Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 13-23
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511428

Hans汉斯

三元函数的三重极限与累次极限

杨春玲

广东石油化工学院理学院，广东 茂名

收稿日期：2026年10月4日；录用日期：2026年10月28日；发布日期：2026年11月4日

摘　要

本文梳理三元函数的三重极限、累次极限、混合累次极限的定义，通过实例说明三重极限与累次极限、三重极限与混合累次极限之间不存在互相蕴含关系；给出并证明三重极限与累次极限相等的相关定理及推论，引述已有文献中三重极限与混合累次极限的对应定理与推论。研究结果有助于完善数学分析多元极限知识体系，拓展学生数学思维。

关键词

三元函数，三重极限，累次极限，混合累次极限

Triple Limits and Iterated Limits of Functions of Three Variables

Chunling Yang

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong

Received: October 4, 2026; accepted: October 28, 2026; published: November 4, 2026

Abstract

This paper sorts out the definitions of triple limits, iterated limits and mixed iterated limits for functions of three variables. Examples are given to illustrate that there is no implication relationship between triple limits and iterated limits, as well as between triple limits and mixed iterated limits. The theorems and corollaries for the equality of triple limits and iterated limits are presented and proved, and the corresponding theorems and corollaries for triple limits and mixed iterated limits from existing literature are cited. The results can enrich the knowledge system of multivariable limits in mathematical analysis and expand students' mathematical thinking.

文章引用: 杨春玲. 三元函数的三重极限与累次极限[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 13-23.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511428

Keywords

Function of Three Variables, Triple Limit, Iterated Limit, Mixed Iterated Limit

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

众所周知，极限是分析学的基石，特别是函数极限更是讨论函数连续性、可微性等分析性质的基础。因此，多元函数的微分学也总是先从二元函数的二重极限开始的。二重极限与累次极限的关系是数学分析课程多元函数部分的一个难点，在众多的教材如文献[1]-[4]中均有详细讨论，但对三元函数的三重极限与累次极限的关系却鲜有文献讨论，文献[5]中引入了三元函数的混合极限概念，对三元函数的混合极限与重极限的区别及联系进行了探讨；文献[6]引入弱累次极限的概念，并且建立了弱累次极限与重极限之间的关系，即可以用重极限来判别弱累次极限的存在性，也可以用弱累次极限来判别重极限的存在性。受这些文献的启发，本文尝试讨论三元函数的三重极限与累次极限的关系问题，并介绍三重极限与混合极限的关系，这些内容既能够丰富数学分析的知识体系，又能够拓展学生的数学思维，提升其对学习数学分析的兴趣。

2. 预备知识

2.1. 三重极限

定义 1 设非空集合 $D\subset\mathbb{R}^3$，三元函数 $f:D\to\mathbb{R}$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 D 的聚点。若存在实数 A，使得 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $P(x,y,z)\in\overset{\circ}{U}(P_0;\delta)\cap D$ 时，有

$$\left|f(P)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 f 在 D 上当 $P(x,y,z)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 时以 A 为极限，记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\text{ 或 }\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z)=A.$$

该极限要求三个变量 x,y,z 同时以任何方式趋向于 x_0,y_0,z_0，因此也称这种极限为三重极限。

2.2. 累次极限

定义 2 设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 为非空集合，三元函数 $f:D\to\mathbb{R}$，D 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 X，Y，Z，即

$$X=\{x\mid(x,y,z)\in D\},Y=\{y\mid(x,y,z)\in D\},Z=\{z\mid(x,y,z)\in D\},$$

x_0,y_0,z_0 分别是 X，Y，Z 的聚点。若对固定的 $x\in X\,(x\neq x_0),y\in Y\,(y\neq y_0)$，存在极限

$$\varphi(x,y)=\lim_{z\to z_0}f(x,y,z),$$

且存在极限

$$\psi(x)=\lim_{y\to y_0}\varphi(x,y),$$

还存在极限

$$L=\lim_{x\to x_0}\psi(x),$$

则称此极限 L 为 $f(x,y,z)$ 先对 $z(\to z_0)$，然后对 $y(\to y_0)$，最后对 $x(\to x_0)$ 的累次极限，记为

$$L=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z).$$

显然，累次极限与三重极限的“同时趋近”完全不同。类似地，根据极限顺序的不同，函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 点的累次极限还有其余五种类型

