Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 152-166
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511439

Hans汉斯

基于输出空间知识引导的模糊规则分类器

马艺华，张大庆*

辽宁科技大学理学院，辽宁 鞍山

收稿日期：2026年10月11日；录用日期：2026年11月4日；发布日期：2026年11月17日

摘　要

传统模糊规则分类器前件划分多依赖无监督聚类，未充分利用输出空间判别信息，制约了分类性能与泛化能力。为此，本文提出知识引导的模糊规则分类器框架(KGFRC)，将输出空间知识引导的判别模糊划分与后件规则学习融合为两阶段监督学习范式。模糊划分阶段引入邻近度模糊C均值(PFCM)和改进型模糊C均值(RFCM)，并提出成对约束改进型模糊C均值算法(PC-RFCM)，在全局输出相似度加权基础上融入局部成对约束，增强模糊边界判别能力。在后件学习阶段，以L2正则化的交叉熵损失为目标函数，优化TSK规则后件权重。在12个UCI标准数据集上实验，与多种经典分类器及模糊方法对比，KGFRC综合性能优于所有对比算法，统计检验中平均排名最优。

关键词

模糊规则分类器，知识引导，成对约束，TSK模糊系统

A Knowledge-Guided Fuzzy Rule Classifier Based on Output Space Information

Yihua Ma, Daqing Zhang*

School of Science, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning

Received: October 11, 2026; accepted: November 4, 2026; published: November 17, 2026

Abstract

Traditional fuzzy rule classifiers often rely on unsupervised clustering for antecedent partitioning, failing to fully exploit the discriminative information in the output space, which limits their classification performance and generalization ability. To address this issue, this paper proposes a knowledge-guided fuzzy rule classifier framework (KGFRC), which integrates output-space knowledge-guided discriminative fuzzy partitioning with consequent rule learning into a two-stage supervised learning

*通讯作者。

文章引用: 马艺华, 张大庆. 基于输出空间知识引导的模糊规则分类器[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 152-166.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511439

paradigm. In the fuzzy partitioning stage, two strategies are introduced: proximity fuzzy C-means (PFCM) and refined fuzzy C-means (RFCM). Furthermore, a pairwise constraint-based refined fuzzy C-means algorithm (PC-RFCM) is proposed, which incorporates local pairwise constraints into global output-similarity weighting to enhance the discriminative ability of fuzzy boundaries. In the consequent learning stage, a cross-entropy loss with L2 regularization is adopted as the objective function to optimize the consequent weights of TSK rules. Experiments are conducted on 12 UCI standard datasets, comparing the proposed method with various classical classifiers and fuzzy methods. The results demonstrate that KGFRC outperforms all comparison algorithms in overall performance, and the proposed method achieves the best average rank in the statistical tests.

Keywords

Fuzzy Rule Classifier, Knowledge-Guided, Pairwise Constraints, TSK Fuzzy System

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

由于测量不准确、环境变化和信息丢失等因素，现实数据常具不确定性与模糊性。模糊系统能有效处理复杂数据，并具可解释推理能力，已广泛用于决策支持[1]、故障检测[2]和医疗诊断[3]等领域。为拓展经典模糊系统，研究者引入了多种扩展与广义模型。

自 1965 年 Zadeh [4]创立模糊集理论以来，模糊系统发展出 Mamdani 型[5]、TSK 型[6]及 Wang-Mendel 方法[7]等代表性模型，形成以语言规则为核心、兼具可解释性与数值拟合能力的建模体系。然而，其前件构造即模糊划分，仍是制约性能的主要瓶颈。在模糊规则系统中，模糊划分是关键环节。传统前件构造多依赖无监督聚类[8]，仅利用输入特征分布，无法区分输入输出角色，也难以反映二者关系。例如，Zhou X 等[9]的 MGCGF 虽能揭示层次结构，Zhou C 等[10]的 TC-KMeans 虽能识别任意形状簇，但均只关注输入空间，未引入输出信息。这种划分方式使模糊规则难以贴合真实类别边界，限制了分类器判别能力。因此，如何借助输出空间知识引导输入空间模糊划分，是本文要解决的核心问题。

为此，本文首次将 Shen 等[11]的 RFCM 与 PFCM 引入分类任务，构建统一的输出空间知识引导模糊规则分类器框架(KGFRC)，并围绕前件划分策略开展实验分析。主要工作有：(1) 设计两阶段监督学习范式下的 KGFRC，融合输出空间引导的模糊划分与交叉熵后件优化；(2) 提出融合成对约束的 PC-RFCM，在 RFCM 全局输出相似度加权基础上引入局部成对约束，增强模糊划分判别性；(3) 在统一框架下系统对比 RFCM 与 PC-RFCM，分析不同监督信息对分类性能的影响。

前件划分决定了规则的空间结构，而规则后件的学习与分类器整体设计则直接影响最终判别性能。基于划分策略可构建模糊规则分类器。ANFIS-L [12]利用自适应网络与混合学习统一优化前件和后件；GFSboost [13]按样本权重生成加权模糊规则；FH-GBML [14]在遗传算法框架下混合编码，平衡全局与局部搜索；MOEFC [15]采用多目标进化优化，在准确率与规则数间给出 Pareto 折中；HID-TSK [16]构建深层堆叠 TSK，逐层传递输出并共享语言规则以维持可解释性。此外，随机树、随机森林、线性核与高斯核支持向量机、K 近邻及朴素贝叶斯等经典非模糊分类器仍广泛用作基准。本文实验将与上述方法进行系统比较，以全面评估 KGFRC 框架及 PC-RFCM 策略的分类性能。

本文其余部分的结构如下。在第二节中，详细介绍了所提出的模型。在第三节中，利用 UCI 数据集对本文模型进行评估以及统计分析。最后，第四节对本研究进行了总结。

2. 方法论

本章阐述知识引导模糊规则分类器(KGFRC)的数学原理与算法流程，整体架构如图 1，由四个级联模块构成。(1) 输出空间知识引导的输入空间模糊划分模块：采用 PFCM、RFCM 及引入成对约束的 PC-RFCM，利用标签空间结构信息引导输入空间隶属度生成，使模糊划分蕴含类别判别性，为规则推理提供前件激活强度。(2) 基于交叉熵损失的规则后件参数优化模块：将前件模糊隶属度作为判别特征输入 softmax 线性分类层，通过最小化正则交叉熵损失监督学习后件权重矩阵。(3) 基于 K 近邻的测试样本隶属度推理模块：利用训练样本隶属度分布与 K 近邻加权策略，在不重新聚类下计算测试样本隶属度并完成类别预测。本章后续内容将对上述模块逐一展开详细论述。

