

具有多普勒容忍性的通感一体化波形设计

袁 艳

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年9月23日; 录用日期: 2026年10月16日; 发布日期: 2026年10月27日

摘 要

针对现有通感一体化波形对运动目标探测性能不足的问题, 本文提出基于 p -范数的加权积分旁瓣电平优化的多普勒容忍通感一体化波形设计方案。首先, 在脉冲串模糊函数下, 推导了多普勒容忍波形设计问题可等价于单个具有低相关区的波形设计问题并且具有较低的积分旁瓣电平。在满足约束条件下, 建立最小化一体波形的 p -范数加权峰积分旁瓣电平为优化准则, 从而实现具有多普勒容忍性的通感一体化波形设计。由于优化目标是高阶非凸问题, 基于优化最小化框架提出了 p -WPISL算法进行求解。通过数值实验表明, 所设计的一体化波形可以实现更低的符号错误率, 实现雷达与通信功能的融合; 同时能够显著抑制距离自相关旁瓣, 通过改变 p 实现ISL与PSL之间的权衡, 并且优化后的波形在不同多普勒频移下均可保持较低距离旁瓣, 对运动目标具备良好的多普勒容忍性能。

关键词

通感一体化波形, 加权峰值或积分旁瓣电平, 多普勒容忍性, 优化最小化, p -WPISL算法

Doppler-Tolerant Integrated Sensing and Communication Waveform Design

Yan Yuan

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: September 23, 2026; accepted: October 16, 2026; published: October 27, 2026

Abstract

Aiming at the insufficient detection performance of existing integrated sensing and communication (ISAC) waveforms for moving targets, this paper proposes a Doppler-tolerant ISAC waveform design scheme based on the weighted integrated sidelobe level optimization with p -norm. First, under the ambiguity function of pulse trains, we derive that the Doppler-tolerant waveform design problem can be equivalent to designing a single waveform with a low correlation region and low integrated

sidelobe level. Subject to the constraints, an optimization criterion is established to minimize the p -norm weighted peak integrated sidelobe level of the integrated waveform, so as to realize the design of Doppler-tolerant ISAC waveforms. Since the optimization objective is a high-order nonconvex problem, a p -WPISL algorithm is proposed to solve it under the majorization-minimization (MM) framework. Numerical experiments demonstrate that the designed integrated waveform achieves a lower symbol error rate and realizes the fusion of radar and communication functions. Meanwhile, it can significantly suppress the range autocorrelation sidelobes. The tradeoff between ISL and PSL can be achieved by adjusting the parameter. Moreover, the optimized waveform maintains low range sidelobes under different Doppler shifts and exhibits favorable Doppler tolerance for moving targets.

Keywords

Integrated Sensing and Communication Waveform, Weighted Peak Sidelobe Level, Doppler Tolerance, Majorization-Minimization, p -WPISL Algorithm

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着电子信息技术的快速发展不断增强[1][2], 雷达感知与无线通信一体化逐渐成为了 6G 技术主导之一且具有广泛的应用前景[3]。由于频谱资源的有限, 雷达与通信之间的效能会逐渐降低, 为了高效利用资源, 提出了两种解决方案[4]: 雷达与通信频谱共存、通感一体化(Integrated Sensing and Communication, ISAC)。其中通感一体化波形设计主要分为三类[4]-[7]: (1) 以通信为中心的一体化波形; (2) 以雷达为中心的一体化波形; (3) 联合设计的一体化波形。

以通信为中心的一体化波形: 通过修改通信波形, 使其实现雷达功能。由于通信为中心的数据的随机性, 无稳定的感知性能。以雷达为中心的一体化波形: 主要通过修改雷达波形, 从而实现通信功能。以雷达为中心的一体化波形主要是通过脉间调制的方式, 其具有通信信息的传递能力, 但由于通信速率较低, 不利于通信信息的实时传输。联合设计的一体化波形是直接通过设计波形, 使其同时具备通信传输与雷达感知能力, 能够在保障一方性能的前提下优化另一方性能或完成通感性能折中[8]。对比前两者, 联合设计的一体化波形能够同时兼顾通信与雷达之间的不同性能需求。

文献[9]在基于完美信道估计的假设下, 以抑制多用户干扰作为优化准则, 结合雷达方向图相似性约束构造优化问题, 求解得到一体化波形, 使 MIMO 系统兼具通信传输与雷达感知能力。随后不同于文献[9]中采用方向图相似性约束, 文献[10]施加波形协方差矩阵与 MIMO 雷达最优协方差矩阵相等的等式约束, 以多用户信干噪比效用函数最大化为优化准则, 通过求解优化模型进一步改善波形的干扰抑制效果。文献[11]将多普勒容忍性纳入一体化波形设计中, 通过设定一定的约束条件, 以最小化一体波形的加权积分旁瓣电平作为优化准则, 从而实现一体化波形的设计。文献[12]考虑在一定的约束条件下, 引入加权峰值或积分旁瓣电平(WPISL), 精心设计用于测量和最小化低范围副瓣。文献[13]在设计 MIMO 雷达的正交波形集中, 基于 MM 框架的基础上提出了 p -MM 算法, 由此来平衡积分旁瓣电平(Integrated Sidelobe Level, ISL)与峰值旁瓣电平(Peak Sidelobe Level, PSL), 平衡相关函数的峰值性能和综合性能。综上所述, 其上述文献在设计一体化波形时, 都同时兼顾通信与雷达之间的不同性能需求, 然而其设计一体化波形都未将多普勒容忍性作为考虑问题之一。在实际场景中目标通常为运动状态, 其多普勒效

应会造成回波信号发生相位偏移, 引发匹配滤波器失配, 既会恶化雷达脉冲压缩性能, 也会降低一体化系统的通信传输质量。因此设计具有多普勒容忍性的一体化波形是尤为重要的。

2. 系统模型与多普勒容忍条件

2.1. 通感一体化脉冲串模型

考虑在同时实现雷达目标感知与通信的 ISAC 系统中, 假设在一个 CPI 内的发射 N 个一体化脉冲, 其离散化的脉冲长度为 L , 对于 n 个脉冲, 发射的一体化波形离散化表示为

$$\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,L-1}]^T \in \mathbb{C}^L \quad (1)$$

其中 $\mathbb{C}^L$ 表示 L 维的复数域, $n=0,1,\dots,N-1$, $l=0,1,\dots,L-1$ 。由于波形需要兼顾通信与雷达之间的不同性能需求, 给出关于通信模型、雷达模型以及优化模型的建立。

2.2. 通信模型

在通感一体化系统中, 所设计的发射波形不仅需要满足雷达感知性能要求, 同时还需要保证通信用户能够准确恢复发送的信息。因此, 所设计的一体化波形需要在降低雷达旁瓣水平的同时, 保持与原始通信调制符号之间较小的偏差。对于通信用户而言, 当在第 n 个 PRT 中, $\mathbf{x}_n$ 作为一体化波形被发射, 接收到的信号表示为 $y_n = h\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n$ 。其中, h 表示通信信道响应, $\mathbf{w}_n$ 表示噪声符号向量且 $\mathbf{w}_n \sim CN(0, \sigma^2 I_L)$, 假设通信信道满足瑞利衰落模型, 并且在一个 CPI 周期内保持不变, 同时假设接收端能够获得理想信道状态信息[12], 则通信接收模型可简化为 $y_{n,l} = hx_{n,l} + w_{n,l}$ 。

本文通信采用的调制方式为 M-PSK (M-Phase-Shift Keying, 多进制相移键控), 设通信数据经过调制的符号序列为 $\mathbf{e}_n = [e_{n,0}, e_{n,1}, \dots, e_{n,L-1}]^T$, 其相位满足 $\arg(e_{n,l}) = \frac{2\pi m_{n,l}}{M}$, $m_{n,l} \in \{0, \dots, (M-1)\}$ 。其中 M 表示调制阶数是大于等于 2 的正整数, 由于通感一体化波形需要同时满足雷达旁瓣优化的需求, 最终设计得到的波形不一定完全等于通信调制符号, 因此需要约束二者之间的相位偏差。所以一体化信号的每个 $x_{n,l}$ 应该满足相位差约束

$$\left| \text{wrap}_{[-\pi, \pi)}(\arg(x_{n,l}) - \arg(e_{n,l})) \right| \leq \varepsilon, \quad l=0, \dots, L-1 \quad (2)$$

其中 $\arg(\cdot)$ 是复数的相位, ε 是相位差且 $\varepsilon < \frac{\pi}{M}$ 。在通信用户接收的每个符号 $y_{n,l}$ 都可以在解调后以一定的符号错误率得到所需要的 M-PSK 符号, 若补偿后的接收符号相位偏离真实通信符号相位超过判决区域, 则认为符号错误。因此定义符号错误率(Symbol Error Rate, SER)为 $\text{SER} = \frac{N_{\text{err}}}{NL}$, 其中 N_{err} 为估计的错误符号数, 则可表示为满足错误判决条件的符号集合的元素个数

$$\left\{ y_{n,l}/h : \left| \text{wrap}_{[-\pi, \pi)}(\arg(y_{n,l}/h) - \arg(e_{n,l})) \right| > \frac{\pi}{M} \right\} \quad (3)$$

综上所述, 当接收符号经过信道补偿后, 其相位仍落在对应 M-PSK 判决区域内, 则正确解调; 当相位偏移超过 $\frac{\pi}{M}$ 时, 进入相邻符号判决区域, 产生误符号。由此关于通信中所要求的错误符号率问题可以转化为相位差约束, 而相位差越小其错误符号率就会越低。由此得到通信相位约束

$$C_1 : \left| \text{wrap}_{[-\pi, \pi)}(\arg(x_{n,l}) - \arg(e_{n,l})) \right| \leq \varepsilon。$$

2.3. 雷达模型

对于静止目标多普勒频移为 0, 此时匹配滤波器输出由单个脉冲的非周期自相关函数决定。第 n 个脉冲的非周期自相关函数定义为 $C_n(k)$

$$C_n(k) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{L-k-1} x_{n,l} x_{n,l+k}^*, & 0 \leq k \leq L-1 \\ \sum_{l=0}^{L+k-1} x_{n,l-k} x_{n,l}^*, & -(L-1) \leq k \leq -1 \end{cases} \quad (4)$$

