 27 条直线。

证明: 首先考虑 $q \neq 0$ 时, 由 3.2 节可知, 参数 q 满足 $P_\lambda(q) = (4\lambda - 1)q^4 - (8\lambda + 1)q^2 + (4\lambda - 1) = 0$ 令 $u = q^2$, 则 $(4\lambda - 1)u^2 - (8\lambda + 1)u + (4\lambda - 1) = 0$, 其判别式为 $\Delta_u = 3(4\lambda - 1)$, 由于当前考虑的是非奇异参数 $\lambda \neq \frac{1}{16}, \lambda \neq \frac{1}{4}$, 故 $\Delta_c \neq 0$, 且 $4\lambda - 1 \neq 0$ 。因此上述二次方程由两个不同的非 0 复根。又由韦达定理 $u_1 u_2 = 1$, 故 $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ 。于是方程 $q^2 = u_i (i = 1, 2)$ 共给出四个互不相同的非 0 根, $q = \pm\sqrt{u_1}, q = \pm\sqrt{u_2}$ 此外, 直接带入 $p_\lambda(1) = p_\lambda(-1) = -3 \neq 0$, 故上述四个根均不等于 ± 1 , 对于固定的变量配对方式, 相应直线 L_q 与超平面 $x = 0$ 的交点可写成 $p_q = [0:1:-1:q:-q]$, 对 y, z, w, t 的其他两种配对方式, 交点只需作相应坐标置换。当 $q \neq 0, \pm 1$ 时, 不同配对方式所得交点互不相同; 而在固定配对方式下, 不同的 q 显然给出不同的交点。因此, 四个不同的 q 根结合 y, z, w, t 的三种配对方式, 恰好得到 12 条互补相同的直线。接下来考虑 $q = 0$, 此时参数 C 满足 $3c^2 + 3c + 1 - \lambda = 0$, 其判别式为 $\Delta_c = 3(4\lambda - 1)$, 由于 $\lambda \neq \frac{1}{4}$, 故 $\Delta_c \neq 0$, 因此该方程有两个不同的复根 c_1, c_2 , 以 $y + z = 0$ 为例, 相应直线可以参数化为 $[x:y:z:w:t] = [s:r:-r:c_1 s:-(1+c_1)s], i = 1, 2$ 。这两条直线都与超平面 $y = 0$ 相交于 $[1:0:0:c_1:-(1+c_1)]$ 和 $[1:0:0:c_2:-(1+c_2)]$, 由于 $c_1 \neq c_2$, 故这两条直线不同, 对不同的变量配对而言, 可以从四个变量中任选两个作为满足互为相反数的变量, 共有 6 种选择。不同选择所得直线与 $x = 0$ 的交点恰有两个坐标为 0, 其形式为 $[0:1:-1:q:-q]$, 由于 $q \neq 0$, 其 y, z, w, t 四个坐标均非零, 而 $q = 0$ 分支的直线与 $x = 0$ 的交点恰有两个坐标为 0, 例如 $[0:1:-1:0:0]$ 。因此两类直线不可能相同。另一方面, 3.2 节中的 3 条固定直线全部包含在超平面 $x = 0$ 中, 因此这 24 条直线也均不同于前述 3 条固定直线。

综上, 对任意非奇异参数 $\lambda \in R \setminus \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{4} \right\}$ 本文一共构造了 27 条两两不同的复直线。由 3.2 节的奇异参数判定可知, 此时曲面的复化 S_λ 在 C 上为非奇异三次曲面, 根据非奇异复三次曲面恰有 27 条直线这一经典定理[1] [9], S_λ 在 C 上不可能存在其他直线, 因此前文显式构造出的上述 27 条直线恰好构成 S_λ 在 C 上的全部 27 条直线。由此, 3.3~3.5 节中通过判断上述 27 条直线的实性以及复共轭直线之间的相交关系所得到的 Schläfli 类型判定是完备的。

3.7. 两个典型参数的局部仿射图像

为直观展示参数变化对实曲面形态的影响, 取仿射坐标片 $t = 1$ 。由超平面方程 $x + y + z + w + t = 0$ 消去 w , 可将曲面写成三维空间中的隐式方程

$$\Phi_\lambda(x, y, z) = \lambda x^3 + y^3 + z^3 + (-1 - x - y - z)^3 + 1 = 0$$

以下图像均为该方程在立方体 $[-2.2, 2.2]^3$ 内的数值图像。

例 1: 取 $\lambda = \frac{1}{2}$ 由于 $\lambda > \frac{1}{4}$, 根据上文结论, 曲面 $S_{1/2}$, 属于 F_1 类, 含有 27 条实直线。其仿射方程为

$$\frac{1}{2}x^3 + y^3 + z^3 + (-1 - x - y - z)^3 + 1 = 0$$

以下图像仅用于展示 $t = 1$ 仿射片内的局部几何形态, 不作为 Schläfli 类型或实拓扑结构的判定依据 (图 1)。

例 2: 取 $\lambda = \frac{1}{8}$ 根据上文结论, 曲面 $S_{1/8}$ 属于 F_5 类, 仅含 3 条实直线, 并且每一对复共轭直线均共面。