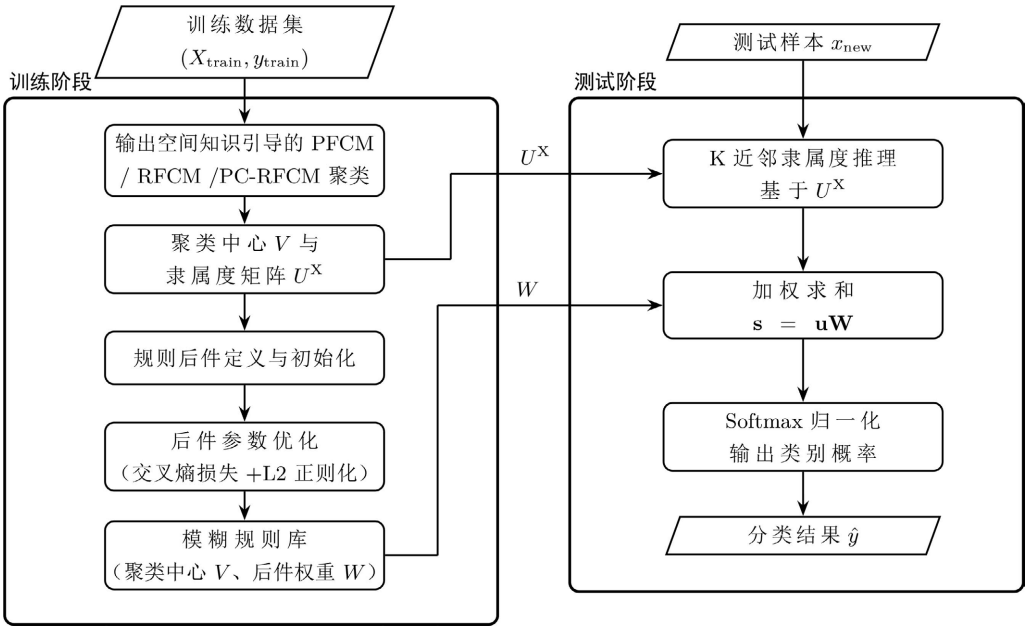


Figure 1. Diagram architecture of the KGFRC model
图 1. 模型 KGFRC 架构图

2.1. 问题定义与框架

给定训练数据集 $D=\{(x_k,y_k)\mid k=1,2,\cdots N\}$，其中，$x_k\in \mathrm{R}^d$ 为 d 维输入特征向量，y_k 为样本对应的类别标签，取值于类别集合 $\{1,2,\cdots,C\}$。本文提出的 KGFRC 模型，核心是构建一个包含 R 条模糊规则的 TSK 型模糊推理系统，其中第 i 条规则 $(i=1,2,\cdots,R)$ 对应输入特征空间中的一个模糊子集，其原型记为 $v_i\in \mathrm{R}^d$。

对于任意输入样本 x，模型首先通过模糊划分机制，计算样本对各条规则的隶属度向量：$u(x)=\left[u_1(x),u_2(x),\cdots,u_R(x)\right]^{\mathrm{T}}$，其中隶属度满足非负性与归一化约束：

$$u_i(\boldsymbol{x})\geq 0\left(\forall i\in\{1,2,\cdots,R\}\right)，且\ \sum_{i=1}^{R}u_i(\boldsymbol{x})=1 \tag{1}$$

其中：$u_i(x)$ 表征了输入样本 x 与第 i 条规则原型中心 v_i 的匹配程度。为便于后续模糊划分算法的推导，

将训练集上所有样本的隶属度向量按列排列，构成输入空间隶属度矩阵$U^X \in [0,1]^{R\times N}$。其元素$u_{i,k}^X$定义为第$k$个训练样本$x_k$对第$i$条规则的隶属度，即$u_{i,k}^X = u_i(\mathbf{x}_k)$，且满足$\sum_{i=1}^R u_{i,k}^X = 1$。在后续聚类算法推导中，均以此符号进行公式化描述。本模型采用一种面向分类任务的零阶 TSK 型模糊规则。传统零阶 TSK 规则的后件为常数标量，本文将其扩展为类别权重向量，以适配分类问题。记第i条规则对应的输入空间模糊区域为大写A_i，其隶属度函数为$\mu_{A_i}(x) = u_i(x)$。第i条规则的符号化形式定义为：

$$\text{Rule } i: \text{If } x \text{ is } A_i, \text{ Then } \mathbf{z}_i = \left[w_{i,1}, w_{i,2}, \cdots, w_{i,C}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式中，$\mathbf{z}_i$为第i条规则的输出向量。其中：$w_{i,c}$为第i条规则对应第c个类别的可训练常数权重参数，所有规则的权重构成可训练后件参数矩阵$W \in \mathrm{R}^{R\times C}$。模型通过线性加权聚合所有规则的输出，得到输入样本x对应各类别的决策得分向量：

$$z(x) = \sum_{i=1}^R u_i(x) z_i = W^{\mathrm{T}} u(x) \tag{3}$$

综上，KGFRC 模型的数学符号体系与模糊规则形式已完成定义。在此基础上，前件隶属度矩阵U^X的三种生成策略、后件权重矩阵W的优化及面向测试样本的推理方法，将在后续各节详细展开。

2.2. 输入空间划分策略

为了在模糊划分中融入输出空间的知识引导，本文首次将 Shen 等人[11]提出的两种策略：邻近度模糊 C 均值(PFCM)与改进型模糊 C 均值(RFCM)引入分类任务。两者均基于输出空间的邻近度信息调整输入空间的隶属度分布，但实现方式不同。

在分类问题中，输出标签是离散的类别符号。为了获得连续可微的邻近度度量，本文将类别标签直接映射为数值标识，即：将第c类$(c = 1,\cdots,C)$映射为实数c。于是，每个样本k对应的输出值$y_k = c$，即其类别编号。将该一维数值序列视为输出空间中的样本点，并在数值区间$[1,C]$内等间距地取C个固定参考点$r_i = i$ $(i = 1,\cdots,C)$。然后，按下式计算样本k对参考点r_i的模糊隶属度：

$$u_{i,k}^Y = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{|y_{k-r_i}|}{|y_{k-r_j}|}\right)^{\frac{2}{m-1}}}, i = 1,2,\cdots,C. \tag{4}$$

其中$m > 1$为模糊指数。该公式与模糊 C 均值聚类中计算隶属度的方式一致，但此处参考点是固定的，不进行迭代更新。由于同类样本的y_k值相等，异类样本的y_k值不同，而参考点正好对齐了各类的数值，因此同类样本的隶属度向量趋于一致，异类样本的隶属度向量则指向不同的参考点。由此，我们得到了一个连续的输出空间隶属度矩阵$U^Y \in [0,1]^{C\times N}$。基于$U^Y$，定义输出邻近度矩阵$PY$以及二值矩阵：

$$PY(k_1,k_2) = \sum_{i=1}^C \left(u_{i,k_1}^Y \wedge u_{i,k_2}^Y\right), k_1,k_2 = 1,\cdots,N \tag{5}$$

$$BY(k_1,k_2) = \begin{cases} 1, & \text{若 } PY(k_1,k_2) < \tau, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \tag{6}$$

其中，$\wedge$表示取小运算，$u_{i,k_1}^Y \wedge u_{i,k_2}^Y = \min\left(u_{i,k_1}^Y, u_{i,k_2}^Y\right)$，该运算在后续梯度更新中采用分段导数进行处理，具体详见文献[11]，τ为预设阈值。计算可知，同类样本的PY接近 1，异类样本的PY接近 0，因此，$BY = 1$标记了那些属于不同类别的样本对，即输出空间中“远离”的样本对，应在输入空间中为其施加分离约束。上述构造将离散的类别标签成功转化为连续的PY和BY，使得 PFCM 中的梯度下降和 RFCM 中的惩罚系数计算在分类问题中仍然有效。

PFCM 策略直接修正输入空间的隶属度矩阵 U^X，该修正通过最小化以下目标函数实现：

$$V=\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\left(PX\left(k_1,k_2\right)-PY\left(k_1,k_2\right)\right)^2 BY\left(k_1,k_2\right) \tag{7}$$

其中：$PX\left(k_1,k_2\right)=\sum_{i=1}^{R}\left(u_{i,k_1}^X\wedge u_{i,k_2}^X\right)$。采用梯度下降法更新 U^X，并交替更新聚类中心 v_i。RFCM 策略通过惩罚距离实现知识引导，优化目标为：

$$Q_{RFCM}=\sum_{i=1}^{R}\sum_{k=1}^{N}\left(u_{i,k}^X\right)^m \beta_{i,k}\left\|x_k-v_i\right\|^2 \tag{8}$$