其中 k 表示距离延迟。对于一个 CPI 内所有滤波输出的结果进行相干积累 $g_0(k) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(k)$, 其中 $g_0(k)$ 是无多普勒情况下的总匹配滤波输出。在理想的情况下, 如果 $g_0(k) = NL\delta_k$, δ_k 为冲激函数并且 $g_0(k)$ 也为冲激函数且脉冲串 $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ 是互补的。此时主峰最大和所有距离旁瓣为 0, 波形具有理想脉压性能。然而其在实际波形中无法完全实现, 因此需要进行最小化旁瓣。当目标运动时, 由于多普勒效应, 第 n 个脉冲会产生额外的相位旋转 $e^{jn\theta}$, 其中 $\theta = 2\pi f_D T$, f_D 为目标产生的多普勒频率、 T 表示脉冲重复周期(PRT)。所以在运动目标的情况下, CPI 的输出变为 $g(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(k) e^{jn\theta}$, 虽然目标运动会引入未知多普勒相位旋转, 但是只要每个脉冲具有较低的距离旁瓣, 则整个脉冲串仍然能够保持较好的距离-多普勒性能。

引理 1 [11] 若相关函数 $C_n(k)$ 满足条件 $|C_n(k)| \leq L\gamma$, $|k| = 1, 2, \dots, Z-1$, 则模糊函数满足

$$\frac{|g(k, \theta)|}{LN} \leq \gamma, \quad |k| = 1, 2, \dots, Z-1, \quad \theta \in (-\pi, \pi) \quad (5)$$

其中 Z 是感兴趣区间的宽度且 $Z \leq L$, γ 是一个很小的正数, 一般取 $\gamma = 10^{-4}$ 。引理 1 是多普勒容忍命题, 其说明了只要控制单个脉冲的非周期自相关函数 $C_n(k)$, 则保证整个多普勒区域内的旁瓣性能。所以为了降低 $|C_n(k)|$ 可降低加权积分旁瓣电平(Weighted Integrated Sidelobe Level, WISL)实现, 文献[11]中给出了可通过最小化 WISL 有

$$\text{WISL} = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |C_n(k)|^2 = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |x_n^H U_k x_n|^2 \quad (6)$$

其中 $\omega_k = \begin{cases} 1, & k=1, 2, \dots, Z-1 \\ 0, & k \geq Z \end{cases}$ 为权重, 令 $C_n(k) = x_n^H U_k x_n$ 且满足 $C_n(-k) = C_n^*(k)$,

$U_k = \begin{cases} 1, & n_\mu - m_\mu = k \\ 0, & n_\mu - m_\mu \neq k \end{cases}$ 。为了同时描述 PSL 与 ISL, 本文采用 p -范数的加权积分旁瓣电平作为最小化的设计

度量, 定义 $g_k = x_n^H U_k x_n$ 且 $g_{-k} = g_k^*$ 得到

$$\text{WPISL} = F_p(x_n) = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |x_n^H U_k x_n|^p = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |g_k|^p \quad (7)$$

其中 $2 \leq p < \infty$, $F_p(x_n)$ 为目标函数, 当 $p=2$ 时, 有

$$\text{WISL} = F_2(x_n) = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |x_n^H U_k x_n|^2 = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |g_k|^2 \quad (8)$$

WPISL 减少到 WISL 的度量, 当 $\omega_k = 1$ 则上述表达式可以简化为 ISL, 更进一步, 当 $\omega_k = 1$ 时, 对

于任意 k 有 $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |g_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_k \{|g_k|\}$ 对应 PSL。所以对于选取不同的 p ，可以实现 ISL 与 PSL 之间的良好平衡。虽然对于 p -范数的加权积分旁瓣电平能够统一描述不同旁瓣优化，但是在进行多普勒容忍波形设计时，需要其满足单个距离单元相关旁瓣幅值之间。由此提出命题 1。

命题 1 设 $\kappa_Z = \{k : \omega_k > 0\}$ 且对 $\forall k \in \kappa_Z$ ，权重满足 $\omega_k \geq 0$ ，对于给定的 $p \geq 2$ ，定义第 n 个脉冲的 l_p 旁瓣范数为： $J_p(x_n) = F_p(x_n)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k \in \kappa_Z} \omega_k |g_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ， $\omega_{\min} = \min_{k \in \kappa_Z} \omega_k > 0$ ，则对 $\forall k \in \kappa_Z$ 成立

$$|C_n(k)| \leq \omega_k^{\frac{1}{p}} J_p(x_n) \leq \omega_{\min}^{\frac{1}{p}} J_p(x_n) \quad (9)$$

进一步整个 CPI 的归一化模糊函数就距离旁瓣满足

$$\sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \frac{|g(k, \theta)|}{NL} \leq \frac{\omega_k^{\frac{1}{p}}}{NL} \sum_{n=0}^{N-1} J_p(x_n) \leq \frac{\omega_{\min}^{\frac{1}{p}}}{NL} \sum_{n=0}^{N-1} J_p(x_n) \quad (10)$$

证明：对 $\forall k \in \kappa_Z$ ，有 $\omega_k |C_n(k)|^p \leq \sum_{i \in \kappa_Z} \omega_i |C_n(i)|^p = (J_p(x_n))^p$

$\because \omega_k > 0$ ， $\omega_k \geq \omega_{\min}$ 则 $\omega_k^{\frac{1}{p}} \leq \omega_{\min}^{\frac{1}{p}}$ ，所以 $|C_n(k)| \leq \omega_k^{\frac{1}{p}} J_p(x_n) \leq \omega_{\min}^{\frac{1}{p}} J_p(x_n)$

由于引理 1 可知 $|g(k, \theta)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |C_n(k)|$ ，所以 $|g(k, \theta)| \leq \omega_k^{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{N-1} J_p(x_n)$ ，则

$$\sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \frac{|g(k, \theta)|}{NL} \leq \frac{\omega_k^{\frac{1}{p}}}{NL} \sum_{n=0}^{N-1} J_p(x_n) \leq \frac{\omega_{\min}^{\frac{1}{p}}}{NL} \sum_{n=0}^{N-1} J_p(x_n) \quad (11)$$

在命题 1 中提出了 $J_p(x_n)$ ，并建立了 p -范数的加权积分旁瓣电平与脉冲串多普勒距离旁瓣之间的关系，给出满足多普勒容忍的充分条件，基于命题 1 可以得到满足指定多普勒旁瓣阈值的充分条件推论 1。

推论 1 若每个脉冲满足 $J_p(x_n) \leq L\gamma \omega_{\min}^{\frac{1}{p}}$ ， $n=0, 1, \dots, N-1$ ，则有 $|C_n(k)| \leq L\gamma, k \in \kappa_Z$ ，并且

$$\sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \frac{|g(k, \theta)|}{NL} \leq \gamma。$$

证明：由 $J_p(x_n) \leq L\gamma \omega_{\min}^{\frac{1}{p}}$ ，则 $|C_n(k)| \leq \omega_k^{\frac{1}{p}} J_p(x_n) \leq \omega_k^{\frac{1}{p}} L\gamma \omega_{\min}^{\frac{1}{p}} = L\gamma \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_k} \right)^{\frac{1}{p}} \leq L\gamma$ ，从而

$$|g(k, \theta)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |C_n(k)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} L\gamma = NL\gamma \quad (12)$$

所以 $\sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \frac{|g(k, \theta)|}{NL} \leq \gamma。$

推论 2 若 $\omega_k = \begin{cases} 1, & k \in \kappa_Z \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，在有效旁瓣集合上 $\omega_{\min} = 1$ ，则 $\max_{k \in \kappa_Z} |C_n(k)| \leq J_p(x_n)$ ，如果每个脉冲满足 $J_p(x_n) \leq L\gamma$ ，则 $|C_n(k)| \leq L\gamma$ 。

2.4. 优化模型的建立

根据命题 1、推论 1 以及推论 2，给出了在雷达需求中设计具有多普勒容忍性的波形问题可以转化

为设计单个低相关的波形。根据上述关于波形设计对于通信与雷达两者的需求的分析，为了设计通感一体化波形，结合 l_p 旁瓣范数 $J_p(x_n)$ 作为最小化目标，建立以下优化模型

$$\min_{x_n} \left(\sum_{k \in K_Z} \omega_k |g_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (13)$$

由于 $\arg \min_{x \in \mathcal{X}} J_p(x_n) = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} F_p(x_n)$ ，结合雷达旁瓣抑制目标与通信、发射约束，建立 p -范数的加权积分旁瓣电平的一体化波形优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{x_n} \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |g_k|^p \\ & \text{s.t. :} \\ & C_1 : \left| \text{wrap}_{[-\pi, \pi)}(\arg(x_{n,l}) - \arg(e_{n,l})) \right| \leq \varepsilon \\ & C_2 : \|x_n\|_2^2 = L \\ & C_3 : \alpha_L \leq |x_{n,l}| \leq \alpha_U, l = 0, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (14)$$

目标函数用于最小化 p -范数的加权积分旁瓣电平和确保雷达的需求，使其具有一定的多普勒容忍性，关于 C_3 是为了限制 PAPR 并保证发射效率的，使用本文将 PAPR 进行引入，其对波形的峰值功率进行限制，PAPR 的定义为[14]

$$\text{PAPR}(x_n) = \frac{\|x_n\|_\infty^2}{\frac{1}{L} \|x_n\|_2^2} \quad (15)$$

其中， $\|x_n\|_\infty = \max\{|x_{n,l}| : l = 0, \dots, L-1\}$ 与 $\|x_n\|_2 = \left(\sum_{l=0}^{L-1} |x_{n,l}|^2 \right)^{1/2}$ ，所以 PAPR 的约束可以写为