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{z\to z_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y,z),\quad \lim_{z\to z_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y,z),\quad \lim_{z\to z_0}\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y,z),$$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z),\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y,z)。$$

2.3. 混合极限

定义 3 [5]设 $f(x,y,z)$ 为定义在 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上的三元函数，记

$$D_{yz}=\{(y,z)\mid(x,y,z)\in D\},\ D_x=\{x\mid(x,y,z)\in D\}。$$

(y_0,z_0) 和 x_0 分别是 D_{yz} 和 D_x 的聚点。若对每一个 $(y,z)\in D_{yz}\left((y,z)\neq(y_0,z_0)\right)$，存在极限 $\lim_{x\to x_0}f(x,y,z)$，记为

$$\varphi(y,z)=\lim_{x\to x_0}f(x,y,z)。$$

若还存在极限

$$L=\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}\varphi(y,z),$$

则称该极限 L 为函数先对 $x(\to x_0)$，后对 $y,z\left(\to(y_0,z_0)\right)$ 的混合累次极限，记为

$$L=\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}\lim_{x\to x_0}f(x,y,z)。$$

混合累次极限简称为混合极限。类似地，根据极限顺序的不同，混合极限还有其余五种

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z),\quad \lim_{(x,z)\to(x_0,z_0)}\lim_{y\to y_0}f(x,y,z),\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}f(x,y,z),$$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{(x,z)\to(x_0,z_0)}f(x,y,z),\quad \lim_{z\to z_0}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y,z)。$$

2.4. 一致收敛

定义 4 [5]设 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 内有定义，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall(y,z)\in\overset{\circ}{U}((y_0,z_0);\delta)$，$\forall x$ (满足 $(x,y,z)\in\overset{\circ}{U}(P_0)$)，总有

$$\left|f(x,y,z)-\varphi(x)\right|<\varepsilon,$$

则称当 $(y,z)\to(y_0,z_0)$ 时，$f(x,y,z)$ 关于 x 一致收敛于 $\varphi(x)$，记为：

$$\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}f(x,y,z)=\varphi(x)\ \text{(关于 } x \text{ 一致)}。$$

定义 5 设 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 内有定义，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

$\forall z \in \overset{\circ}{U}(z_0;\delta)$，$\forall x,y$ (满足$(x,y,z)\in\overset{\circ}{U}(P_0)$)，总有

$$\left|f(x,y,z)-\varphi(x,y)\right|<\varepsilon,$$

则称当$z\to z_0$时，$f(x,y,z)$关于x,y一致收敛于$\varphi(x,y)$，记为：

$$\lim_{z\to z_0} f(x,y,z)=\varphi(x,y) \quad (\text{关于 } x,y \text{ 一致})。$$

3. 三重极限与累次极限关系

3.1. 三重极限与累次极限之间无蕴含关系

例 1 函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x+y+z)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{1}{z}, & xyz\neq 0\\ 0, & xyz=0\end{cases}.$$