其中：$\beta_{i,k}\geq 1$ 为惩罚系数，根据不兼容样本在各聚类中的分布计算。设不兼容样本中隶属于第 i 个聚类的数量为 $C_{i,k}$，主要分为两种方式：赢家通吃 RFCM(a)与非赢家通吃 RFCM(b)。基于从两种设计选项之一得到的惩罚系数，进一步使用拉格朗日方法得到划分矩阵 U^X 或原型 v_i 的公式，以在固定原型或划分矩阵时最小化 Q_{RFCM}，得到如下隶属度与聚类中心的更新公式：

$$u_{i,k}^X=\frac{1}{\sum_{j=1}^{R}\left(\dfrac{\beta_{i,k}\left\|x_k-v_i\right\|^2}{\beta_{j,k}\left\|x_k-v_j\right\|^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}},\quad v_i=\frac{\sum_{k=1}^{N}\left(u_{i,k}^X\right)^m \beta_{i,k}x_k}{\sum_{k=1}^{N}\left(u_{i,k}^X\right)^m \beta_{i,k}} \tag{9}$$

上述更新公式通过交替迭代直至收敛，得到最终的隶属度矩阵 U^X 和聚类中心 V。

2.3. 基于成对约束的 PC-RFCM 改进策略

本节在 RFCM 策略的基础上，进一步引入成对约束机制，提出 PC-RFCM 方法。成对约束最早由 Wagstaff 等人[17]引入聚类领域，提出了约束 K-means。受此启发，为了进一步增强知识引导聚类对监督信息的利用能力，本文将输出空间的全局结构信息与局部的成对约束相结合。该方法利用训练数据的类别标签生成约束集合：若两样本标签相同，则构成 must-link 约束；若标签不同，则构成 cannot-link 约束。通过将这些约束转化为对隶属度向量的推拉操作，实现对隶属度分布的修正。该约束信息与原始 RFCM 中的模糊邻近性知识(PY/BY)形成互补，从而更有效地指导输入空间的判别性划分。

与原始方法仅依赖输出空间模糊聚类导出的 BY 矩阵不同，成对约束来自训练数据的类别标签，能够提供更明确的必须相连或必须分离的语义。我们从训练数据中随机采样一定数量的 must-link 和 cannot-link 对，分别构成集合 ML 和 CL。

在 RFCM 的第 t 次迭代中，先由当前聚类中心 $V^{(t)}$ 和惩罚系数 $\beta^{(t)}$，通过解析公式得到未添加成对约束的隶属度矩阵 $U^{X(t)}=\left[u_{ik}^{X(t)}\right]\in \mathrm{R}^{R\times N}$，其中 N 为样本数，R 为规则数。随后，利用从训练标签中生成的成对约束集合，对 $U^{X(t)}$ 进行修正。设 Must-Link 约束集合为 $\mathrm{ML}=\left\{(p,q)\mid y_p=y_q\right\}$，Cannot-Link 约束集合为 $\mathrm{CL}=\left\{(p,q)\mid y_p\neq y_q\right\}$，给定步长参数 $\eta>0$，修正操作以行为单位更新隶属度向量：

Must-Link 修正(拉近)：

对每一对 $\forall(p,q)\in \mathrm{ML}$ 和每一条规则 $i=1,\cdots,R$：

$$\begin{aligned}u_{ip}^{X(t)}&\leftarrow u_{ip}^{X(t)}-\eta\left(u_{ip}^{X(t)}-u_{iq}^{X(t)}\right)\\ u_{iq}^{X(t)}&\leftarrow u_{iq}^{X(t)}+\eta\left(u_{ip}^{X(t)}-u_{iq}^{X(t)}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

Cannot-Link 修正(推远)：

对每一对 $\forall(p,q)\in \mathrm{CL}$ 和每一条规则 $i=1,\cdots,R$：

$$u_{ip}^{X(t)} \leftarrow u_{ip}^{X(t)} + \eta\left(u_{ip}^{X(t)} - u_{iq}^{X(t)}\right)$$
$$u_{iq}^{X(t)} \leftarrow u_{iq}^{X(t)} - \eta\left(u_{ip}^{X(t)} - u_{iq}^{X(t)}\right) \tag{11}$$

修正完成后，对每个样本 K 执行非负截断与归一化，以保证隶属度矩阵的有效性：

$$u_{ik}^{X(t)} \leftarrow \frac{\max\left(0, u_{ik}^{X(t)}\right)}{\sum_{j=1}^{R} \max\left(0, u_{jk}^{X(t)}\right)}, i = 1, \cdots, R \tag{12}$$

其中：$u_{ik}^{X(t)}$ 第 k 个样本对第 i 条模糊规则的隶属度。记修正后的隶属度矩阵为 $\tilde{U}^{X(t)}$，最后使用 $\tilde{U}^{X(t)}$ 替代原始 $U^{X(t)}$，更新聚类中心 $V^{(t+1)}$。

$$\mathbf{v}_i^{(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\tilde{u}_{ik}^{X(t)}\right)^m \beta_{i,k}\mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^{N}\left(\tilde{u}_{ik}^{X(t)}\right)^m \beta_{i,k}}, i = 1, \cdots, R \tag{13}$$

上述修正公式直接将类别信息转化为对隶属度向量的推拉操作，强制使同类样本的隶属度分布趋于一致，异类样本的隶属度分布趋于分离，从而在不修改目标函数的条件下增强了模糊分区的判别性。这一扩展具有以下优点：保留 RFCM 原有的距离惩罚机制，仅增加轻量级的后处理步骤；有效利用分类任务中的标签信息，进一步提升聚类质量与最终分类精度。

2.4. 基于交叉熵损失的后件参数优化

前两节完成了输出空间知识引导的输入空间模糊划分，获得隶属度矩阵 U^X 与聚类中心 V。本节详述如何利用 U^X 进行规则后件参数的监督学习。当通过 2.1 节所述的线性加权聚合得到决策得分向量 $z(x)$后，为将其转换为符合概率解释的类别隶属度，本文采用 softmax 函数进行归一化。归一化结果须满足两个条件：(1) 所有元素之和为 1；(2) 每个元素非负。softmax 变换后的最终输出概率向量为：

$$\begin{aligned} p(x) &= \left[p_1,(x), p_2(x), \cdots, p_c(x)\right] \\ &= \left[\mathrm{softmax}\left(z_1(x)\right), \mathrm{softmax}\left(z_2(x)\right), \cdots, \mathrm{softmax}\left(z_c(x)\right)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

其中，$p_c(x)$ 表示样本 x 属于第 c 类的概率。计算公式为：

$$p_c(x) = \mathrm{softmax}\left(z_c(x)\right) = \frac{\mathrm{e}^{z_c(x)}}{\sum_{j=1}^{C}\mathrm{e}^{z_j(x)}}, c = 1, 2, \cdots, C \tag{15}$$

当获得样本 x 对所有类别的概率，预测类别即取最大概率所对应的类别：

$$\hat{y} = \arg\max_{c\in\{1,\cdots,C\}} p_c(x) \tag{16}$$

为了有效训练模型并提高其泛化能力，本文采用交叉熵误差函数[18]作为优化目标，并引入 L2 正则化项[19]以缓解过拟合风险。设训练集包含 N 个样本，第 k 个样本的真实标签用独热编码向量 $y_k = \left[y_{k,1}, y_{k,2}, \cdots, y_{k,C}\right]^{\mathrm{T}}$ 表示，模型通过 softmax 输出的预测概率向量为 $p(x_k) = \left[p_1(x_k), p_2(x_k), \cdots, p_C(x_k)\right]^{\mathrm{T}}$。定义模型的总损失函数为交叉熵损失与正则化项之和：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CE} + \mathcal{L}_{reg} = -\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{c=1}^{C} y_{k,c}\log p_c(x_k) + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{R}\sum_{c=1}^{C} w_{i,c}^2 \tag{17}$$

其中：N 为训练样本总数，C 为类别总数，$y_{k,c}$ 为第 k 个样本真实标签的独热编码分量，$p_c(x_k)$ 为模型对样本 x_k 预测属于类别 c 的概率。$\lambda > 0$ 为正则化参数，用于控制 L2 正则化的强度，R 为模糊规则数，$w_{i,c}$