$\text{PAPR}(x_n) \leq \alpha$ ，其中 α 表示 PAPR 的上界且 $\alpha \geq 1$ 。结合 C_2 ，PAPR 的约束可等价为 $|x_{n,l}| \leq \sqrt{\alpha} = \alpha_U$ ，同时设置幅度下限为 α_L ($0 < \alpha_L \leq 1$)，因此得到模长约束 C_3 ： $\alpha_L \leq |x_{n,l}| \leq \alpha_U, l = 0, \dots, L-1$ 。综上所述，通过求解优化问题可以降低感兴趣时延区间内的自相关旁瓣，当所得波形进一步满足 $J_p(x_n) \leq L\gamma\omega_{\min}^p$ 可以获得具有多普勒容忍性的通感一体化波形，由推论 1 可保证其满足相应的多普勒容忍充分条件。求解优化问题则可获得具有多普勒容忍性的一体化波形。从而将具体推导求解优化问题的方法。

3. 基于 MM 优化框架的 p -WPISL 算法

观察(14)是一个高阶非凸的优化问题，为了求解优化问题，尝试基于 MM 思想的迭代框架求解优化问题并提出 P -WPISL 算法。

引理 [15] 考虑幂函数 $f(x) = x^p$ 其中 $2 \leq p < \infty$ 且 $x \in [0, t]$ 、 $t > 0$ ，对 $\forall x_0 \in [0, t]$ $f(x)$ 在区间 $[0, t]$ 上在 x_0 处被下面的二次函数主化

$$x^p \leq ax^2 + (px_0^{p-1} - 2ax_0)x + ax_0^2 - (p-1)x_0^p \quad (16)$$

其中 $a = \frac{t^p - x_0^p - px_0^{p-1}(t - x_0)}{(t - x_0)^2}$ ，根据引理 3 可知取 $\bar{g}_k = \min\{L, (L-k)\alpha_U^2\}$ ，给定第 q 次迭代为

$|g_k^{(q)}| \in [0, \bar{g}_k]$ ，其中 $g_k^{(q)} = (x_n^{(q)})^H U_k x_n^{(q)}$ ，所以 $|g_k|^p$ 在 $|g_k| \in [0, \bar{g}_k]$ 被下面的二次函数主化

$$a_k^{(q)} |g_k| + b_k^{(q)} |g_k| + a_k^{(q)} |g_k^{(q)}|^2 - (p-1) |g_k^{(q)}|^p \quad (17)$$

其中 $a_k^{(q)} = \frac{\bar{g}_k^p - |g_k^{(q)}|^p - p|g_k^{(q)}|^{p-1}(\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)}{(\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)^2}$, $b_k^{(q)} = p|g_k^{(q)}|^{p-1} - 2a_k^{(q)}|g_k^{(q)}|$, 为了方便记

$F_p(x_n) = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k |g_k|^\rho$, $c_k^{(q)} = a_k^{(q)} |g_k^{(q)}|^2 - (p-1) |g_k^{(q)}|^p$ 表示常数, 所以进一步得到

$$F_p(x_n) \leq \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k \left(a_k^{(q)} |g_k|^2 + b_k^{(q)} |g_k| + c_k^{(q)} \right) \quad (18)$$

由于 $b_k \leq 0$ 证明见附录 B, 定义对称延拓 $\omega_{-k} = \omega_k, a_{-k}^{(q)} = a_k^{(q)}, b_{-k}^{(q)} = b_k^{(q)}$, 引入相位归一化因子

$$\xi_k^{(q)} = \begin{cases} \frac{g_{-k}^{(q)}}{|g_{-k}^{(q)}|}, |g_{-k}^{(q)}| > 0 \\ 0, |g_{-k}^{(q)}| = 0 \end{cases}, \text{ 因此有 } |g_k| \geq \operatorname{Re}[\xi_k^{(q)} g_k], \text{ 结合 } b_k^{(q)} \leq 0, \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned} \omega_k b_k^{(q)} |g_k| &\leq \omega_k b_k^{(q)} \operatorname{Re}[\xi_k^{(q)} g_k] \\ &= \frac{1}{2} \omega_k b_k^{(q)} x_n^H \left(\xi_k^{(q)} U_k + (\xi_k^{(q)})^* U_{-k} \right) x_n \end{aligned} \quad (19)$$

考虑(18)与(19)可知, $F_p(x_n)$ 可表示为

$$F_p(x_n) \leq \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k a_k^{(q)} |g_k|^2 + \frac{1}{2} x_n^H \left(\sum_{\substack{k=1-L \\ k \neq 0}}^{L-1} \omega_k b_k^{(q)} \xi_k^{(q)} U_k \right) x_n + C^{(q)} \quad (20)$$

其中 $C^{(q)} = \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k c_k^{(q)}$ 为常数, 观察到 $\sum_{k=1}^{L-1} \omega_k a_k^{(q)} |g_k|^2$ 仍是一个四次项, 需要进一步主化, 令 $X = x_n x_n^H$ 、

$X^{(q)} = x_n^{(q)} (x_n^{(q)})^H$ 则 $|g_k|^2 = \operatorname{vec}^H(X) \operatorname{vec}(U_k) \operatorname{vec}^H(U_k) \operatorname{vec}(X)$ 由于上述所定义的对称延拓权重, 令

$$J = \sum_{k=-(L-1), k \neq 0}^{L-1} \omega_k a_k^{(q)} \operatorname{vec}(U_k) \operatorname{vec}^H(U_k), \text{ 有}$$

$$\sum_{k=1}^{L-1} \omega_k a_k^{(q)} |g_k|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{vec}^H(X) J \operatorname{vec}(X) \quad (21)$$

由文献[16]中引理 1, 给定 $M \geq M_0$ 与 x_0 , 二次函数 $x_0^H M_0 x$ 可以在 x_0 用 $x_0^H M_0 x \leq x^H M x + 2 \operatorname{Re}\{x^H (M_0 - M) x_0\} + x_0^H (M - M_0) x_0$ 来进行主化。由上述引理可知, 选取 $M = \lambda_J^{(q)} I$ ($\lambda_J^{(q)}$ 为 J 的最大特征上界), 由于移位矩阵的谱范数为 1, 因此可取 $\lambda_J^{(q)} = \max_{1 \leq k \leq L-1} \{\omega_k a_k^{(q)} (L-k)\}$, 显然满足 $M \geq J$, 因此(18)可以主化为

$$F_p(x_n) \leq \frac{1}{2} \lambda_J^{(q)} \|x\|_2^4 + x_n^H \left(R_p^{(q)} - \lambda_J^{(q)} x_n^{(q)} (x_n^{(q)})^H \right) x_n + C \quad (22)$$

其中 $R_p^{(q)} = \sum_{k=-(L-1), k \neq 0}^{L-1} \rho_k^{(q)} U_k$, $\rho_k^{(q)} = \frac{p}{2} \omega_k |g_k^{(q)}|^{p-2} g_{-k}^{(q)}, k \neq 0$, $R_p^{(q)}$ 是 Hermitian Toeplitz 矩阵忽略上式中常数部分, 式(22)可转化为

$$x_n^H Q_p^{(q)} x_n \quad (23)$$

其中 $Q_p^{(q)} = R_p^{(q)} - \lambda_J^{(q)} x_n^{(q)} (x_n^{(q)})^H$, 由于 $Q_p^{(q)} \leq R_p^{(q)}$, $\lambda_{\max}(Q_p^{(q)}) \leq \lambda_{\max}(R_p^{(q)}) \leq \lambda_{\mu}^{(q)}$, 选取 $\lambda_{\mu}^{(q)} \geq \lambda_{\max}(R_p^{(q)})$, 令 $M = \lambda_{\mu}^{(q)} I$, 显然满足 $M \geq Q_p^{(q)}$, 由引理可得

$$\begin{aligned} x_n^H Q_p^{(q)} x_n &\leq x_n^H \lambda_\mu^{(q)} I x_n + 2 \operatorname{Re} \left\{ x_n^H \left(Q_p^{(q)} - \lambda_\mu^{(q)} I \right) x_n \right\} + \left(x_n^{(q)} \right)^H \left(\lambda_\mu^{(q)} I - Q_p^{(q)} \right) x_n^{(q)} \\ &\leq 2 \operatorname{Re} \left\{ x_n^H \left(Q_p^{(q)} - \lambda_\mu^{(q)} I \right) x_n^{(q)} \right\} + \tilde{C} \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\tilde{C} = x_n^H \lambda_\mu^{(q)} I x_n + \left(x_n^{(q)} \right)^H \left(\lambda_\mu^{(q)} I - Q_p^{(q)} \right) x_n^{(q)}$, 根据上述内容忽略常数定义

$$a_p^{(q)} = -R_p^{(q)} x_n^{(q)} + \left(\lambda_J^{(q)} L + \lambda_\mu^{(q)} \right) x_n^{(q)} \quad (25)$$

根据上述内容给出关于 $a_p^{(q)} = -R_p^{(q)} x_n^{(q)} + \left(\lambda_J^{(q)} L + \lambda_\mu^{(q)} \right) x_n^{(q)}$ 的求解。构造长度为 $2L$ 的循环嵌入向量 $c_p^{(q)} = \left[0, \rho_1^{(q)}, \dots, \rho_{L-1}^{(q)}, 0, \rho_{-L}^{(q)}, \dots, \rho_{-1}^{(q)} \right]^T$, 令 F 是 $2L \times 2L$ 的为非归一化 DFT 矩阵, 并满足 $F^H F = 2LI_{2L}$ 。定义 $\mu^{(q)} = \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{fft} \left(c_p^{(q)} \right) \right\}$, 其中 $\mu_i^{(q)}$ 是 $\mu^{(q)}$ 的第 i 元素由 Hermitian Toeplitz 矩阵的循环矩阵, 可以得到

$\lambda_{\max} \left(R_p^{(q)} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i}^{(q)} + \max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i-1}^{(q)} \right)$, 因此定义 $B_R^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i}^{(q)} + \max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i-1}^{(q)} \right)$, 第二次 MM 所需的特征值上界可取为 $\lambda_{\mu, FFT}^{(q)} = B_R^{(q)} + \varepsilon_\lambda$, 其中 $\varepsilon_\lambda = 10^{-12} \max \left\{ 1, \left\| \mu^{(q)} \right\|_\infty \right\}$, 由循环嵌入关系可得