函数切片图如图 1 所示。

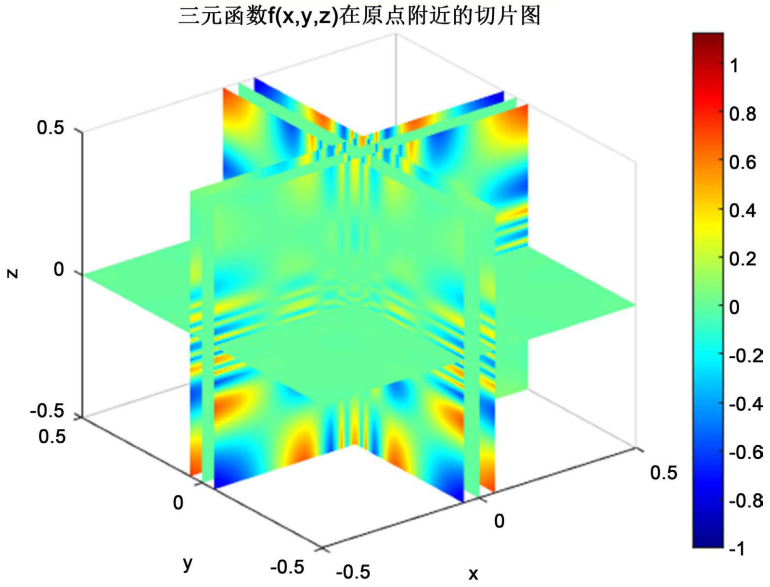


Figure 1. Slice plots of the function in Example 1
图 1. 例 1 中函数的切片图

显然有

$$\left|f(x,y,z)\right|\le|x|+|y|+|z|$$

故在$(0,0,0)$点三重极限$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$存在。但所有累次极限均不存在，例如当固定$x,y\neq 0$时，极限

$$\lim_{z\to 0} f(x,y,z)=\lim_{z\to 0}\left[(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{z}+z\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{z}\right]$$

不存在。因为第二项极限为零，但第一项中由于$\sin\dfrac{1}{z}$的震荡性使得该项极限不存在，故上式极限不存在，

从而累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0} f(x,y,z)$ 及 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{z\to 0} f(x,y,z)$ 均不存在。同理可得其它四个累次极限也不存在，因此，三重极限存在不能蕴含累次极限存在，同时也说明累次极限不存在也不能蕴含三重极限不存在(图2)。

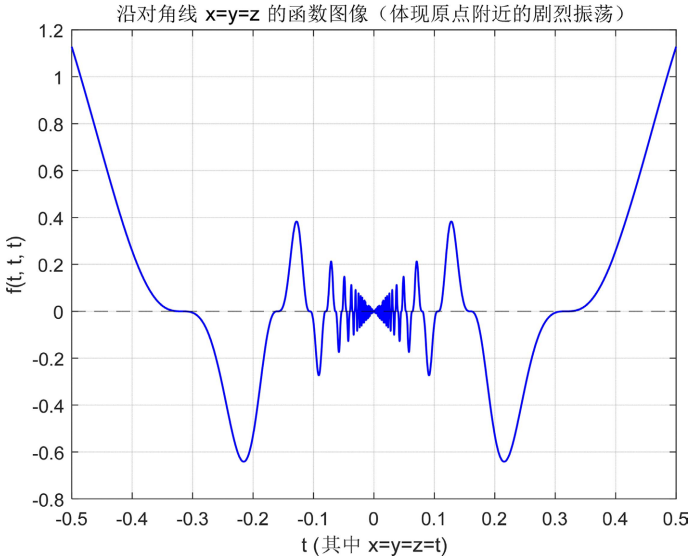


Figure 2. 2D profile of the function in Example 1 along the diagonal $x=y=z=t$
图 2. 例 1 中函数的沿对角线 $x=y=z=t$ 的二维剖面图

例 2 函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^4+y^4+z^4}, & x^4+y^4+z^4\neq 0\\ 0, & x^4+y^4+z^4=0\end{cases}.$$