为第 i 条规则对应第 c 个类别的权重参数。模型训练的目标是最小化总损失 $\mathcal{L}$，本文使用 Pyomo 建模语言调用 IPOPT 非线性规划求解器对目标函数进行优化求解。Pyomo 能够直接声明变量、目标函数和约束，IPOPT 则利用内点法高效求解连续非线性优化问题。

在训练阶段，首先通过输出空间知识引导的模糊聚类策略获得隶属度矩阵 U^X，随后固定 U^X，后件权重矩阵 W 在优化前初始化为零矩阵，并通过极小化带正则项的交叉熵损失函数对其进行优化求解。

2.5. 基于 K 近邻的隶属度推理机制

在模型训练阶段，通过 PFCM、RFCM 或 PC-RFCM 策略获得了训练样本的隶属度矩阵 $U^X \in \mathrm{R}^{R\times N}$，其中，$R$ 为规则数，N 为训练样本数，元素 $u_{i,k}^X$ 表示训练样本 x_k 对第 i 条规则的隶属度。由于 PFCM 策略最终依赖内部循环调整后的 U^X，且 RFCM 策略无法直接获取新样本的惩罚系数，因此无法通过聚类中心的欧氏距离直接计算新样本的隶属度。为此，本文采用 K 近邻(KNN)方法估计新样本的隶属度。

对于测试阶段的新样本 $\mathbf{x}_{new}$，首先在训练集 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N\}$ 中寻找与其距离最近的 K 个样本。距离度量采用标准欧氏距离：

$$d_k = \left\|\mathbf{x}_{new}-\mathbf{x}_k\right\|_2, k=1,2,\cdots,N. \tag{18}$$

将这 K 个最近邻样本记为 $\tilde{\mathbf{x}}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2,\cdots,\tilde{\mathbf{x}}_K$，对应的下标集合为 $\mathcal{N}_K$。由训练阶段已知这些近邻样本对第 i 条规则的隶属度，记为：$\mu_{A_i}\left(\tilde{\mathbf{x}}_j\right)=u_{i,\tilde{\mathbf{x}}_j}^X$，其中 $u_{i,\tilde{\mathbf{x}}_j}^X$ 为训练阶段获得的隶属度矩阵 U^X 中对应元素。为反映不同近邻对估计的贡献差异，依据距离倒数确定权重，使得距离越近的样本贡献越大：

$$\omega_j = \frac{1/d\left(\tilde{\mathbf{x}}_j\right)}{\sum_{s=1}^{K}1/d\left(\tilde{\mathbf{x}}_s\right)}, j=1,2,\cdots,K. \tag{19}$$

其中，$d\left(\tilde{\mathbf{x}}_j\right)=\left\|\mathbf{x}_{new}-\tilde{\mathbf{x}}_j\right\|_2$。故新样本 $\mathbf{x}_{new}$ 对第 i 条规则的隶属度表示为上述 K 个近邻隶属度的加权平均：

$$\mu_{A_i}\left(\mathbf{x}_{new}\right)=\sum_{j=1}^{K}\omega_j\,\mu_{A_i}\left(\tilde{\mathbf{x}}_j\right), i=1,2,\cdots,R. \tag{20}$$

训练与测试隶属度生成机制不一致：训练经全局聚类、输出空间惩罚及成对约束优化；测试用 KNN 局部加权插值，未参与全局优化。这种机制差异可能导致测试阶段隶属度分布偏移，使后件权重 W 作用于分布外样本；同时训练阶段的惩罚系数与成对约束信息无法直接复用，易造成决策边界偏移，提升模型对噪声与类别不平衡的敏感性。此外，KNN 加权得到的隶属度不再直接对应规则原型，规则激活的可解释性有所下降；但该误差上界较宽松，实际影响总体可控。综上，不一致性虽在理论层面存在，但对最终分类性能的负面影响有限。

3. 实验结果与分析

在本节中，我们将对所提出的基于输出空间知识引导的模糊规则分类器 KGFRC 进行系统性的实验评估。本节内容分为三个部分：第一部分为实验设置，介绍数据集基本统计特性以及评估指标；第二部分为实验结果，评估基线模型的性能，随后验证成对约束改进策略的有效性。最后将所提方法与经典非模糊方法和其它类型模糊方法进行性能对比；第三部分为统计显著性检验，基于 Friedman 检验与 Nemenyi 事后检验对各组对比结果进行统计推断，以验证所观察到性能差异的显著性。

3.1. 实验设置

3.1.1. 数据集介绍

为了全面评估模型的分类性能，本文选取 12 个来自 UCI 机器学习库的公开基准数据集，涵盖二分

类与多分类任务，且样本规模、特征维度及类别分布各不相同。表 1 展现了 12 个数据集的基础统计信息。

3.1.2. 评估指标

为保证实验的公平性与可复现性，所有实验均在统一的环境下进行。模型评价指标包括准确率(CA)、F1 分数以及曲线下面积(AUC)。具体公式如下：

$$\mathrm{CA}=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(y_i=\hat{y}_i\right)\right)\times 100\% \tag{21}$$

$$\mathrm{F1}_{\mathrm{macro}}=\frac{1}{L}\sum_{c=1}^{L}\left(2\cdot\frac{P_c\cdot R_c}{P_c+R_c}\right)\times 100\% \tag{22}$$

$$\mathrm{AUC}=\frac{1}{N_+N_-}\sum_{i=1}^{N_+}\sum_{j=1}^{N_-} f\left(p_i^+ > p_j^-\right) \tag{23}$$

其中，N 为样本总数；y_i 为第 i 个样本的真实类别标签；$\hat{y}_i$ 为第 i 个样本的预测类别标签；f 为指示函数，当括号内条件成立时取值为 1，否则为 0。L 为类别总数，P_c 和 R_c 分别是第 c 类的精确率和召回率。

N_+和 N_-分别是正类与负类样本的总数，p_i^+ 为第 i 个正类样本通过模型预测得到的属于正类的概率值，p_j^- 为第 j 个负类样本通过模型预测得到的属于正类的概率值。

Table 1. Basic information of the benchmark datasets
表 1. 基准数据集信息

数据集全称	特征数	类别数	总样本数
Australian Credit Approval (AUS)	14	2	690
Balance Scale (BAL)	4	3	625
Blood Transfusion Service Center (BTS)	4	2	748
Cleveland Heart Disease (CLE)	13	5	303
Iris Plants (IRI)	4	3	150
Liver Disorders (LIV)	6	2	345
Sonar, Mines vs. Rocks (SON)	60	2	208
Wisconsin Diagnostic Breast Cancer (WDB)	30	2	569
Wine Recognition (WIN)	13	3	178
Wisconsin Prognostic Breast Cancer (WPBC)	33	2	198
Seismic Bumps (SEI)	18	2	2584
Spambase (Spam)	57	2	4601

3.2. 实验结果

在实验中，采用了两组对比方法对所提模型的性能进行评估。第一组为经典的非模糊分类器，包括随机树(TREE)、随机森林(FOREST)、线性核支持向量机(L-SVM)、高斯核支持向量机(G-SVM)、K 近邻(KNN)以及朴素贝叶斯(NB)。第二组为其他类型的模糊分类器，包括 FH-GBML、GFSboost、ANFIS-L、MOEFC 及 HID-TSK 方法。以上对比方法的参数设置说明如下。对于 GFSboost [14]、FH-GBML [15]、HID-TSK [16]，其参数设置遵循各方法原始文献的建议；L-SVM 与 G-SVM 的参数采用网格搜索确定。ANFIS-L [13]的隶属度函数为高斯型，每个特征的隶属度函数数量在[2] [5]范围内搜索。对于 KNN、TREE