其仿射方程为 $\frac{1}{8}x^3 + y^3 + z^3 + (-1 - x - y - z)^3 + 1 = 0$ (图 2)。

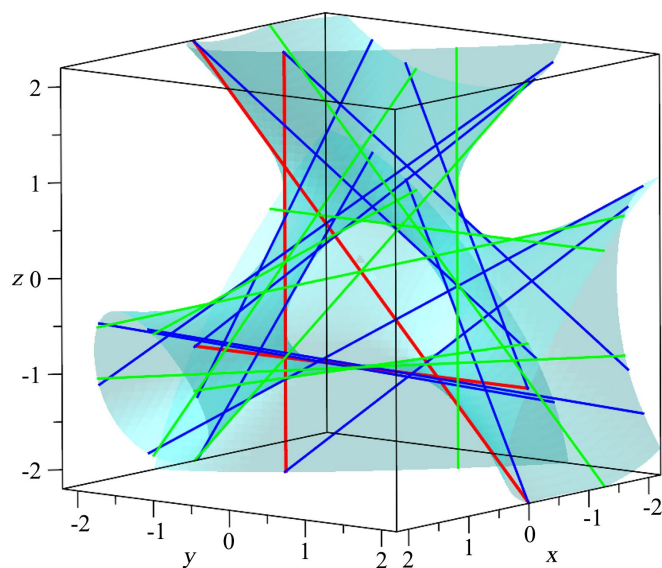


Figure 1. The image of the surface $S_{1/2}$ in the affine coordinate chart $t=1$ when $\lambda = \frac{1}{2}$

图 1. $\lambda = \frac{1}{2}$ 时曲面 $S_{1/2}$ 在仿射坐标片 $t=1$ 中的图像

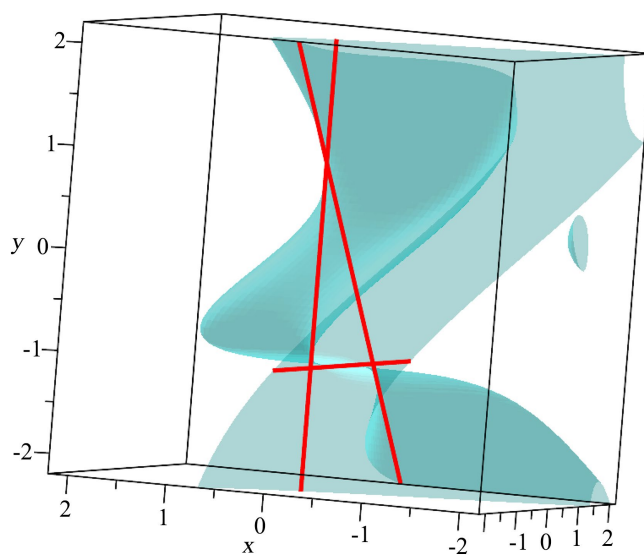


Figure 2. The image of the surface $S_{1/8}$ in the affine coordinate chart $t=1$ when $\lambda = \frac{1}{8}$

图 2. $\lambda = \frac{1}{8}$ 时曲面 $S_{1/8}$ 在仿射坐标片 $t=1$ 中的图像

4. 总结与展望

本文研究了一个具有 y, z, w, t 置换对称性的单参数实三次曲面族。通过 Jacobian 秩判据首先确定了两个奇异参数 $\lambda = \frac{1}{16}$ 和 $\lambda = \frac{1}{4}$ 。对于非奇异参数，利用曲面方程的对称结构，将 27 条直线分解为 3 条固定实直线， $q \neq 0$ 分支的 12 条直线以及 $q = 0$ 分支的 12 条直线。由低次方程根的实性可知，该曲面族的实

直线数仅可能为 27 或 3, 因此 F_2 和 F_3 型不会出现; 当仅有 3 条实直线时, 再通过复共轭直线的线性相交判别区分 F_4 与 F_5 。最终得到

$$S_\lambda \in \left\{ \begin{array}{l} F_1, \lambda > \frac{1}{4} \\ F_5, \frac{1}{4} > \lambda > \frac{1}{16} \\ F_1, \lambda < \frac{1}{16} \end{array} \right\}$$

与适用于一般非奇异三次曲面的参数化或消元方法相比, 本文方法依赖于所研究曲面族的特殊置换对称性, 其优点是能够将类型判别降为二次、四次方程的根判别及有限维线性方程组的相交检验; 相应地, 该方法目前并不能直接推广到一般三次曲面。后续可进一步研究具有较弱对称性的多参数三次曲面族, 并考察系数不变量、实直线数量及实点集拓扑类型之间的关系。

参考文献

- [1] Schläfli, L. (1863) X. on the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of Their Lines. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **153**, 193-241. <https://doi.org/10.1098/rstl.1863.0010>
- [2] Salmon, G. (1914) A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions: Volumes I and II. Chelsea Publishing Company.
- [3] Henderson, A. (1911) The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface. Cambridge University Press.
- [4] Segre, B. (1942) The Non-Singular Cubic Surfaces: A New Method of Investigation with Special Reference to Questions of Reality. Clarendon Press.
- [5] Abhyankar, S.S. and Bajaj, C. (1987) Automatic Parametrization of Rational Curves and Surfaces II: Cubics and Cubicoids. *Computer-Aided Design*, **19**, 499-502. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(87\)90235-1](https://doi.org/10.1016/0010-4485(87)90235-1)
- [6] Sederberg, T.W. and Snively, J.P. (1987) Parametrization of Cubic Algebraic Surfaces. In: Martin, R.R., Ed., *The Mathematics of Surfaces II*, Clarendon Press, 299-319.
- [7] Bajaj, C.L., Holt, R.L. and Netravali, A.N. (1998) Rational Parametrizations of Nonsingular Real Cubic Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **17**, 1-31. <https://doi.org/10.1145/269799.269800>
- [8] Polo-Blanco, I. and Top, J. (2008) Explicit Real Cubic Surfaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, **51**, 125-133. <https://doi.org/10.4153/cmb-2008-014-5>
- [9] Polo-Blanco, I. and Top, J. (2009) A Remark on Parameterizing Nonsingular Cubic Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **26**, 842-849. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2009.06.001>