$R_p^{(q)} x_n^{(q)} = \frac{1}{2L} F_{:,L}^H \operatorname{Diag} \left(F c_p^{(q)} \right) F_{:,L} x_n^{(q)}$, 其中 $F_{:,L}^H$ 表示 F 的前 L 列, $\operatorname{Diag} \left(F c_p^{(q)} \right)$ 表示以 $F c_p^{(q)}$ 为对角元素构成的对角矩阵, $a_p^{(q)}$ 可以通过 FFT/IFFT 快速计算具体求解过程见表 1。可将目标函数转化为

$F_p \left(x_n \right) \leq -2 \operatorname{Re} \left\{ x_n^H a_p^{(q)} \right\} + C$, 因此最小化问题可转化为

$$\min_{x_n} -2 \operatorname{Re} \left\{ x_n^H a_p^{(q)} \right\} \quad (26)$$

式(26)可等价于 $\min_{x_n} \left\| x_n - a_p^{(q)} \right\|_2^2$, 令 $a_{p,l}^{(q)} = \left| a_{p,l}^{(q)} \right| e^{j\phi_{p,l}^{(q)}}$ 、 $x_{n,l} = r_{n,l} e^{j\theta_{n,l}}$ 与 $r_{n,l} = \left| x_{n,l} \right|$, 根据上述内容, (14)可转化为

$$\max_{\{r_{n,l}, \theta_{n,l}\}} \sum_{l=0}^{L-1} r_{n,l} \left| a_{p,l}^{(q)} \right| \cos \left(\phi_{p,l}^{(q)} - \theta_{n,l} \right)$$

考虑 $C_1: \left| \operatorname{wrap}_{[-\pi, \pi)} \left(\theta_{n,l} - \phi_{p,l} \right) \right| \leq \varepsilon$, 定义环绕相位差 $\Delta \phi_{p,l}^{(q)} = \operatorname{wrap}_{[-\pi, \pi)} \left(\arg \left(a_{p,l}^{(q)} \right) - \phi_{n,l} \right)$, 由此得到相位投影后的有效模长系数 $\hat{\theta}_{p,l}^{(q)} = \phi_{n,l} + \operatorname{clip} \left(\Delta \phi_{p,l}^{(q)}, -\varepsilon, \varepsilon \right)$, 定义最优相位的有效系数为

$q_{n,l}^{(q)} = \operatorname{Re} \left\{ a_{p,l}^{(q)} e^{-j\hat{\theta}_{p,l}^{(q)}} \right\} = \left| a_{p,l}^{(q)} \right| \cos \left(\phi_{p,l}^{(q)} - \hat{\theta}_{p,l}^{(q)} \right)$, 将其带入得到纯模长问题, 假设 $q_{n,l}^{(q)} > 0$, 令 $\mu_{n,l} = r_{n,l}^2$, 则转化为

$$\begin{aligned} &\max_{\{\mu_{n,l}\}} \sum_{l=0}^{L-1} q_{n,l}^{(q)} \sqrt{\mu_{n,l}} \\ &\text{s.t. :} \\ &C_2: \sum_{l=0}^{L-1} \mu_{n,l} = L \\ &C_3: \alpha_L^2 \leq \mu_{n,l} \leq \alpha_U^2 \end{aligned} \quad (27)$$

由于 $q_{n,l}^{(q)} > 0$, 关于保证 $q_{n,l}^{(q)} > 0$ (见附录 C)所以目标函数是关于 $\{\mu_{n,l}\}$ 的凹函数, 约束集合是凸集, 所以上述问题属于凸优化问题, 利用 KKT 条件[17]取得全局最优解。因此结合模长上下界和互补松弛条件, 可以得到最优幅度满足

$$r_{n,l}^{(q+1)} = \text{clip}\left(\delta^{(q)} q_{n,l}^{(q)}, \alpha_L, \alpha_U\right) \quad (28)$$

其中, $\delta^{(q)}$ 可由二分法[18]表 2 得到, 结合 $C_2: \|x_n\|_2^2 = L$, 可等价得到 $f(\delta^{(q)}) = 0$, 其中 $f_L(\delta) = -L + \sum_{l=0}^{L-1} \left[\text{clip}\left(\delta q_{n,l}^{(q)}, \alpha_L, \alpha_U\right) \right]^2$, 若其中 $\alpha_L = 1$ 或 $\alpha_U = 1$, 则能量约束与模长约束共同强制 $r_{n,l}^{(q+1)} = 1$, 将最优相位和模长组合, 满足通信相位、模长和能量约束的代理优化子问题的解得到

$$x_{n,l}^{(q+1)} = r_{n,l}^{(q+1)} e^{j\hat{\theta}_{p,l}^{(q)}} \quad (29)$$

综上所述, 对于使用 MM 思想的迭代框架求解优化问题, 将提出的 p -WPISL 算法总结在表 3 中, $x_{n,l}^{(q+1)}$ 为最优相位和模长组合, 满足通信相位、模长和能量约束的代理优化子问题得解。对于所提的 p -WPISL 算法在运算过程中, 在单次外迭代中, 表 1 共需 4 次长度为 $2L$ 的 FFT/IFFT, 运算量为 $O(\log_2^L)$; 表 2 二分法求 $\delta^{(q)}$ 需 $I_{\max}$ 次长度 L 的求和, 运算量为 $O(I_{\max} L)$; 其余相位投影与收敛判据均为 $O(L)$ 。由于 $I_{\max}$ 通常取 10~20 次, 远小于 $\log_2^L$, 单次迭代由 FFT/IFFT 主导。记收敛所需外迭代次数为 Q , 则算法总计算复杂度为 $O(QL \log_2^L)$, 由于式(40)~(45)中将 Hermitian Toeplitz 矩阵 $R_p^{(q)}$ 经循环嵌入转化为 $F_{2L}^H \text{Diag}(F c_p^{(q)}) F_{2L}$ 从而降低其计算的复杂度。使原本需要 $L \times L$ 矩阵参与的二次型求值退化为四次 FFT/IFFT。

Table 1. FFT/IFFT-Based computation of (25) and eigenvalue upper bound

表 1. 基于 FFT/IFFT 计算(25)与特征值上界

基于 FFT/IFFT 计算(25)与特征值上界	
1) 输入 $x_n^{(q)}$, p , $\{\omega_k\}_{k=1}^{L-1}$, $\{a_k^{(q)}\}_{k=1}^{L-1}$, η , $\varepsilon_{\lambda,0}$	
2) $fx = \text{fft}\left(\left[x_n^{(q)}, 0_{1 \times L}\right]^T\right)$	
3) $r = \text{ifft}\left(\left fx\right ^2\right)$, $r = [g_0, g_{-1}, \dots, g_{-(L-1)}, 0, g_{L-1}, \dots, g_1]^T$	
4) $\tilde{\omega} = [0, \omega_1, \dots, \omega_{L-1}, 0, \omega_{L-1}, \dots, \omega_1]^T$	
5) $c_p^{(q)} = \frac{p}{2} \tilde{\omega} \circ r ^{p-2} \circ r$	
6) $\mu^{(q)} = \text{Re}\left\{\text{fft}\left(c_p^{(q)}\right)\right\}$	
7) $tmp = \text{ifft}\left(\mu^{(q)} \circ (fx)\right)$	
8) $y_p^{(q)} = R_p^{(q)} x_n^{(q)} = tmp_{1:L}$	
9) $\lambda_j^{(q)} = \max_{1 \leq k \leq L-1} \left\{ \omega_k a_k^{(q)} (L-k) \right\}$	
10) $\lambda_{\mu,FFT}^{(q)} = B_R^{(q)} + \varepsilon_\lambda$, 其中 $B_R^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i}^{(q)} + \max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i-1}^{(q)} \right)$, $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda,0} \max\left\{1, \left\ \mu^{(q)}\right\ _\infty\right\}$, $\varepsilon_{\lambda,0} = 10^{-12}$	
11) $\lambda_u^{(q)} = \max\left\{\lambda_{\mu,FFT}^{(q)}, \lambda_{\mu,pos}^{(q)}\right\}$ 其中, $\lambda_{\mu,pos}^{(q)} = \max_{0 \leq l \leq L-1} \left\{ \frac{\left y_{p,l}^{(q)}\right + \eta}{\left x_{n,l}^{(q)}\right } - \lambda_j^{(q)} L \right\}$, $\eta > 0$, 则	
$a_p^{(q)} = -y_p^{(q)} + \left(\lambda_j^{(q)} L + \lambda_\mu^{(q)}\right) x_n^{(q)}$	
12) 输出: $y_p^{(q)}$ 、 $\lambda_j^{(q)}$ 、 $\lambda_{\mu,FFT}^{(q)}$ 、 $\lambda_{\mu,pos}^{(q)}$ 、 $\lambda_\mu^{(q)}$ 、 $a_p^{(q)}$	

Table 2. Solving for $\delta^{(q)}$ via the bisection method**表 2.** 二分法求 $\delta^{(q)}$