该函数切片图如图 3 所示。

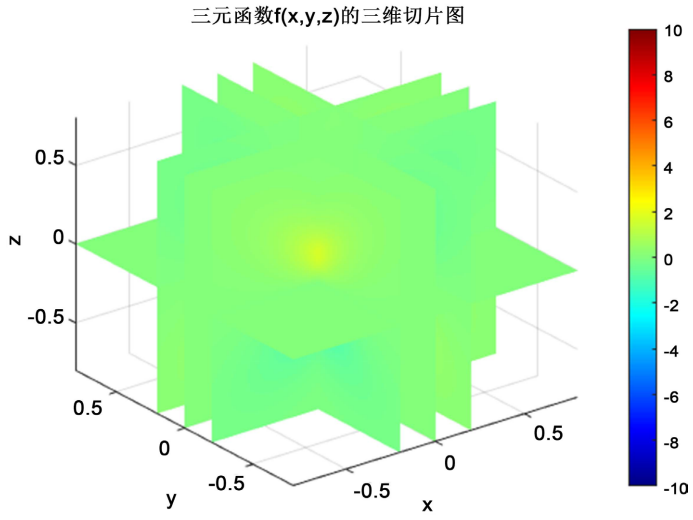


Figure 3. Slice plots of the function in Example 2
图 3. 例 2 中函数的切片图

易得当 $y\neq 0, z\neq 0$ 时有

$$\lim_{x\to 0}\frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}=0$$

故在 $(0,0,0)$ 的累次极限

$$\lim_{z\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}=0\text{。}$$

同理可得，在 $(0,0,0)$ 的其余五个累次极限均为零。

应用取特殊路径的方法，如取抛物面 $z=kx^2\,(k\neq 0)$ 与平面 $y=mx(m\neq 0)$ 交线，则

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}=\lim_{x\to 0}\frac{mkx^4}{x^4+m^4x^4+k^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{mk}{1+m^4+k^4x^4}=\frac{mk}{1+m^4}$$

与参数 k,m 有关，故在 $(0,0,0)$ 三重极限 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xyz}{x^4+y^4+z^4}$ 不存在。因此，累次极限存在不能蕴含三重极限存在，同时也说明三重极限不存在也不能蕴含累次极限不存在(图 4)。

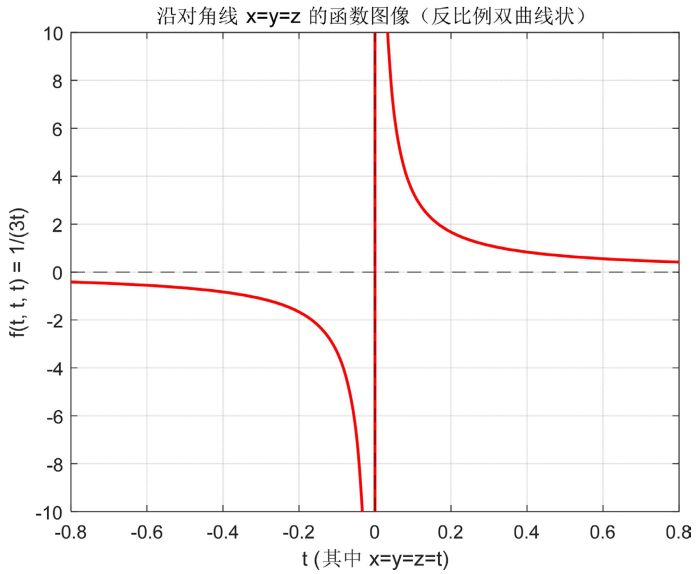


Figure 4. 2D profile of the function in Example 2 along the diagonal $x=y=z=t$

图 4. 例 2 中函数的沿对角线 $x=y=z=t$ 的二维剖面图

3.2. 三重极限与累次极限之间的联系

定理 1 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 存在三重极限 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0}f(x,y,z)$，则它们必然相等，即

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z).$$

证明设

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z)=A$$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $P(x,y,z) \in \overset{\circ}{U}(P_0;\delta) \cap D$ 时，有

$$|f(x,y,z) - A| < \varepsilon \text{。} \tag{1}$$

另外，由累次极限定义知，对于满足不等式

$$0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - y_0| < \delta, \tag{2}$$