方法参数的调节遵循论文[20]。FOREST、NB 参数设置按照论文[21]，MOEFC 参数按文献[22]设置。对于本文提出的 KGFRC 模型，对于 PFCM 和 RFCM 方法的参数根据论文[11]进行调整，包括：模糊规则数 R、模糊指数 m、输出空间阈值 τ 、梯度下降学习率 α 等。输出的聚类数遵循数据集的类别数，正则化参数 $\lambda \in [0.0005, 0.5]$。测试阶段近邻数 K 用于隶属度推理，其取值通过网格搜索确定。

3.2.1. 数据集介绍

为验证本文所提出的知识引导模糊规则分类器(KGFRC)的有效性，选取 12 个来自 UCI 数据库的标准数据集进行实验。所有对比方法均采用五折交叉验证进行测试与评估。采用多项评价指标对模型性能进行全面评估。在输入空间划分阶段，分别比较基准方法 PFCM、RFCM(a)与 RFCM(b)三种知识引导策略，实验统一采用 RFCM(b)策略作为输入空间的划分方法，该策略在多数数据集上表现出较好的稳定性与判别性能，实验结果以表格形式呈现，表 2 给出了 RFCM(b)。策略在数据集上的基准性能评估结果，各评价指标以均值 ± 标准差(mean ± std)的形式给出。

Table 2. Baseline model performance evaluation results (mean ± std)
表 2. 基准模型性能评估结果(mean ± std)

数据集	测试准确率	F1 分数	AUC
AUS	83.91 ± 1.88	83.45 ± 2.07	91.45 ± 1.94
BAL	86.40 ± 1.50	60.49 ± 0.91	89.92 ± 0.62
BTS	76.20 ± 1.72	60.59 ± 4.32	68.08 ± 4.36
CLE	60.28 ± 3.03	32.34 ± 4.64	77.72 ± 4.01
IRI	94.67 ± 6.91	94.59 ± 7.07	99.27 ± 0.89
LIV	59.71 ± 6.75	55.92 ± 7.31	65.16 ± 6.48
SON	80.78 ± 2.93	80.36 ± 3.04	92.30 ± 4.35
WDB	95.96 ± 2.29	95.56 ± 2.57	99.04 ± 0.94
WIN	97.19 ± 2.82	97.26 ± 2.79	99.84 ± 0.36
WPB	76.77 ± 4.52	60.51 ± 7.42	58.29 ± 4.80
SEI	93.42 ± 0.13	48.87 ± 1.30	75.00 ± 3.80
Spam	91.72 ± 1.00	91.15 ± 1.21	96.10 ± 1.08

实验表明，KGFRC 在 12 个 UCI 数据集上性能稳定、泛化良好。SON (60 维，208 样本)上准确率 80.77%、AUC 92.30%，验证了高维小样本判别能力；CLE 多类不均衡下准确率 60.28%、AUC 77.72%，仍具排序能力；IRI、WIN、WDB 准确率均超 94%，WIN 达 97.19%。Spam 上准确率 91.72%、AUC 96.10%，表明复杂二分类下依然稳定。总体而言，KGFRC 在多数数据集上表现良好，尤其在高维小样本多分类场景验证了输出空间知识引导的有效性，但类别不平衡和低判别力数据仍有优化空间。

3.2.2. 成对约束改进的有效性验证

为验证提出的成对约束改进策略的有效性，本节在相同实验条件下，以原始 RFCM(b)策略为基线，与引入成对约束的 PC-RFCM(b)策略进行对比。实验采用五折交叉验证，评估指标为分类准确率，结果以均值 ± 标准差(mean ± std)的形式给出，具体结果见表 3。两种策略共用相同的模糊划分参数，PC-RFCM 额外引入的成对约束总数量 n_c 和约束强度 η 通过网格搜索确定，其中 $n_c \in [10,100]$， $\eta \in [0.1,1]$。

与原始模型相比，引入成对约束后的改进模型在 12 个数据集上均表现出性能提升或持平：在 11 个

数据集上测试准确率得到提高，提升幅度介于 0.53%至 4.35%之间，平均提升约 1.61 个百分点；在 SEI 数据集上二者准确率相同。特别地，在原始准确率较低的 LIV 和 SON 数据集上，提升幅度分别达 4.35%和 2.90%，表明成对约束策略对弱基线的增益更为突出。在已具备较高准确率的 WDB 和 Spam 数据集上，提升幅度较小，符合性能饱和预期。同时，改进模型在多数数据集上的标准差未显著扩大，部分数据集的标准差甚至有所减小，说明成对约束机制的引入未损害模型的稳定性。上述结果表明，成对约束策略能够普遍增强模型分类精度，具有良好的泛化性能和鲁棒性。

Table 3. Model evaluation results after pairwise constraint improvement (mean ± std)
表 3. 成对约束改进后的模型评估结果(mean ± std)

数据集	原始模型测试准确率	成对约束改进后模型测试准确率	提升结果
AUS	83.91 ± 1.88	85.22 ± 2.36	+1.31
BAL	86.40 ± 1.50	88.96 ± 0.78	+2.56
BTS	76.20 ± 1.72	77.67 ± 2.14	+1.47
CLE	60.28 ± 3.03	61.61 ± 2.06	+1.33
IRI	94.67 ± 6.91	96.67 ± 2.98	+2.00
LIV	59.71 ± 6.75	64.06 ± 6.94	+4.35
SON	80.78 ± 2.93	83.68 ± 5.90	+2.90
WDB	95.96 ± 2.29	96.49 ± 1.84	+0.53
WIN	97.19 ± 2.82	98.30 ± 2.28	+1.11
WPB	76.77 ± 4.52	77.78 ± 3.68	+1.01
SEI	93.42 ± 0.13	93.42 ± 0.13	---------
Spam	91.72 ± 1.00	92.50 ± 0.43	+0.78

Table 4. Comparison results with classical non-fuzzy methods (mean ± std)
表 4. 本方法与经典的非模糊方法的比较结果(mean ± std)