二分法求 $\delta^{(q)}$
1) 输入参数: $\{q_{n,l}^{(q)}\}_{l=0}^{L-1}$, α_L , α_U , $\varepsilon_\delta = 10^{-12}$, $I_{\max}$ 2) 若 $\alpha_L = 1$ 或 $\alpha_U = 1$, 则 $r_{n,l}^{(q+1)} = 1$, 直接返回, 不执行二分法 3) 否则, 参数满足 $q_{n,l}^{(q)} \geq \eta > 0$, $l = 0, \dots, L-1$, $0 < \alpha_L < 1 < \alpha_U$, 定义函数: $f_L(\delta) = -L + \sum_{l=0}^{L-1} [\text{clip}(\delta q_{n,l}^{(q)}, \alpha_L, \alpha_U)]^2$ 4) 初始化: $\delta_L = 0$ 、 $\delta_U = \frac{\alpha_U}{\min_{0 \leq l \leq L-1} q_{n,l}^{(q)}}$ 5) 对 $i = 0, \dots, I_{\max} - 1$, 计算中点及其函数值: $\delta_M = \frac{\delta_U + \delta_L}{2}$ 、 $f_M = f_L(\delta_M)$ 6) 若满足 $ f_M \leq \varepsilon_\delta$, 则令 $\delta^{(q)} = \delta_M$, 并退出二分循环 7) 否则, 按照中点函数值更新二分区为 $\begin{cases} \delta_U \leftarrow \delta_M, f_M > 0 \\ \delta_L \leftarrow \delta_M, f_M \leq 0 \end{cases}$ 8) 若满足 $\delta_U - \delta_L \leq \varepsilon_\delta \max\{1, \delta_U\}$, 则令 $\delta^{(q)} = \frac{\delta_U + \delta_L}{2}$, 并退出二分循环; 否则继续下一次二分迭代 9) 若达到最大迭代次数 $I_{\max}$, 则输出当前区间中点: $\delta^{(q)} = \frac{\delta_U + \delta_L}{2}$

4. 性能分析及对比

为了验证基于 MM 优化框架提出的 p -WPISL 算法求解得到通感一体化波形的有效性, 采用数值仿真实验验证。首先对其在脉冲长度 $L = 512$ 、脉冲数 $N = 64$ 以及采用通信调制方式 QPSK ($M = 4$), 随机生成通信符号。分别从算法收敛特性、雷达与通信性能折中与参考波形综合对比三个维度, 对 p -WPISL 算法求解 WPISL 后得到的波形的 PSL、SER 与非周期自相关函数和模糊函数进行性能分析, 将自相关级别(ACL)表示为

$$\text{ACL} = 20 \log_{10} \frac{|C_n(k)|}{L} \quad (30)$$

定义第 n 个 PRT 内发射波形的峰值旁瓣电平为[19]

$$\text{PSL} = \max_{|k| \in \{1, 2, \dots, Z-1\}} \text{ACL} \quad (31)$$

其次提出基于 MM 思想的迭代框架提出的 p -WPISL 算法求解 WPISL 得到通感一体化波形进行性能分析, 主要通过比较不同 p 下峰值旁瓣电平的收敛特性与所设计的通感一体化波形的性能。

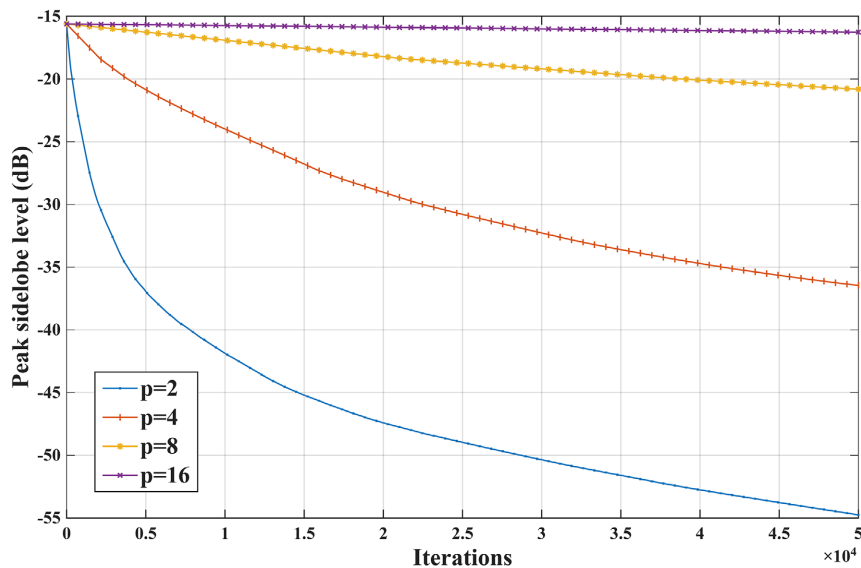
4.1. 性能分析

4.1.1. 收敛性分析

通过选取不同的 p 值并将迭代次数为 5×10^4 , 比较不同 p 下峰值旁瓣电平的收敛特性。图 1 是 PSL 随迭代次数的演化曲线, 由图 1 可知, 在相同的迭代次数下, 较小的 p 具有明显更快的收敛速度。另一方面, 随着 p 的增加, 对应的 p -norm 会将逐渐接近 ∞ -norm。因此在实际的应用中, 逐渐增加 p 的值来获得较低的 PSL 是一种更有效的方法, 虽然由此会导致迭代次数增加, 因此, p 的选取需要在 PSL 逼近能力与算法收敛速度之间进行权衡。

Table 3. p -WPISL algorithm for solving integrated sensing and communication**表 3.** p -WPISL 算法求解通感一体化波形

p -WPISL 算法
1) 输入: L 、 N 、 p 、 $\{e_n\}_{n=0}^{N-1}$ 、 $\{\omega_k\}_{k=1}^{L-1}$ 、 ε 、 α 、 α_L 、 $Q_{\max}$ 、 $I_{\max}$ 、 ε_{out} 、 ε_{δ} 、 ε_{λ} 、 η 2) For $n=0,1,\dots,N-1$ (外层脉冲循环) 3) 初始化: $x_{n,l}^{(0)} = e^{j \arg(e_{n,l})}$, $l=0,\dots,L-1$ 、 $q=0$ 、 $x_n^* = x_n^{(0)}$ 4) While $q < Q_{\max}$ 5) 计算 $g_k = x_n^H U_k x_n$, $g_k^{(q)} = (x_n^{(q)})^H U_k x_n^{(q)}$, $k=1,\dots,L-1$ $\bar{g}_k = \min\{L, (L-k)\alpha_U^2\}$ 6) 计算 $a_k^{(q)}$ 、 $b_k^{(q)}$ 、 $c_k^{(q)}$ 、 ρ_k (按附录 A) 7) 按照表 1 计算: $R_p^{(q)}$ 、 $y_p^{(q)}$ 、 $\lambda_J^{(q)}$ 、 $\lambda_{\mu,FFT}^{(q)}$ 、 $\lambda_{\mu,pos}^{(q)}$, $\lambda_u^{(q)} = \max\{\lambda_{\mu,FFT}^{(q)}, \lambda_{\mu,pos}^{(q)}\}$ 8) 计算 $a_p^{(q)} = -y_p^{(q)} + (\lambda_J^{(q)} L + \lambda_{\mu}^{(q)}) x_n^{(q)}$ 9) 按表 2 二分法求 $\delta^{(q)}$, 得到 $r_{n,l}^{(q+1)} = \text{clip}(\delta^{(q)} q_{n,l}^{(q)}, \alpha_L, \alpha_U)$ 10) 根据相位投影得到 $x_{n,l}^{(q+1)} = r_{n,l}^{(q+1)} e^{j\hat{\theta}_{p,l}^{(q)}}$ 11) 若 $F_p(x_n^{(q+1)}) \leq F_p(x_n^{(q)})$, 增大 $\lambda_{\mu}^{(q)}$ 并重算候选点 12) 收敛判断: 若 $\frac{ F_p(x_n^{(q+1)}) - F_p(x_n^{(q)}) }{\max\{1, F_p(x_n^{(q)})\}} \leq \varepsilon_{out}$, 退出 13) $q \leftarrow q+1$ 14) End while 15) $x_n^{(*)} = x_n^{(q+1)}$ 16) End for 17) 输出: $\{x_n^*\}_{n=0}^{N-1}$

**Figure 1.** Evolution curves of the PSL versus iteration number**图 1.** PSL 随迭代次数的演化曲线

4.1.2. 雷达旁瓣与通信性能的折中分析

为探究在不同参数下一体化波形的雷达感知与通信解调之间性能的权衡关系, 当在参数满足 $Z = 50, 120$ 与 $\alpha_L = 0.3, 0.7$ 时, 对比不同 p 值优化的符号错误率与接收符号能量噪声比 E_s/N_0 其中(E_s 表示平均接受符号能量, N_0 表示噪声功率谱密度参数), 图 2 给出了 SER 随接收符号能量噪声比的变化曲线, 并以未经优化的原始(QPSK)序列做为起始的通信性能基准。

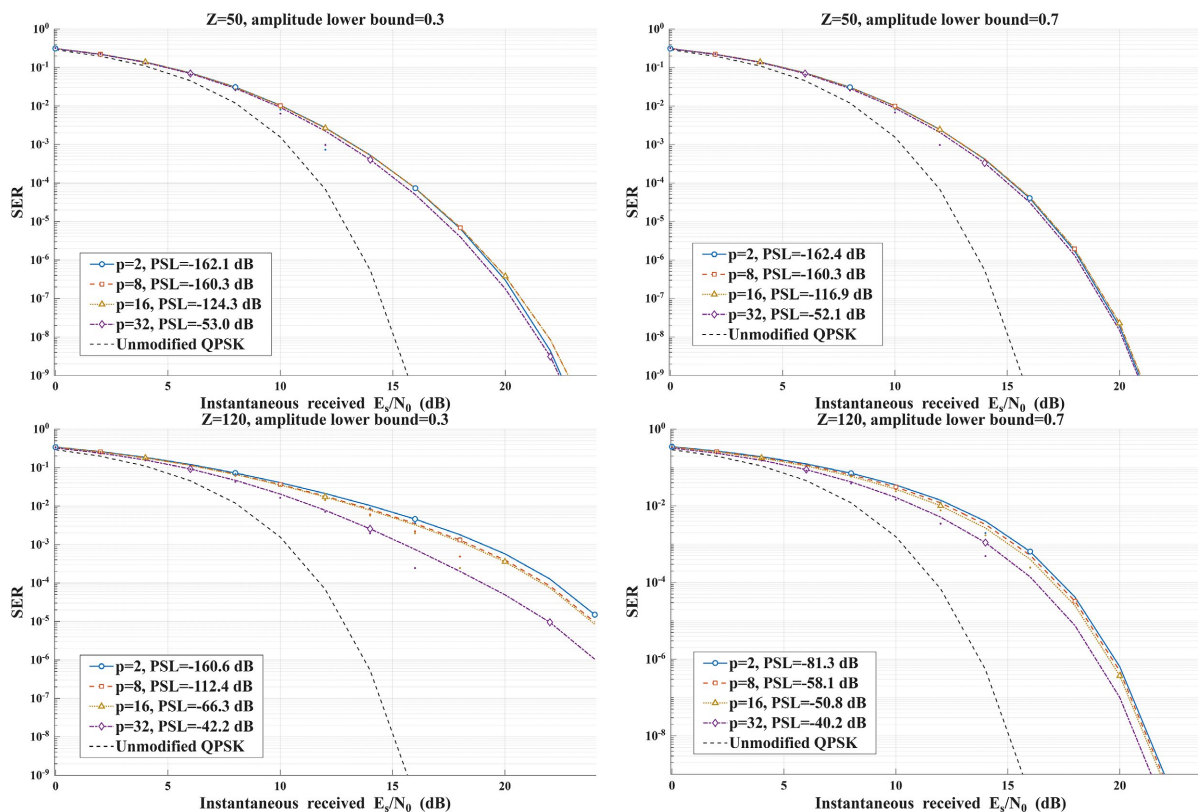


Figure 2. SER versus received symbol SNR for optimized waveforms with different p -values