的 x, y 存在极限

$$\lim_{z \to z_0} f(x,y,z) = \varphi(x,y) \tag{3}$$

在不等式(1)中令 $z \to z_0$，由(3)式可得

$$|\varphi(x,y) - A| \le \varepsilon. \tag{4}$$

再由累次极限定义知，对于满足不等式

$$0 < |x - x_0| < \delta \tag{5}$$

的 x 存在极限

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(x,y) = \psi(x), \tag{6}$$

在不等式(4)中，令 $y \to y_0$，由(6)式可得

$$|\psi(x) - A| \le \varepsilon. \tag{7}$$

由(5)和(7)式得 $\lim_{x \to x_0} \psi(x) = A$。即

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} \lim_{z \to z_0} f(x,y,z).$$

推论 1 若三元函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 点的六个累次极限及三重极限都存在，则它们都相等。

推论 2 若六个累次极限中任意两个存在但不相等，则三重极限必不存在。

4. 三重极限与混合极限关系

4.1. 三重极限与混合极限之间无蕴含关系

例 3 函数

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$$

该函数的切片图如图 5 所示。

显然有

$$|f(x,y,z)| \le \frac{|xyz|}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = \left|\sqrt[3]{xyz}\right| \le |x+y+z| < |x| + |y| + |z|$$

故在 $(0,0,0)$ 点三重极限 $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} f(x,y,z)$ 存在。但因当 $z \neq 0$ 时，利用参考文献[1] [2]中取特殊路径的方法可知二重极限

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

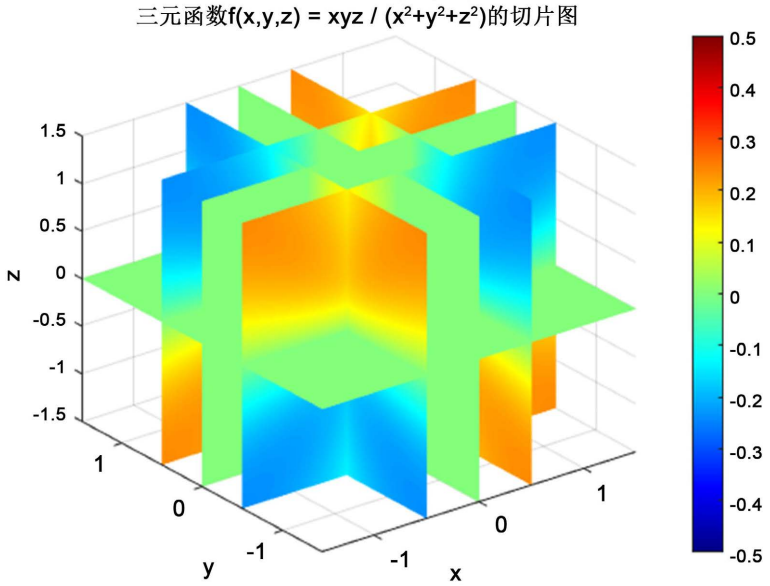


Figure 5. Slice plots of the function in Example 3
图 5. 例 3 中函数的切片图

不存在，故在$(0,0,0)$点混合极限$\lim_{z\to 0}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$不存在。同理可得，其余五个混合极限均不存在。因此，三重极限存在不能蕴含混合极限存在，同时也说明混合极限不存在也不能蕴含三重极限不存在(图 6)。