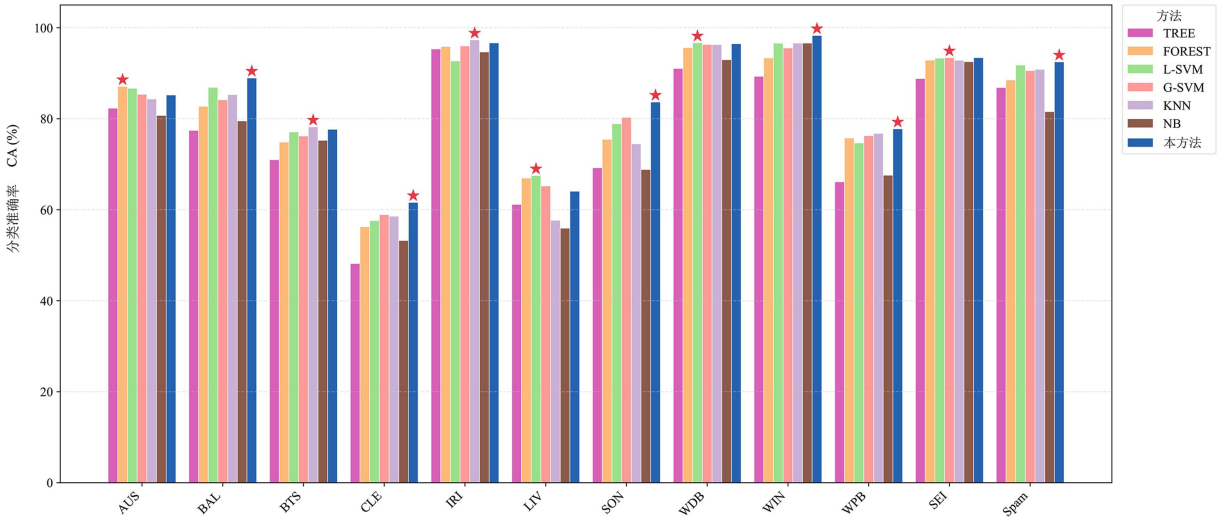
数据集	TREE	FOREST	L-SVM	G-SVM	KNN	NB	本方法
AUS	82.32 ± 3.42	**87.10 ± 3.41**	86.70 ± 2.80	85.36 ± 3.09	84.35 ± 2.96	80.72 ± 2.18	85.22 ± 2.36
BAL	77.44 ± 2.17	82.72 ± 2.71	86.90 ± 1.90	84.16 ± 1.85	85.28 ± 2.12	79.52 ± 3.87	**88.96 ± 0.78**
BTS	70.99 ± 2.73	74.87 ± 3.05	77.10 ± 1.50	76.20 ± 0.61	**78.21 ± 2.75**	75.26 ± 2.65	77.67 ± 2.14
CLE	48.18 ± 5.32	56.25 ± 4.88	57.60 ± 3.00	58.92 ± 3.55	58.58 ± 1.79	53.23 ± 6.08	**61.61 ± 2.06**
IRI	95.33 ± 3.40	95.87 ± 3.17	92.70 ± 5.30	96.00 ± 3.89	**97.33 ± 2.49**	94.67 ± 4.00	96.67 ± 2.98
LIV	61.16 ± 3.82	66.96 ± 4.80	**67.50 ± 7.90**	65.22 ± 1.59	57.68 ± 5.14	55.94 ± 11.97	64.06 ± 6.94
SON	69.22 ± 2.45	75.48 ± 3.85	78.90 ± 4.80	80.30 ± 3.46	74.49 ± 3.45	68.83 ± 8.21	**83.68 ± 5.90**
WDB	91.04 ± 2.79	95.61 ± 1.23	**96.70 ± 1.30**	96.31 ± 2.17	96.31 ± 1.79	92.97 ± 1.99	96.49 ± 1.84
WIN	89.32 ± 3.80	93.35 ± 2.85	96.60 ± 2.10	95.54 ± 2.82	96.62 ± 2.11	96.62 ± 3.11	**98.30 ± 2.28**
WPB	66.12 ± 5.94	75.76 ± 1.22	74.68 ± 7.58	76.27 ± 1.06	76.77 ± 4.05	67.59 ± 7.61	**77.78 ± 3.68**
SEI	88.82 ± 0.60	92.88 ± 0.20	93.30 ± 0.10	**93.42 ± 0.01**	92.84 ± 0.52	92.53 ± 0.84	93.42 ± 0.13
Spam	86.85 ± 1.27	88.52 ± 0.44	91.80 ± 0.20	90.57 ± 0.52	90.85 ± 0.80	81.55 ± 0.91	**92.50 ± 0.43**

注：粗体表示该指标下的最优结果。

3.2.3. 与经典的非模糊方法对比

本节用于对比的方法，是基于前文研究得出的最优配置，即结合 PC-RFCM 改进策略的 KGFRC 模型，将该方法与 6 种机器学习中的经典的非模糊方法进行对比，包括随机树(TREE)、随机森林(FOREST)、线性核支持向量机(L-SVM)、高斯核支持向量机(G-SVM)、K 近邻(KNN)以及朴素贝叶斯(NB)。评估指标为分类准确率，实验结果在表 4 中呈现，列对应各对比方法的分类准确率，行对应不同数据集。

从整体对比来看，在 12 个 UCI 数据集上，本文提出的 KGFRC 与 6 种经典非模糊方法进行了系统对比。结果表明，KGFRC 在竞争中展现出显著的性能优势。KGFRC 在 BAL、CLE、SON、WIN、WPB、Spam 数据集上取得唯一最优，共获得 6 次最优，优于其他任何单一对比方法。同时，KGFRC 的标准差在多数数据集上处于较低水平，表明其具有良好的泛化稳定性。总体而言，KGFRC 在绝大多数数据集上达到或接近最优水平，验证了所提方法相比经典非模糊方法的有效性和泛化能力。



注：红色星号表示每个数据集上的最优算法。

Figure 2. Comparison of classification accuracy with classical non-fuzzy methods
图 2. 本方法与经典的非模糊方法的准确率比较图

为直观评估本文方法的分类性能及泛化能力，图 2 以柱状图对比了七种算法的准确率，横轴为数据集，纵轴为分类准确率(CA)，红色星号标注各数据集上的最优算法。从图中可见，本文方法在绝大多数数据集上均取得了最高的准确率，尤其在 WIN、WPB、SON 和 BAL 等数据集上优势显著；即便在 BTS、CLE 等难度较高的数据集上，本文方法仍保持最优或与最优性能持平，未出现明显性能衰退。相比之下，传统 TREE 与 NB 算法在多数数据集上准确率偏低，竞争力不足；集成方法 FOREST、L-SVM、G-SVM 与 KNN 虽在个别数据集上表现出色，但缺乏跨数据集的稳定优势。上述结果表明，本文方法在不同数据分布下均能维持领先的分类精度，具有良好的鲁棒性和泛化性能。

3.2.4. 与其他类型的模糊方法对比

将 KGFRC 方法与其他几种类型的模糊方法进行比较，对比结果如表 5 所示。本方法的性能显著优于 FH-GBML、GFSboost、ANFIS-L、MOEFC、HID-TSK 这几种方法。根据表 5 数据，本方法 KGFRC 在 12 个数据集中的 8 个上取得了最高的平均准确率，显著优于 FH-GBML、GFSboost、ANFIS-L、MOEFC 和 HID-TSK 对比方法。尤其在 BAL、WIN、Spam 和 SON 等数据集上，本方法较上述方法领先 5~10 个

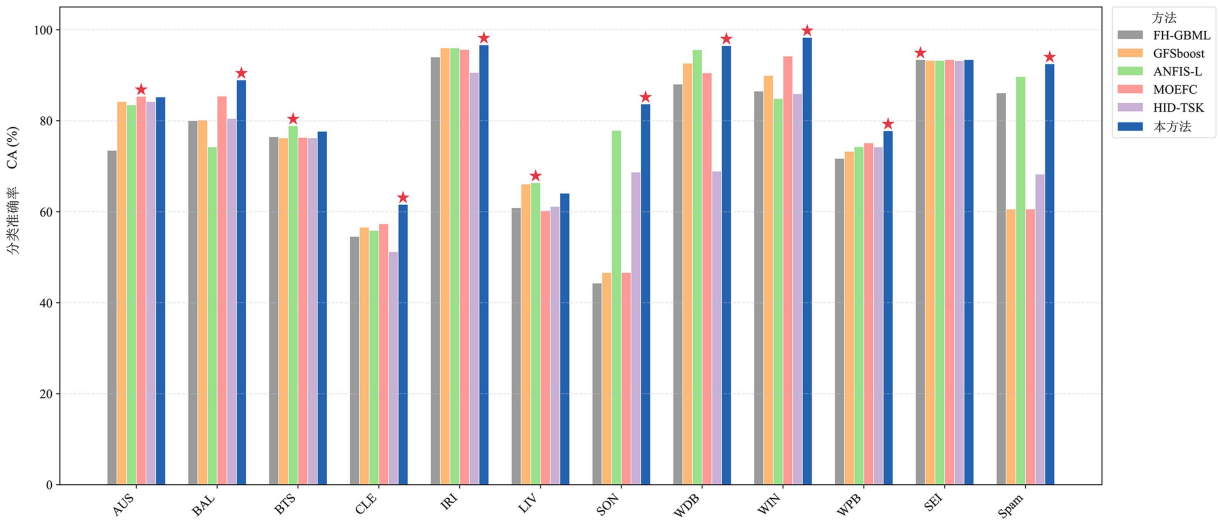
百分点以上；在 AUS、BTS 和 SEI 等数据集上，本方法与最优方法表现基本持平或差距极小，充分体现出较强的泛化能力。在稳定性方面，本方法的标准差整体较小，未见异常波动；相比之下，HID-TSK 在 WDB 和 SON 等数据集上表现出明显的性能震荡，体现了本方法在输出空间知识引导下所具备的鲁棒性。