图 2. 不同值 p -优化的符号错误率与接收符号能量噪声比

当 $Z = 50$ 与 $\alpha_L = 0.3$ 时, 随着 p 的增大, 优化目标对大幅度旁瓣的权重指数级提升, 优化重心向峰值旁瓣收敛, 幅度与相位越接近原始符号, 通信误码率会逐步降低。当 $Z = 120$ 时, α_L 从 0.3 提升至 0.7 时, 提升 α_L 会削弱旁瓣抑制能力对雷达性能产生影响, 然而幅度约束越紧, 波形的幅度与相位越接近原始通信符号, 通信误码率越低。提升 α_L 通信性能损失大幅减小, 所以在应用时可对幅度约束进行选取, 关注雷达性能时, 可降低 α_L 来提升旁瓣的抑制效果, 对于 PAPR 约束严格、通信性能要求过高时, 可提高 α_L 来保障通信性能。然而 Z 越大, 需要抑制的旁瓣数量越多, 优化过程中需调整的采样点越多, 通信性能损失越大。因此应用时可调节 p 、幅度约束及抑制区间来满足不 ISAC 场景的性能需求。

4.2. 性能对比

为了进一步验证其算法的性能, 采用文献[8]中基于 LFM 的通感一体化波形作为原始的 LFM 波形与本文所设计的通感一体化波形, 分别在不同 p 值下的误符号率对比、非周期自相关函数对比以及模糊函

数对比三个方面进行对比分析，验证设计的通感一体化波形的性能优势。

4.2.1. 不同 p 值下的误符号率对比

将基于 MM 架求解的一体化波形与传统 LFM 一体化波形进行 SER 对比，满足 $Z = 120$ 、 $\alpha_L = 0.9$ 以及 $\alpha = 2$ 的参数下，图 3 对比了原始的 LFM 波形与 p 取 2, 4, 8 的四种波形，由于 LFM 相位与通信符号无关，其 SER 为恒值，不随 SNR 改变。而基于 MM 框架求解的一体化波形的 SER 会随着 SNR 升高持续下降，真正实现雷达感知与数字通信功能的一体化。在相同信噪比条件下，增大 p 可获得更低的 SER。因此增大 p 改善了多普勒容忍性与峰值旁瓣，而 SER 也得到改善，实现通信与雷达的良好结合。

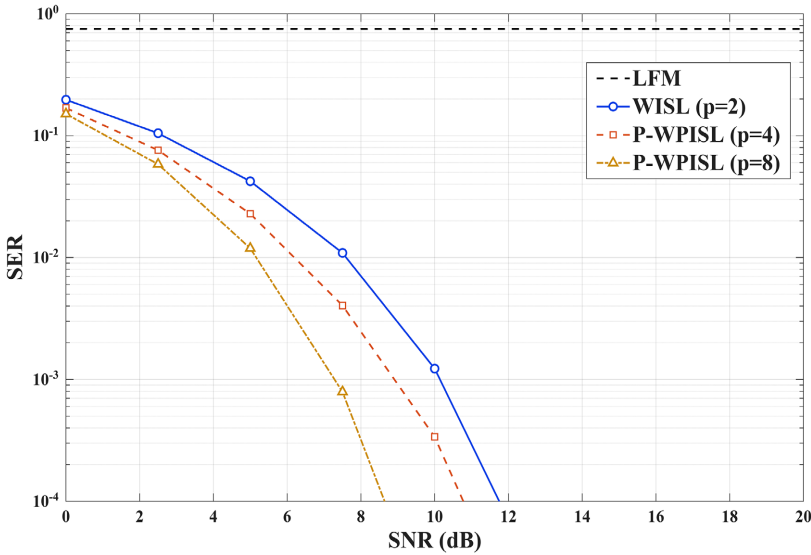
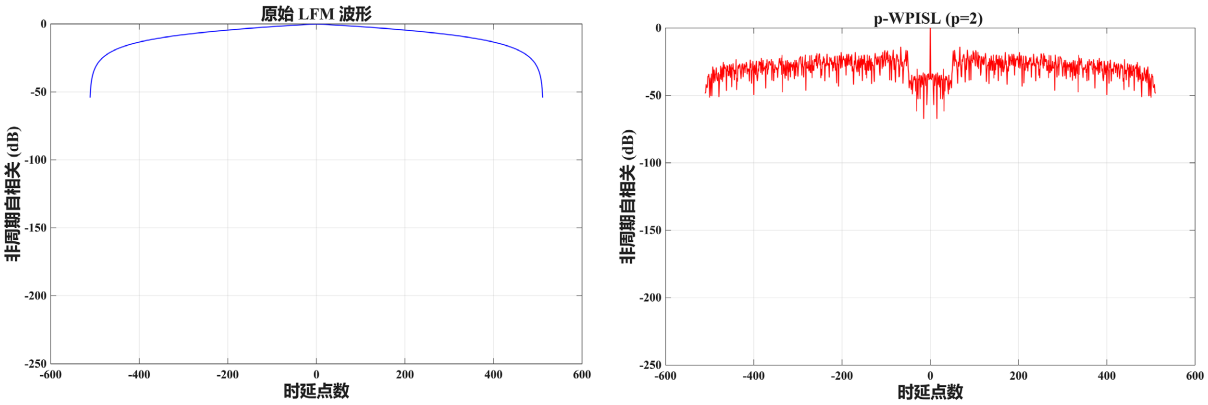


Figure 3. Comparison of SER performance between MM-based and LFM integrated waveforms
图 3. 基于 MM 和 LFM 的一体化波形 SER 性能比较

4.2.2. 非周期自相关对比

选取 $Z = 50$ 与优化目标满足约束条件时，图 4 对比了原始 LFM 波形与不同取值 p 的一体化波形的非周期自相关函数。观察中 LFM 光滑但近端偏高的自相关，通过 p -WPISL 算法求解后的优化波形将感兴趣区间旁瓣整体压低 15~20 dB，显著改善了距离旁瓣性能。随着 p 值的增大，峰值旁瓣在逐渐下降，呈现出 $p \rightarrow \infty$ 最小化最大旁瓣，由 p 从 2 增加到 8， p 能够实现 ISL 与 PSL 的良好平衡。因此可以通过选择不同的 p ，实现 ISL 与 PSL 的良好平衡。



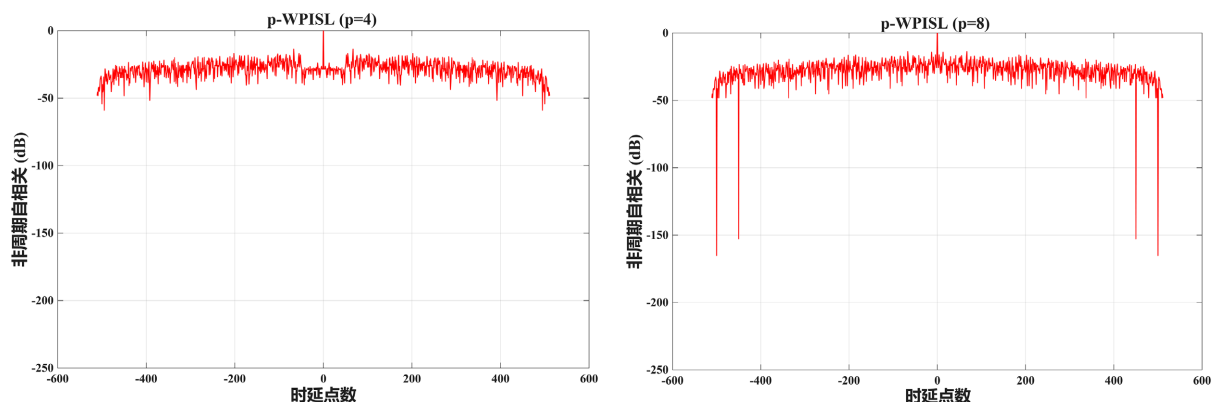


Figure 4. Aperiodic autocorrelation function

图 4. 非周期自相关函数

4.2.3. 模糊函数对比

图 5 在优化参数($Z = 50$ 、 $\varepsilon = 0.3$ 、 $\text{PAPR} = 2$)的条件下, 对比原始 LFM 波形和不同 p 参数 p -WPISL 算法求解后的优化波形的模糊函数。在原始的 LFM 波形中, 对 $(-\pi, \pi)$ 内任取多普勒做时延切片, 零时延附近均存在较高的距离旁瓣。所以当两个目标能量相差较大时, 弱目标回波的峰值会被强目标的高旁瓣遮盖, 使二者无法分辨。因此原始的 LFM 波形多普勒容忍有限。对于选择 $p = 2, 4, 8$ 三种基于 p -WPISL 算法求解后的优化波形中, 任取 $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ 做时延切片, 均可看到零时延处有清晰主峰、感兴趣区间 $|k| < Z$ 内距离旁瓣较低, 且该切片形态几乎不随 θ_0 改变。优化的波形在目标存在径向运动时仍能保