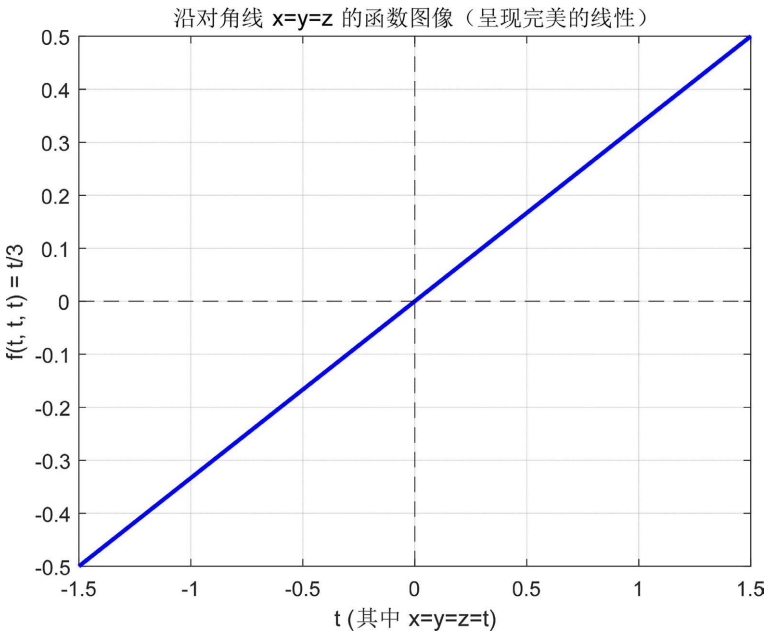


Figure 6. 2D profile of the function in Example 3 along the diagonal $x = y = z = t$
图 6. 例 3 中函数的沿对角线 $x = y = z = t$ 的二维剖面图

例 4 函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{|x|^3+|y|^3+|z|^3}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}.$$

该函数的切片图如图 7 所示。

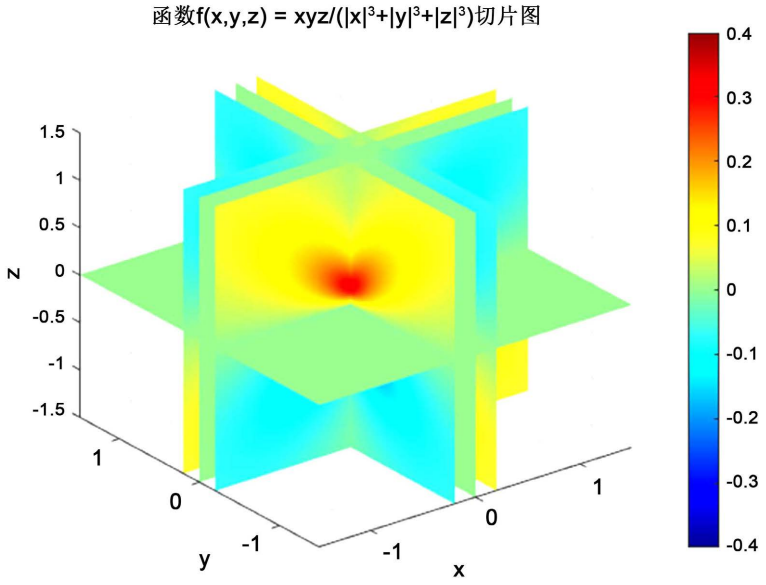


Figure 7. Function slice plot for Example 4
图 7. 例 4 中函数切片图

显然对于 $z\neq 0$ 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xyz}{|x|^3+|y|^3+|z|^3}=0$$

故混合极限

$$\lim_{z\to 0}\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y,z)=0$$

同理可得，在 $(0,0,0)$ 点处其余五个混合极限均为 0。但利用取特殊路径的方法，如取平面 $z=kx(k\neq 0)$ 与平面 $y=mx(m\neq 0)$ 交线，则

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{|x|^3+|y|^3+|z|^3}=\lim_{x\to 0}\frac{mkx^3}{|x|^3+|m|^3|x|^3+|k|^3|x|^3},$$

无论考虑左极限还是右极限都与参数 k,m 有关，故在 $(0,0,0)$ 点处三重极限 $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)$ 不存在，因此，混合极限存在不能蕴含三重极限存在，同时也说明三重极限不存在也不能蕴含混合极限不存在(图 8)。

4.2. 三重极限与混合极限之间的联系

定理 2 [5]若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处存在三重极限 $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z)$ 与混合极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}f(x,y,z)$，则它们必然相等，即