综上，本方法性能远超五种传统模糊方法，同时模型输出的 softmax 概率，可直接用于不确定性量化。同时，在本方法中，每条模糊规则对应一个可理解的输入空间区域，结论部分为线性函数，整体构成透明决策系统，这也是黑箱模型所无法提供的优势。

Table 5. Comparison results with other types of fuzzy methods (mean ± std)
表 5. 本方法与其他类型的模糊方法的比较结果(mean ± std)

数据集	FH-GBML	GFSboost	ANFIS-L	MOEFC	HID-TSK	本方法
AUS	73.48 ± 1.08	84.20 ± 4.38	83.48 ± 2.44	**85.35 ± 3.03**	84.20 ± 3.85	85.22 ± 2.36
BAL	80.00 ± 2.86	80.16 ± 3.70	74.24 ± 2.34	85.39 ± 1.34	80.48 ± 5.37	**88.96 ± 0.78**
BTS	76.47 ± 0.80	76.20 ± 1.36	**78.88 ± 1.73**	76.33 ± 1.30	76.21 ± 3.91	77.67 ± 2.14
CLE	54.56 ± 3.06	56.59 ± 5.62	55.89 ± 2.05	57.34 ± 2.73	51.22 ± 7.49	**61.61 ± 2.06**
IRI	94.00 ± 3.27	96.00 ± 3.89	96.00 ± 3.89	95.66 ± 2.81	90.60 ± 5.33	**96.67 ± 2.98**
LIV	60.87 ± 4.00	**66.09 ± 5.15**	66.38 ± 5.61	60.23 ± 4.33	61.16 ± 4.04	64.06 ± 6.94
SON	44.31 ± 7.68	46.63 ± 0.90	77.86 ± 4.77	46.63 ± 0.90	68.71 ± 4.32	**83.68 ± 5.90**
WDB	88.04 ± 2.08	92.63 ± 4.17	95.60 ± 1.47	90.51 ± 1.85	68.92 ± 21.82	**96.49 ± 1.84**
WIN	86.51 ± 2.79	89.94 ± 4.80	84.87 ± 5.35	94.19 ± 3.04	85.94 ± 3.64	**98.30 ± 2.28**
WPB	71.71 ± 3.79	73.27 ± 5.45	74.29 ± 6.04	75.11 ± 3.79	74.23 ± 6.37	**77.78 ± 3.68**
SEI	93.42 ± 0.01	93.27 ± 0.31	93.23 ± 0.12	**93.42 ± 0.01**	93.19 ± 0.88	93.42 ± 0.13
Spam	86.11 ± 1.57	60.60 ± 0.05	89.70 ± 0.70	60.60 ± 0.05	68.27 ± 6.08	**92.50 ± 0.43**

注：粗体表示该指标下的最优结果。



注：红色星号表示每个数据集上的最优算法。

Figure 3. Comparison of classification accuracy with other types of fuzzy methods
图 3. 本方法与其他类型的模糊方法的准确率比较图

类似于图 2 的方法，绘制出本方法与其他模糊分类器的对比结果的柱状图，如图 3 所示。可以看出，本文方法在 BAL、CLE、IRI、SON、WDB、WIN、WPB 和 Spam 共 8 个数据集上取得了最高准确率，尤其在 WIN、SON 和 Spam 数据集上优势显著。在 AUS、BTS、LIV 和 SEI 数据集上，本文方法虽未达到最优，但与最优方法的性能差距极小，均控制在 1.2%以内，显示出较强的竞争力。相比之下，FH-GBML 与 HID-TSK 在多数数据集上准确率偏低；GFSboost、ANFIS-L 与 MOEFC 虽在个别数据集上表现突出，但在 SON、Spam 等数据集上出现大幅度性能衰退，跨数据集的稳定性明显不足。上述结果表明，本文方法在绝大多数数据分布下均能取得最优或接近最优的分类精度，展现出良好的鲁棒性与泛化性能。

3.3. 统计显著性检验

为了对提出的方法与其他方法进行严谨的比较，对模型进行统计显著性分析。首先计算所有数据集上被比较方法的平均排名，然后基于排名结果进行 Friedman 检验和 Nemenyi 事后检验[23]。Friedman 检验的统计量 F_F 按下式计算：

$$F_F = \frac{(N-1)\chi_F^2}{N(K-1)-\chi_F^2} \tag{24}$$

其中，N 和 K 分别表示数据集的个数和被比较的方法数，χ_F^2 的计算公式为：

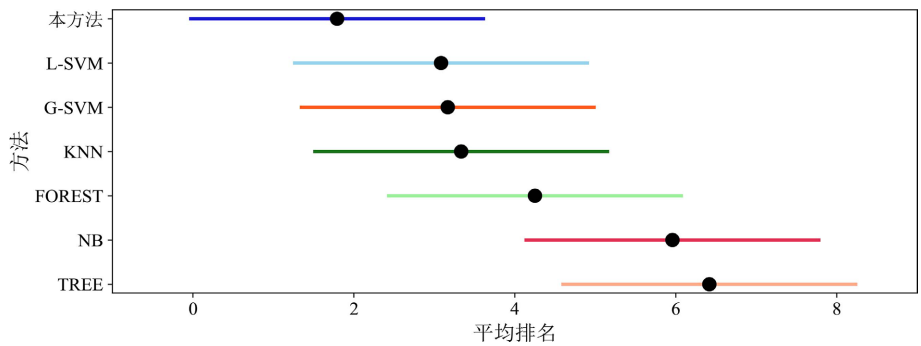
$$\chi_F^2 = \frac{12N}{K(K+1)}\left(\sum_{i=1}^{K} r_i^2 - \frac{K(K+1)^2}{4}\right) \tag{25}$$

这里 r_i 表示第 i 种方法在所有 N 个数据集上的平均排名。如果 Friedman 检验的结果拒绝了“所有被比较方法具有相同性能”的原假设，则表明所选方法之间存在显著的性能差异。随后，采用 Nemenyi 事后检验进一步比较这些方法。Nemenyi 检验中的临界差(CD)计算如下：

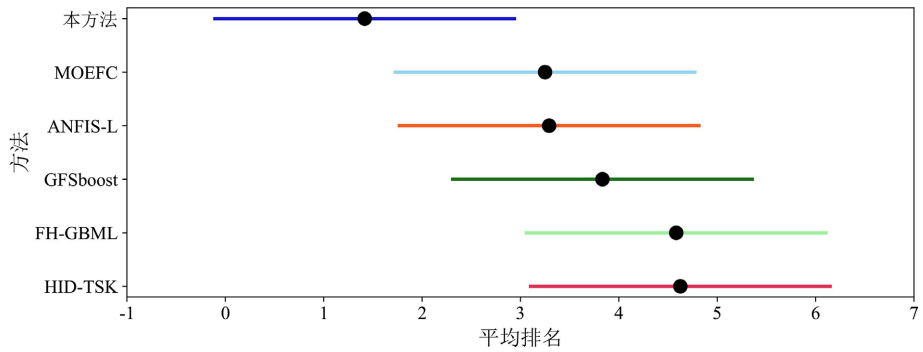
$$\mathrm{CD} = q_\alpha \sqrt{\frac{K(K+1)}{6N}} \tag{26}$$

其中：q_α 是学生化极差分布的临界值。

在本方法与经典的非模糊方法对比实验中，共有 12 个数据集和 7 种方法，Friedman 检验统计值为 $F_F = 16.00$，大于在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下 F 分布的临界值 $\mathrm{F}(6,66) = 2.24$。因此，拒绝原假设“所有方法性能相同”。采用 Nemenyi 事后检验来区分各方法之间的差异，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，T 分布的临界值为 $q_{0.05} = 4.17$；对于 12 个数据集和 7 种方法的 Nemenyi 检验，临界值为 CD = 3.68。结果如图 4(a)所示：本方法的平均排名最高，且与 NB 和 TREE 的排名差均大于临界差 CD，表明本方法在统计意义上显著优于这两种经典方法；而本方法与 L-SVM、G-SVM、KNN 及 FOREST 之间未见显著统计差异，