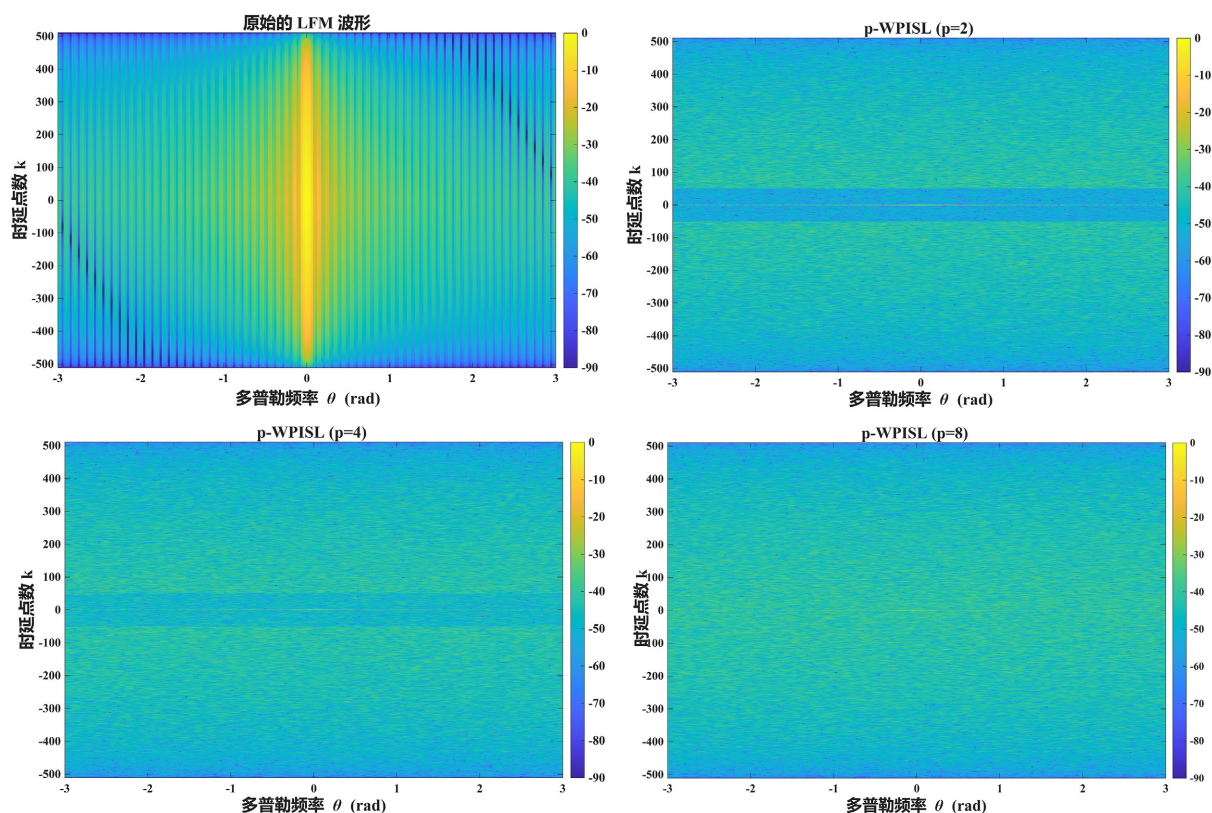


Figure 5. Ambiguity function

图 5. 模糊函数

持近理想的探测性能, 不会发生像原始 LFM 波形的旁瓣遮盖。随着 p 的增大, 任意多普勒切片的峰值旁瓣越低并且模糊面会越接近理想。

5. 结论

本文基于 p -范数的加权积分旁瓣电平提出了设计具有多普勒容忍性的通感一体化波形的方案。在发射波形的能量、峰均功率比及在通信波形中相位差的约束下, 最小化波形的 p -范数的加权积分旁瓣电平。求解高阶非凸优化问题, 基于优化最小化框架提出了 p -WPISL 算法进行求解。结果数值实验表明, 所提出的优化问题在 p -WPISL 算法求解得到的通感一体化波形, 在满足约束条件的前提下, 实现积分旁瓣电平与峰值旁瓣电平的灵活权衡, 具备良好的多普勒容忍能力, 同时可以有效保障通信传输质量。未来工作可在以下三个方向进一步扩展, 将当前点目标模型推广至 R 个散射点叠加的多普勒扩展目标模型, 考察车辆簇、无人机群等分布目标下的距离旁瓣抑制与输出信杂比; 其二, 引入带限地杂波与气象杂波功率谱 $S_c(\theta)$, 评估波形在强杂波背景下的检测性能; 其三, 在通信链路中显式引入归一化 CSI 估计误差 η_{csi} , 分析其对符号错误率性能的影响, 进一步检验所提波形在非理想信道条件下的鲁棒性。此外, 将本文单脉冲串体制推广至 OFDM 子载波结构, 亦是后续值得研究的方向。

参考文献

- [1] Liu, A., Huang, Z., Li, M., Wan, Y., Li, W., Han, T.X., *et al.* (2022) A Survey on Fundamental Limits of Integrated Sensing and Communication. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, **24**, 994-1034. <https://doi.org/10.1109/comst.2022.3149272>
- [2] Zhang, D., Wang, H. and Wu, D. (2017) Toward Centimeter-Scale Human Activity Sensing with Wi-Fi Signals. *Computer*, **50**, 48-57. <https://doi.org/10.1109/mc.2017.7>
- [3] Pin Tan, D.K., He, J., Li, Y., Bayesteh, A., Chen, Y., Zhu, P., *et al.* (2021) Integrated Sensing and Communication in 6G: Motivations, Use Cases, Requirements, Challenges and Future Directions. 2021 1st *IEEE International Online Symposium on Joint Communications & Sensing (JC&S)*, Dresden, 23-24 February 2021, 1-6. <https://doi.org/10.1109/jcs52304.2021.9376324>
- [4] Liu, F., Cui, Y., Masouros, C., Xu, J., Han, T.X., Eldar, Y.C., *et al.* (2022) Integrated Sensing and Communications: Toward Dual-Functional Wireless Networks for 6G and Beyond. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **40**, 1728-1767. <https://doi.org/10.1109/jsac.2022.3156632>
- [5] Tian, T., Zhang, T., Kong, L. and Deng, Y. (2021) Transmit/Receive Beamforming for MIMO-OFDM Based Dual-Function Radar and Communication. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **70**, 4693-4708. <https://doi.org/10.1109/tvt.2021.3072094>
- [6] Tian, T., Li, G., Deng, H. and Lu, J. (2022) Adaptive Bit/Power Allocation with Beamforming for Dual-Function Radar-communication. *IEEE Wireless Communications Letters*, **11**, 1186-1190. <https://doi.org/10.1109/lwc.2022.3160674>
- [7] 马丁友, 刘祥, 黄天耀, 等. 雷达通信一体化: 共用波形设计和性能边界[J]. 雷达学报, 2022, 11(2): 198-212.
- [8] Liu, F., Zhou, L., Masouros, C., Li, A., Luo, W. and Petropulu, A. (2018) Toward Dual-Functional Radar-Communication Systems: Optimal Waveform Design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **66**, 4264-4279. <https://doi.org/10.1109/tsp.2018.2847648>
- [9] Liu, X., Huang, T., Shlezinger, N., Liu, Y., Zhou, J. and Eldar, Y.C. (2020) Joint Transmit Beamforming for Multiuser MIMO Communications and MIMO Radar. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **68**, 3929-3944. <https://doi.org/10.1109/tsp.2020.3004739>
- [10] Liu, X., Huang, T. and Liu, Y. (2022) Transmit Design for Joint MIMO Radar and Multiuser Communications with Transmit Covariance Constraint. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **40**, 1932-1950. <https://doi.org/10.1109/jsac.2022.3155512>
- [11] 王佳欢, 范平志, 时巧, 等. 一种具有多普勒容忍性的通感一体化波形设计[J]. 雷达学报, 2023, 12(2): 275-286.
- [12] Feng, X., Zhao, Y.F., Li, Y., *et al.* (2025) OFDM-Based Waveform Design for MIMO DFRC Systems with Reduced Range Sidelobes: A Majorization-Minimization Approach. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **74**, 4582-4595. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10753570>
- [13] Liu, T., Sun, J., Wang, G., Du, X. and Hu, W. (2023) Designing Low Side-Lobe Level-Phase Coded Waveforms for

-
- MIMO Radar Using p -Norm Optimization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **59**, 3797-3810. <https://doi.org/10.1109/taes.2022.3232310>
- [14] 崔国龙, 余显祥, 杨婧, 等. 认知雷达波形优化设计方法综述[J]. 雷达学报, 2019, 8(5): 537-557.
- [15] Song, J., Babu, P. and Palomar, D.P. (2016) Sequence Design to Minimize the Weighted Integrated and Peak Sidelobe Levels. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **64**, 2051-2064. <https://doi.org/10.1109/tsp.2015.2510982>
- [16] Song, J., Babu, P. and Palomar, D.P. (2015) Optimization Methods for Designing Sequences with Low Autocorrelation Sidelobes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **63**, 3998-4009. <https://doi.org/10.1109/tsp.2015.2425808>
- [17] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004) Convex Optimization. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511804441>
- [18] Moler, C.B. (2004) Numerical Computing with MATLAB. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [19] Yu, X., Fan, T., Qiu, H., Wang, R., Cui, G. and Kong, L. (2022) Constrained Transceiver Design with Expanded Mainlobe for Range Sidelobe Reduction. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **58**, 4803-4813. <https://doi.org/10.1109/taes.2022.3163120>