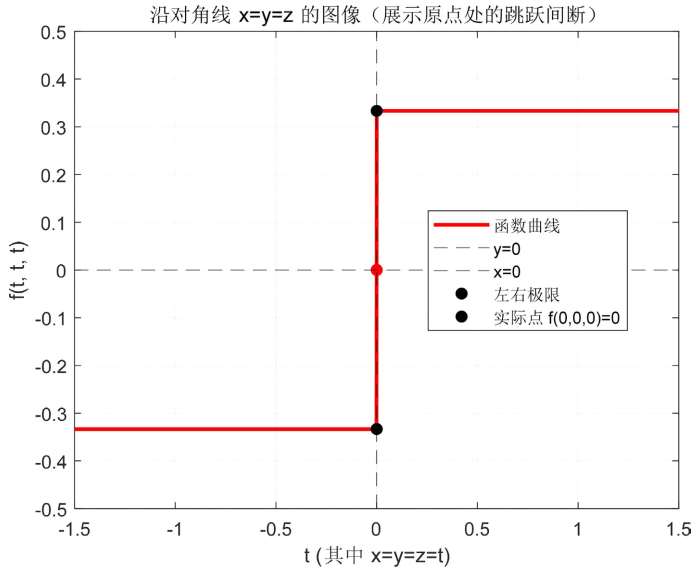


Figure 8. Two-dimensional profile of the function in Example 4 along the diagonal $x=y=z=t$

图 8. 例 4 中函数沿对角线 $x=y=z=t$ 的二维剖面图

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=\lim_{x\to x_0}\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)} f(x,y,z)$$

定理 2 的证明可参见文献[5]，由此还可得如下推论：

推论 3 [5]若三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的六个混合极限及三重极限都存在，则它们都相等。

推论 4 [5]若三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的六个混合极限中任意两个存在但不相等，则三重极限必不存在。

4.3. 三重极限与混合极限相等的条件

定理 3 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 内有定义，且满足：

(1) 对每个点 $(y,z)\neq(y_0,z_0)$，存在极限 $\lim_{x\to x_0} f(x,y,z)=\psi(y,z)$；

(2) $\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)} f(x,y,z)=\varphi(x)$ 关于 x 一致，

则

$$\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}\lim_{x\to x_0} f(x,y,z)=\lim_{x\to x_0}\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)} f(x,y,z)=\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z).$$

证明 关于第一个等号即混合极限相等的证明可参见文献[5]。下证第二个等号，即与三重极限相等。设

$$\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)}\lim_{x\to x_0} f(x,y,z)=\lim_{x\to x_0}\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)} f(x,y,z)=A.$$

$\forall\varepsilon>0$，由条件(2)知 $\exists\delta_1>0$，使得当 $0<\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta_1$ 时，对所有的 x，都有

$$\left|f(x,y,z)-\varphi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

再由 $\lim_{x\to x_0}\lim_{(y,z)\to(y_0,z_0)} f(x,y,z)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，故 $\exists\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$\left|\varphi(x)-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$ 时，(8)式和(9)式都成立，故

$$\left|f(x,y,z)-A\right|\le\left|f(x,y,z)-\varphi(x)\right|+\left|\varphi(x)-A\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z)=A.$$

类似可得如下结论：

推论 5 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 内有定义，且满足：

(1) 对每个点 $z\neq z_0$，存在极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y,z)=\psi(z)$；

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(x,y,z)=\varphi(x,y)$ 关于 x,y 一致，

则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=\lim_{z\to z_0}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y,z)=\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f(x,y,z).$$

5. 结束语

本文讨论了三重极限与累次极限、三重极限与混合极限之间的关系，通过实例与定理揭示不同类型极限的区别与联系。混合极限与累次极限的关系或者三重极限与累次极限相等的条件等问题，可供感兴趣的读者进一步深入探究。本文内容可为数学分析多元函数部分的教学提供参考。

基金项目

广东石油化工学院科研基金人才引进项目(2019rc101)。

参考文献

[1] 耿堤, 易法槐, 丁时进等. 数学分析(三) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2019.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析: 下册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[3] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[4] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析: 下册[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[5] 毛一波. 三元函数的重极限与混合极限[J]. 高等数学研究, 2020, 23(2): 4-6.

[6] 成荣, 董宝华, 黄学平. 累次极限与重极限的一个注记[J]. 大学数学, 2023, 39(4): 86-90.