(a) 本方法与经典的非模糊方法排名图



(b) 本方法与其他类型的模糊方法排名图

Figure 4. Results of statistical significance analysis
图 4. 统计学显著性分析结果图

但本方法仍保持了最优的平均排名。在本方法与其他类型的模糊方法对比实验中，共有 12 个数据集和 6 种方法，Friedman 检验统计值为 $F_F = 7.33$，大于在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下 F 分布的临界值 $F(5,55) = 2.38$。因此，拒绝原假设“所有方法性能相同”。采用 Nemenyi 事后检验来区分各方法之间的差异，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，T 分布的临界值为 $q_{0.05} = 4.03$；对于 12 个数据集和 6 种方法的 Nemenyi 检验，临界值为 CD = 3.08。结果如图 4(b)所示：本方法的平均排名最高，且与 FH-GBML 和 HID-TSK 的排名差均大于临界差 CD，表明本方法在统计意义上显著优于这两种模糊方法。

4. 结论

在模糊分类系统的构建中，输出空间蕴含的结构信息常被传统前件划分方法忽视，导致模糊规则的判别能力受限。针对此问题，本文以 RFCM 与 PFCM 策略为基础，将其应用于分类任务，构建输出空间知识引导的模糊规则分类器框架(KGFRC)。该框架通过输出空间的邻近性信息指导输入空间的模糊划分，使隶属度函数更具判别性。在此基础上，提出 PC-RFCM 策略，通过引入成对约束，将输出空间的全局结构信息与局部标签关系协同融入输入空间的模糊划分过程，从而增强了模糊边界的判别能力。

实验表明，所提出的 KGFRC 方法在 12 个 UCI 基准数据集上优于经典非模糊方法与多种模糊分类器的性能。与原始 RFCM(b)策略相比，引入成对约束后的 PC-RFCM(b)策略在绝大多数数据集上准确率均有提升，验证了成对约束对模糊划分判别性的增强效果。此外，Friedman 检验与 Nemenyi 事后检验进一步验证了所提方法性能优势的统计显著性。

本文方法的局限在于，测试阶段依赖 K 近邻估计隶属度，面对大规模数据时计算开销较高；模型在类别不平衡和高噪声场景下的鲁棒性有待进一步考察。未来工作将知识引导思想推广至其他可解释模型。

参考文献

[1] Yang, J., Liu, Z., Wang, G., Zhang, Q., Xia, S., Wu, D., *et al*. (2025) Constructing Three-Way Decision with Fuzzy Granular-Ball Rough Sets Based on Uncertainty Invariance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **33**, 1781-1792. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2025.3536564

[2] Li, M., Zang, Z., Lu, W. and Pedrycz, W. (2026) A Linguistically Interpretable Fuzzy Fault Diagnosis Model: Knowledge Distillation Perspective. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **34**, 189-203. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2025.3624974

[3] Huang, Q., Gao, S., Li, G. and Wang, W. (2026) Fuzzy Knowledge Perception with Fault Tolerance and Brain-Inspired Reasoning for Diagnosis of Ultrasound Images. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **34**, 1295-1306. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2026.3655414

[4] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x

[5] Mamdani, E.H. and Assilian, S. (1975) An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller.

International Journal of Man-Machine Studies, **7**, 1-13. https://doi.org/10.1016/s0020-7373(75)80002-2

[6] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985) Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **15**, 116-132. https://doi.org/10.1109/tsmc.1985.6313399

[7] Wang, L.-X. and Mendel, J.M. (1992) Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **22**, 1414-1427. https://doi.org/10.1109/21.199466

[8] Shen, Y., Pedrycz, W. and Wang, X. (2019) Clustering Homogeneous Granular Data: Formation and Evaluation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 1391-1402. https://doi.org/10.1109/tcyb.2018.2802453

[9] Zhou, X., Zhang, Q., Zhao, F., Wang, Y., Yin, L. and Wang, G. (2026) A Novel Multigranularity Clustering Algorithm Based on Grid Partition and Fuzzy Quotient Space. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **34**, 311-323. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2025.3636149

[10] Zhou, C.-J., Liu, Z.-K. and Yao, W. (2026) Clustering Based on Transitive Closure of Distance Functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **34**, 263-272. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2025.3633781

[11] Shen, Y., Pedrycz, W., Jing, X., Gacek, A., Wang, X. and Liu, B. (2021) Identification of Fuzzy Rule-Based Models with Output Space Knowledge Guidance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **29**, 3504-3518. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2020.3024804

[12] Jang, J.-R. (1993) ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **23**, 665-685. https://doi.org/10.1109/21.256541

[13] del Jesus, M.J., Hoffmann, F., JuncoNavascues, L. and Sanchez, L. (2004) Induction of Fuzzy-Rule-Based Classifiers with Evolutionary Boosting Algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **12**, 296-308. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2004.825972

[14] Ishibuchi, H., Yamamoto, T. and Nakashima, T. (2005) Hybridization of Fuzzy GBML Approaches for Pattern Classification Problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* (*Cybernetics*), **35**, 359-365. https://doi.org/10.1109/tsmcb.2004.842257

[15] Jiménez, F., Sánchez, G. and Juárez, J.M. (2014) Multi-Objective Evolutionary Algorithms for Fuzzy Classification in Survival Prediction. *Artificial Intelligence in Medicine*, **60**, 197-219. https://doi.org/10.1016/j.artmed.2013.12.006

[16] Zhang, Y., Ishibuchi, H. and Wang, S. (2018) Deep Takagi-Sugeno-Kang Fuzzy Classifier with Shared Linguistic Fuzzy Rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **26**, 1535-1549. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2017.2729507

[17] Wagstaff, K., Cardie, C., Rogers, S. and Schrodl, S. (2001) Constrained k-Means Clustering with Background Knowledge. In: *Proceedings of the Eighteenth International Conference on Machine Learning*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 577-584.

[18] Huang, Q., Fan, Q., Xing, Z., Yang, X. and He, X. (2025) Convergence Analysis of a Novel High Order Networks Model Based on Entropy Error Function. *Mathematics and Computers in Simulation*, **227**, 405-419. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2024.08.014

[19] Fan, Q., Niu, L. and Kang, Q. (2020) Regression and Multiclass Classification Using Sparse Extreme Learning Machine via Smoothing Group $l_{1/2}$ Regularizer. *IEEE Access*, **8**, 191482-191494. https://doi.org/10.1109/access.2020.3031647

[20] Alcala-Fdez, J., Fernandez, A., Luengo, J., Derrac, J., Garcia, S., Sanchez, L. and Herrera, F. (2011) KEEL Data-Mining Software Tool: Data Set Repository, Integration of Algorithms and Experimental Analysis Framework. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, **17**, 255-287.

[21] Hill, M.G., Connolly, P.G., Reutemann, P. and Fletcher, D. (2014) The Use of Data Mining to Assist Crop Protection Decisions on Kiwifruit in New Zealand. *Computers and Electronics in Agriculture*, **108**, 250-257. https://doi.org/10.1016/j.compag.2014.08.011

[22] Hajek, P. and Novotny, J. (2022) Fuzzy Rule-Based Prediction of Gold Prices Using News Affect. *Expert Systems with Applications*, **193**, Article ID: 116487. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116487

[23] Demšar, J. and Schuurmans, D. (2006) Statistical Comparisons of Classifiers over Multiple Data Sets. *Journal of Machine Learning Research*, **7**, 1-30.