附录

附录 A 标量主化函数及奇异点连续延拓

(1) 由于能量约束得: $|g_k| = |x_n^H U_k x_n| \leq \|U_k\|_2 \|x_n\|_2^2 \leq L$, 由模长上界得

$$|g_k| \leq \sum_{l=0}^{L-k-1} |x_l| |x_{l+k}| \leq (L-k) \alpha_U^2$$

所以取 $\bar{g}_k = \min \{L, (L-k) \alpha_U^2\}$

(2) 主化函数一般形式

给定第 q 次迭代为 $|g_k^{(q)}| \in [0, \bar{g}_k]$, 所以 $|g_k| \in [0, \bar{g}_k]$ 可由二次函数主化

$$|g_k|^p \leq a_k^{(q)} |g_k|^2 + b_k^{(q)} |g_k| + c_k^{(q)}$$

其中

$$a_k^{(q)} = \frac{\bar{g}_k^p - |g_k^{(q)}|^p - p |g_k^{(q)}|^{p-1} (\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)}{(\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)^2}$$

$$b_k^{(q)} = p |g_k^{(q)}|^{p-1} - 2a_k^{(q)} |g_k^{(q)}|, \quad c_k^{(q)} = a_k^{(q)} |g_k^{(q)}|^2 - (p-1) |g_k^{(q)}|^p$$

定义主化函数为 $Q_k(|g_k|, |g_k^{(q)}|) = a_k^{(q)} |g_k|^2 + b_k^{(q)} |g_k| + c_k^{(q)}$, 该主化函数满足全局上界性质 $Q_k(|g_k|, |g_k^{(q)}|) \geq |g_k|^p$, 上述主化函数满足

$$b_k^{(q)} + 2a_k^{(q)} |g_k^{(q)}| = p |g_k^{(q)}|^{p-1}, \quad a_k^{(q)} |g_k^{(q)}|^2 + b_k^{(q)} |g_k^{(q)}| + c_k^{(q)} = |g_k^{(q)}|^p$$

然而当 $|g_k^{(q)}| = \bar{g}_k$ 或 $|g_k^{(q)}| = 0$ 时上述问题中的公式将会出现 $0/0$ 或相位归一化除零问题, 因此需要单独处理。

1) 关于 $|g_k^{(q)}| = \bar{g}_k$ 的连续延拓, 进行以下处理

$$\lim_{|g_k^{(q)}| \rightarrow \bar{g}_k} a_k^{(q)} = \lim_{|g_k^{(q)}| \rightarrow \bar{g}_k} \frac{\bar{g}_k^p - |g_k^{(q)}|^p - p |g_k^{(q)}|^{p-1} (\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)}{(\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)^2} = \frac{p(p-1)}{2} \bar{g}_k^{p-2}$$

由于 $|g_k^{(q)}| = \bar{g}_k$, 所以定义 $a_k^{(q)} = \frac{p(p-1)}{2} \bar{g}_k^{p-2}$, 将其带入得到

$$b_k^{(q)} = p(2-p) \bar{g}_k^{p-1}, \quad c_k^{(q)} = \frac{(p-1)(p-2)}{2} \bar{g}_k^p$$

所以当 $|g_k^{(q)}| = \bar{g}_k$ 时, 主化函数变为

$$|g_k|^p \leq \frac{p(p-1)}{2} \bar{g}_k^{p-2} |g_k|^2 + p(2-p) \bar{g}_k^{p-1} |g_k| + \frac{(p-1)(p-2)}{2} \bar{g}_k^p$$

因此该主化函数仍满足 $Q_k(|g_k^{(q)}|, |g_k^{(q)}|) = |g_k^{(q)}|^p$ 以及 $\frac{\partial Q_k}{\partial |g_k|} \Big|_{|g_k|=|g_k^{(q)}|} = p |g_k^{(q)}|^{p-1}$ 。

2) 关于 $|g_k^{(q)}| = 0$ 的处理, 当第 q 次迭代的第 k 旁瓣为零时, 当 $|g_k^{(q)}| = 0$ 时, 得到

$$a_k^{(q)} = \frac{\bar{g}_k^p}{\bar{g}_k^2} = \bar{g}_k^{p-2}, \quad b_k^{(q)} = 0, \quad c_k^{(q)} = 0$$

所以主化函数为 $|g_k| \leq \bar{g}_k^{p-2} |g_k|^2$ ，当 $|(g_k)^{(q)}| = 0$ 时，需要特殊处理的不是 $a_k^{(q)}$ ，而是后续出现的相位归一化项 $\frac{g_{-k}^{(q)}}{|g_{-k}^{(q)}|}$ ，因为零相关旁瓣没有定义相位。采用分段计算 $a_k^{(q)}$ ，令 $\tau = 10^{-12}$ 有

$$a_k^{(q)} = \begin{cases} \bar{g}_k^{p-2}, |g_k^{(q)}| = 0 \\ \frac{\bar{g}_k^p - |g_k^{(q)}|^p - p |g_k^{(q)}|^{p-1} (\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)}{(\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)^2}, 0 < |g_k^{(q)}| < \bar{g}_k, \bar{g}_k - |g_k^{(q)}| > \tau \max\{1, \bar{g}_k\} \\ \frac{p(p-1)}{2} \bar{g}_k^{p-2}, \bar{g}_k - |g_k^{(q)}| \leq \tau \max\{1, \bar{g}_k\} \end{cases}$$

对于上述采用 $a_k^{(q)}$ 的分段计算，都需要重新进行计算 $b_k^{(q)}$ 、 $c_k^{(q)}$ 。

3) 定义 $\rho_k^{(q)} = \begin{cases} 0, |g_k^{(q)}| = 0 \\ \frac{p}{2} \omega_k |g_k^{(q)}|^{p-2} \frac{g_{-k}^{(q)}}{|g_{-k}^{(q)}|}, |g_k^{(q)}| > 0 \end{cases}$ ，当 $|g_k^{(q)}| = 0$ 时，才令 $\rho_k^{(q)} = 0$ 。对于任意小非零相关旁瓣

$0 < |g_k^{(q)}| \leq \tau_0$ 时，其中 $\tau_0 = 10^{-12} \max\{1, \max_j |(g_j)^{(q)}|\}$ ，则 $\rho_k^{(q)} = \frac{p}{2} \omega_k |g_k^{(q)}|^{p-2} \frac{g_{-k}^{(q)}}{|g_{-k}^{(q)}|}$ 使用其进行计算，不能直接将其置零。对于负时延可知， $R_p^{(q)}$ 为 Hermitian Toeplitz 矩阵。

附录 B 关于 $b_k^{(q)} \leq 0$

由于 $a_k^{(q)}$ ，令 $H_{|g_k^{(q)}|}(\bar{g}_k) = \frac{\bar{g}_k^p - |g_k^{(q)}|^p - p |g_k^{(q)}|^{p-1} (\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)}{(\bar{g}_k - |g_k^{(q)}|)^2}$ ，其中 $H_{|g_k^{(q)}|}(\bar{g}_k)$ 关于 $\bar{g}_k$ 单调不减，可得

$$a_k^{(q)} \geq H_{|g_k^{(q)}|}(|g_k^{(q)}|) = \frac{p(p-1)|g_k^{(q)}|^{p-2}}{2}，所以$$

$$b_k^{(q)} \leq p |g_k^{(q)}|^{p-1} - p(p-1) |g_k^{(q)}|^{p-1} = p(2-p) |g_k^{(q)}|^{p-1} \leq 0$$

附录 C 有效幅度系数正定性与模长子问题最优性

关于保证 $q_{n,l}^{(q)} > 0$ ，令 $y_p^{(q)} = R_p^{(q)} x_n^{(q)}$ ，由此可得

$$a_{p,l}^{(q)} = -y_{p,l}^{(q)} + (\lambda_J^{(q)} L + \lambda_\mu^{(q)}) x_{n,l}^{(q)}$$

由于当前点 $x_n^{(q)}$ 满足通信相位约束，其相位是式的一个可行候选点，因此

$$q_{n,l}^{(q)} \geq \operatorname{Re} \left\{ a_{p,l}^{(q)} e^{-j \arg(x_{n,l}^{(q)})} \right\}, \quad q_{n,l}^{(q)} \geq (\lambda_J^{(q)} L + \lambda_\mu^{(q)}) |x_{n,l}^{(q)}| - |y_{p,l}^{(q)}|$$

保证有效模长系数为下的下界为 $\lambda_{\mu, pos}^{(q)} = \max_{0 \leq l \leq L-1} \left\{ \frac{|y_{p,l}^{(q)}| + \eta}{|x_{n,l}^{(q)}|} - \lambda_J^{(q)} L \right\}$ ，可以将第二 MM 上界选为

$$\lambda_\mu^{(q)} = \max \{ \lambda_{\mu, FFT}^{(q)}, \lambda_{\mu, pos}^{(q)} \}, \quad \text{其中 } \eta > 0, \quad \lambda_{\mu, FFT}^{(q)} = B_R^{(q)} + \varepsilon_\lambda, \quad B_R^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i}^{(q)} + \max_{1 \leq i \leq L} \mu_{2i-1}^{(q)} \right) \text{ 从而得到}$$

$$\lambda_\mu^{(q)} \geq \lambda_{\mu, FFT}^{(q)} \geq \lambda_{\max} \left(R_p^{(q)} \right) \text{ 且 } \lambda_\mu^{(q)} \geq \lambda_{\mu, pos}^{(q)}。$$

由此保证了 $q_{n,l}^{(q)} \geq \eta > 0$ ，由于 $\lambda_\mu^{(q)} = \max \left\{ \lambda_{\mu,FFT}^{(q)}, \max_{0 \leq l \leq L-1} \left[\frac{|y_{p,l}^{(q)}| + \eta}{|x_{n,l}^{(q)}|} - \lambda_j^{(q)} L \right] \right\}$ ，只对 $\lambda_\mu^{(q)}$ 进行增大，仍然有 $\lambda_\mu^{(q)} \geq \lambda_{\max} \left(R_p^{(q)} \right)$ ，因此每次增大 $\lambda_\mu^{(q)}$ 后，重新计算 $a_p^{(q)}$ 、 $\hat{\theta}_{p,l}^{(q)}$ 、 $q_{n,l}^{(q)}$ 。